Exercice 1 : (7 pts)

(Les questions de cet exercice sont indépendantes.)

1) Exprimer à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (2 pts)
   a) (P) : « Pour tout réel x, on a x^2 est positif. » (0,75 pt)
   b) (Q) : « Si le produit de deux réels est nul alors l'un d'entre eux est nul. » (0,75 pt)
2) Soit la proposition suivante : $(T) : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (1 pt)
   a) Donner la négation de la proposition (T). (0,5 pt)
   b) Étudier la valeur de vérité de la proposition (T). (0,5 pt)
3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un raisonnement par contraposée, montrer que :
$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y.$$
(1,5 pt)
4) Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$cm, $AC = 4$cm et $BC = 5\sqrt{2}$cm. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A. (1,5 pt)
5) Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
(1,5 pt)

Exercice 2 : (3 pts)

Soit f une fonction définie par le tableau de variations ci-contre :

x	-1		0		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	-1

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de f. (0,5 pt)
2) Déterminer le tableau de variation de la fonction $-2 \times f$. (1 pt)
3) Déterminer graphiquement $f([-1;0])$, $f([0;1])$ et $f([1;2])$. (3 × 0,5 pt)

Exercice 3 : (10 pts)

On considère les deux fonctions numériques f et g définies par :
$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x-1}.$$

1) Déterminer D_f et D_g, les ensembles de définition de f et g. (2 × 0,25 pt)
2) Montrer que la fonction f est minorée par 2 sur D_f. (0,5 pt)
3) Étudier les variations de f et g. (2 × 0,5 pt)
4) Donner les tables de variations des fonctions f et g. (2 × 0,5 pt)
5) a) Construire dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C_f) et (C_g). (2 × 1 pt)
   b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) \geq g(x)$. (2 × 0,5 pt)
   c) Déterminer graphiquement $f([-\infty;1])$ et $f([1;+\infty])$. (2 × 0,5 pt)
6) Déterminer $D_{g\circ f}$, l'ensemble de définition de $g \circ f$. (0,5 pt)
7) Montrer que :
$$(\forall x \in D_{g\circ f}) : (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$
(0,5 pt)
8) Étudier la monotonie de la fonction $g \circ f$ sur $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$. (0,5 pt)
9) Dresser le tableau de variations de $g \circ f$. (0,5 pt)
10) En déduire que 1 est une valeur minimale de la fonction $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

BONNE CHANCE

Youssef SEMHI