~ Tronc Commun ~
L'ensemble des entiers naturels
Notions sur l'arithmétiques

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que le nombre $n(n+1)$ est pair.
2. Déterminer la parité des nombres suivants :

$$a = 2n^2 + 13 \quad , \quad b = n^3 - n$$
$$c = (2n+1)^7 \quad , \quad d = n^2 + 3n + 1$$

Exercice 2 :

Etudier la parité des nombres :

$2^9 + 6^9$; $17^3 - 5^3$; 351×208 ; 37013×1375

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel

Etudier la parité des nombres :

$12n + 8$; $2n + 5$; $4n + 6$; $8n - 7 \quad (avec \quad n \geq 1)$; $6n + 3$; $2n^2 + 8n + 11$; $n^2 + n + 2006$; $n^3 - n + 2$

Exercice 4 :

1. Déterminer les diviseurs des nombres : $18, 38, 75$ et 60.
2. Déterminer cinq multiples de $3, 5, 7, 11, 15$.

Exercice 5 :

Mettez $\times$ dans la case qui convient :

lesnombres \ *divisible*	par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
7524					
2805					
9360					
5005005					
91328					
1010001					

Exercice 6 :

Soient n et a deux entiers naturels non nuls.
On pose $S=(a+1)+(a+2)+.......+(a+n)$

1. Montrer que $1+2+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2. Montrer que n divise le nombre $S-\frac{n(n+1)}{2}$
3. Montrer que si n est impair alors S est divisible par n .

Exercice 7 :

Déterminer tous les nombres entiers naturels compris entre 202 et 299 qui sont divisibles par 3 et par 5.

Exercice 8 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$
On pose $A=n^4-1$

1. Montrer que $n-1$, $n+1$ et n^2+1 sont des diviseurs du nombre A
2. Déterminer quatre autres diviseurs du nombre A .

Exercice 9 :

Soient x et y deux entiers naturels.
On pose $A=(x+2y)^2-x^2$

1. Montrer que $A \in \mathbb{N}$
2. Montrer que A est pair.
3. Montrer que A est divisible par 4

Exercice 10 :

1. Déterminer les multiples du nombre 8 inférieurs à 76
2. Même question pour le nombre 7

Exercice 11 :

1. Donner les quotients de la division euclidienne de chacun des nombres :
   $544-272-136-68-34$ par 2
2. En déduire la valeur du nombre entier naturel n tel que : $544=2^n \times 17$

Exercice 12 :

Déterminer les entiers naturels a,b et c pour que :

a) $23a4$ est divisible par 3
b) $23a4$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9

c) $\overline{23b5c}$ est divisible par 3 et 5

Exercice 13 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $n-3$ est multiple de 4.
Montrer que le nombre n^2+6n+5 est multiple de 16

Exercice 14 :

Soit p un nombre premier tel que $p>2$

1. Montrer que p^2-1 est multiple de 8
2. En déduire que 16 divise p^4-1

Exercice 15 :

On considère les deux nombres $x=1500$ et $y=840$

1. Décomposer les nombres x et y en facteurs premiers.
2. Déterminer $x \wedge y$ et $x \vee y$.
3. Simplifier les nombres $\sqrt{x}$ et $\dfrac{x}{y}$

Exercice 16 :

Déterminer tous les valeurs possibles de l'entier naturel n tel que $\dfrac{n+13}{n+3}$ soit un nombre entier naturel.

Exercice 17 :

Soit n un entier naturel

1. a) Développer le nombre : $(n+1)^2-n^2$
   b) En déduire que tout entier naturel impair est la différence des carrées de deux nombres consécutifs.
2. Appliquer le résultat obtenu pour les nombres $19, 47, 53$

Exercice 18 :

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)\wedge(n+2)=1$

Exercice 19 :

1. Trouver toutes les solutions de l'équation : (1): $x^2-y^2=51$ dans $\mathbb{N}^2$
2. Déterminer les couples (a,b) des entiers naturels tels que : $(S): \begin{cases} a^2-b^2=7344 \\ a \wedge b=12 \end{cases}$

Exercice 20 :

