Cours Barycentre 1ère BAC Sciences Expérimentales

Youssef SEMHI - 0708875223

1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

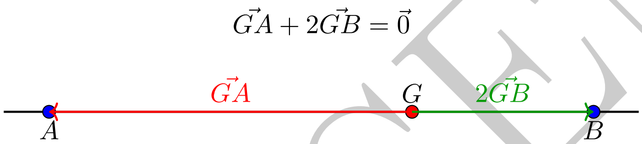
1.1. ACTIVITÉ D'INTRODUCTION

Activité :
Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$ et G un point du plan $\mathcal{P}$.

1) Déterminer G de $\mathcal{P}$ tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2) Construire tel que : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
3) Combien existe de point G tel que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
4) Existe t-il de point G tel que : $3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Corrigé de l'activité :

1) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
Cette relation signifie que G est le milieu de $[AB]$. Donc G est unique et situé au milieu du segment $[AB]$.
2)



3) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
On a $a = 2$, $b = -3$, donc $a + b = -1 \neq 0$.
$\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \dfrac{-3}{-1}\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$
Donc G est unique et situé sur la droite (AB) tel que $AG = 3AB$ (au-delà de B).
4) $3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
On a $a = 3$, $b = -3$, donc $a + b = 0$.
Dans ce cas, il n'existe **pas** de point G vérifiant cette relation car la condition $a + b \neq 0$ n'est pas satisfaite.

1.2. VOCABULAIRE

Vocabulaire

Dans l'écriture : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- Le nombre a s'appelle le **poids** du point A
- Le couple (A, a) est appelé **point pondéré**
- L'ensemble $S = \{(A, a), (B, b)\}$ est appelé **système pondéré**
- Si $a + b \neq 0$, le point G s'appelle **barycentre** du système pondéré S
- Si $a = b$ et $a \neq 0$, le point G s'appelle **isobarycentre** de A et B ou **centre de gravité** de $[AB]$

1.3. DÉFINITION ET THÉORÈME

Définition 1

Soient (A, a) et (B, b) deux points pondérés du plan $\mathcal{P}$, tel que $A \neq B$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
Si $a + b \neq 0$ alors il existe un point unique G de $\mathcal{P}$ tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Le point G s'appelle **barycentre** du système pondéré $S = \{(A, a), (B, b)\}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ et } a+b \neq 0 &\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ et } a+b \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} \text{ et } a+b \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ et } a+b \neq 0 \end{aligned}$$

Puisque A et B sont donnés, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est unique, donc le point G est unique.

1.4. PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE

Propriété 1 (Invariance)

Si G est barycentre du système pondéré $S = \{(A,a),(B,b)\}$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on a aussi :

$$G \text{ est barycentre du système pondéré } \{(A,ka),(B,kb)\}$$

Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie leurs coefficients par le même réel non nul.

Propriété 2 (Caractéristique)

G est barycentre du système pondéré $S = \{(A,a),(B,b)\}$ si et seulement si :

$$a+b \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall M \in \mathcal{P} : a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$$

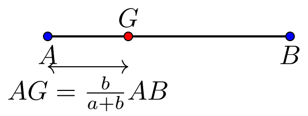
Les points A, B et G sont alignés et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

1.5. CONSTRUCTION DU BARYCENTRE

Méthode de construction :

Pour construire G barycentre de $S = \{(A,a),(B,b)\}$:

- On divise le segment $[AB]$ en $|a+b|$ segments égaux
- Chaque segment a pour longueur $d = \dfrac{AB}{|a+b|}$
- Si $b > 0$: G est à distance $|b| \times d$ de A dans le sens de A vers B
- Si $b < 0$: G est à distance $|b| \times d$ de A dans le sens opposé de A vers B



1.6. APPLICATIONS

Exemple 1

Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que : $\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12$

Solution :

Soit G barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$

Par propriété caractéristique : $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG}$

$\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12 \Leftrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 2$

L'ensemble est le cercle $\mathcal{C}(G,2)$

Exemple 2

Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que : $\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$

Solution :

Soit G barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$ et G' barycentre de $\{(A,4),(B,2)\}$

$\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = \|6\overrightarrow{MG'}\|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\| \Leftrightarrow MG = MG'$

L'ensemble est la médiatrice du segment $[GG']$

1.7. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Propriété 3

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $G(x_G, y_G)$.
Si G est barycentre de $S = \{(A, a), (B, b)\}$, alors :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

2. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

2.1. DÉFINITION ET THÉORÈME

Définition 2

Soient (A, a), (B, b) et (C, c) trois points pondérés du plan $\mathcal{P}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Si $a + b + c \neq 0$ alors il existe un point unique G de $\mathcal{P}$ qui vérifie :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Le point G s'appelle **barycentre** du système pondéré $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.
Si $a = b = c \neq 0$, le point G s'appelle **isobarycentre** ou **centre de gravité** du triangle ABC.

