

Exercice 1 :

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P: " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 "$
- $P: " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0 "$
- $P: " \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2} \in \mathbb{N} "$
- $P: " \forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos(x) \leq 1 "$
- $P: " (\forall m \in \mathbb{N}); (\exists p \in \mathbb{N}) : m \leq p "$
- $P: " \exists n \in \mathbb{N} : 2n + 1 \text{ est pair} "$
- $P: " \exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N} "$
- $P: " (\forall m \in \mathbb{N}); (\exists p \in \mathbb{N}) : p^2 = m "$

Exercice 2 :

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

- Le carré de tout réel est positif.
- Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

Exercice 3 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$

Exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

Exercice 5 :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$E : |x - 5| + 2x - 3 \geq 1$$

Exercice 6 :

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

Exercice 7 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

Exercice 8 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$, montrer que :

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 10 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Exercice 11 :

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 12 :

Montrer que La proposition suivant est fausse :

$$P: " \forall x \in [0; 1] : x^2 < x "$$

Exercice 13 :

Montrer que La proposition suivant est fausse :

$$P: " (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y "$$

Exercice 14 :

Montrer que La proposition suivant est fausse :

$$P: " (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2 "$$

Exercice 15 :

Montrer que La proposition suivant est fausse :

$$P: " \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a + c \neq b + d "$$

Exercice 16 :

Montrer que La proposition suivant est vraie :

$$P: " \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 "$$

Exercice 17 :

Montrer par récurrence que La proposition suivant est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq 1 + 2n$$

Exercice 18 :

Montrer par récurrence que La proposition suivant est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$