Exemple : Barycentre de trois points

Soient $A(1, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(4, 6)$ trois points du plan. Déterminer et construire le barycentre G du système :

$$S = \{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$$

Corrigé

Somme des coefficients : $2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

Donc G existe et est unique

Soit I le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1)\}$

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

G est le barycentre de $\{(I, 3), (C, 1)\}$

$\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3+1}\overrightarrow{IC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IC}$

Coordonnées du barycentre G :

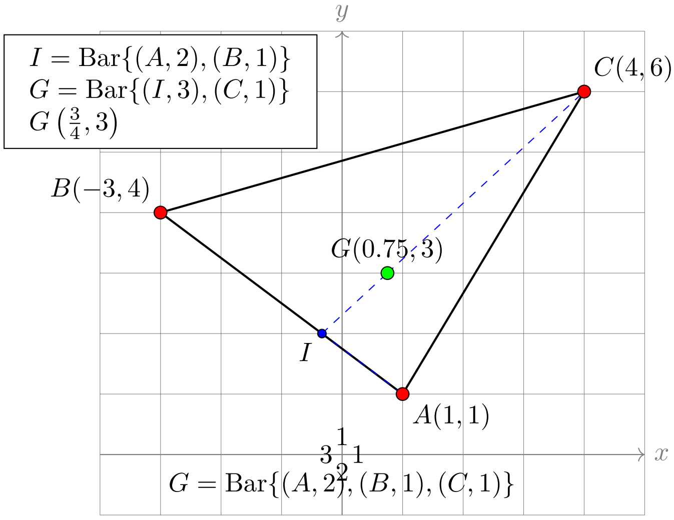
$$x_G = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-3) + 1 \times 4}{2+1+1} = \frac{2-3+4}{4} = \frac{3}{4}$$
$$y_G = \frac{2 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 6}{4} = \frac{2+4+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Coordonnées du point intermédiaire I :

$$x_I = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-3)}{2+1} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$y_I = \frac{2 \times 1 + 1 \times 4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Vérification : G est bien le barycentre de $\{(I, 3), (C, 1)\}$:

$$x_G = \frac{3 \times (-\frac{1}{3}) + 1 \times 4}{3+1} = \frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4}$$
$$y_G = \frac{3 \times 2 + 1 \times 6}{4} = \frac{6+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$



2.2. PROPRIÉTÉS

Propriété 4 (Invariance)

Si G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on a aussi :

G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$

Propriété 5 (Caractéristique)

G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ si et seulement si :

$$a+b+c \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall M \in \mathcal{P} : a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$$

Propriété 6 (Associativité)

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.
Soit G_2 barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ (avec $a+b \neq 0$). Si G est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors G est aussi barycentre de $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

Exemple :

G est barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ (centre de gravité du triangle ABC).
Soit A' milieu de $[BC]$, donc A' est barycentre de $\{(B,1),(C,1)\}$.
Alors G est barycentre de $\{(A,1),(A',2)\}$, donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2.3. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Propriété 7

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ et $G(x_G,y_G)$.
Si G est barycentre de $S = \{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$$

3. BARYCENTRE DE QUATRE POINTS PONDÉRÉS

3.1. DÉFINITION ET THÉORÈME

Définition 3

Soient (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d) quatre points pondérés du plan $\mathcal{P}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Si $a + b + c + d \neq 0$ alors il existe un point unique G de $\mathcal{P}$ qui vérifie :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Le point G s'appelle **barycentre** du système pondéré $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$.
Si $a = b = c = d \neq 0$, le point G s'appelle **isobarycentre** des points A, B, C, D.

3.2. PROPRIÉTÉS

Propriété 8 (Invariance)

Si G est barycentre du système pondéré $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on a aussi :

$$G \text{ est barycentre du système pondéré } \{(A, ka), (B, kb), (C, kc), (D, kd)\}$$

Propriété 9 (Caractéristique)

G est barycentre du système pondéré $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$ si et seulement si :

$$a + b + c + d \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall M \in \mathcal{P} : a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD} = (a + b + c + d)\overrightarrow{MG}$$

Propriété 10 (Associativité)

Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace des points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.
Exemples :

G_1 barycentre de $\{(A, a), (B, b)\}$ et G_2 barycentre de $\{(C, c), (D, d)\}$
Alors G est barycentre de $\{(G_1, a + b), (G_2, c + d)\}$
G_3 barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$
Alors G est barycentre de $\{(G_3, a + b + c), (D, d)\}$

3.3. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Propriété 11

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ et $G(x_G, y_G)$.
Si G est barycentre de $S = \{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$, alors :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a + b + c + d} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a + b + c + d}$$