Soit n un entier naturel
On pose $a = 5^{n+2} - 5^{n}$ et $b = 7^{n+2} - 7^{n}$
Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$

Exercice 21 :

1. Est-ce que le nombre 2017 est premier ?
2. Est-ce que le nombre 27000001 est premier ?

Corrigé de l'exercice 1

1. Soit n un entier naturel non nul

   1^{er} cas : Si n est pair :

   alors $n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$

   donc $n+1 = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$

   et par suite

   $$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 2(2k^2+k) \\ &= 2k' \quad (k' = 2k^2+k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   2^{ème} cas : Si n est impair :

   alors $n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$

   donc $n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1) \quad (k \in \mathbb{N})$

   et par suite

   $$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1).2(k+1) \\ &= 2\times((2k+1).(k+1)) \\ &= 2\times(2k^2+3k+1) \\ &= 2.k'' \quad (k'' = 2k^2+3k+1 \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2.
   - ✓ $a = 2n^2 + 13$

     Puisque $2n^2$ est pair et 5 est impair alors a est impair
   - ✓ $b = n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1)$

     (On sait que d'après le résultat de la question 1 que le produit de deux nombres consécutifs est pair)

     $n(n+1)$ est pair donc $n(n+1)(n-1)$ est pair

     càd $b = n^3 - n$ est pair
   - ✓ $c = (2n+1)^7$

     On sait que $(2n+1)$ est impair , càd $(2n+1)^7$ est impair

     Donc le nombre c est impair .
   - ✓

$$\begin{aligned} d &= n^2+3n+1 \\ &= n^2+n+2n+1 \\ &= n(n+1)+2n+1 \end{aligned}$$

Puisque $n(n+1)$ est pair et $2n+1$ est impair

Donc $n(n+1)+2n+1$ est impair

D'où d est impair.

Corrigé de l'exercice 2

- ✓ On a 2 est pair donc 2^9 est pair
  Et on a 6 est pair donc 6^9 est pair
  Et par suite 2^9+6^9 est pair.
- ✓ On a 17 est impair donc 17^3 est impair
  Et on a 5 est impair donc 5^3 est impair
  Et par suite 17^3-5^3 est pair.
- ✓ On a 351 est impair donc
  Et on a 208 est pair
  Et par suite 351×208 est pair.
- ✓ On a 37013 est impair
  Et on a 1375 est impair
  Et par suite 37013×1375 est impair

Corrigé de l'exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}$

- ✓ On a $12n+8=2\times(6n+4)=2\times k \quad (k=6n+4\in\mathbb{N})$ donc $12n+8$ est pair.
- ✓ On a $2n+5=2n+4+1=2(n+2)+1=2k+1 \quad (k=n+2\in\mathbb{N})$ donc $2n+5$ est impair.
- ✓ On a $4n+6=2\times(2n+3)=2\times k \quad (k=2n+3\in\mathbb{N})$ donc $4n+6$ est pair.
- ✓ On a $8n-7=8n-8+1=2(4n-4)+1=2k+1 \quad (k=4n-4\in\mathbb{N}, avec \quad n\geq1)$ donc $8n-7$ est impair.
- ✓ On a $6n+3=3\times(2n+1)$ donc $6n+3$ est impair (produit de deux nombres impairs).

- ✓ On a $2n^2+8n+11=2n^2+8n+10+1=2\left(n^2+4n+5\right)+1=2k+1 \quad \left(k=n^2+4n+5\in\mathbb{N}\right)$
  donc $2n^2+8n+11$ est impair.
- ✓ On a $n^2+n+2006=n(n+1)+2006$
  - $n(n+1)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs)
  - 2006 est pair.

  Donc $n^2+n+2006$ est pair (somme de deux nombres pairs)
- ✓ On a $n^3-n+2=n\left(n^2-1\right)+2=\underbrace{n(n+1)}_{pair}\times(n-1)+\underbrace{2}_{pair}$ donc n^3-n+2 est pair.

Corrigé de l'exercice 4

1. Les diviseurs de 18 sont : $\{1,2,3,6,9,18\}$.
   Les diviseurs de 38 sont : $\{1,2,19,38\}$.
   Les diviseurs de 75 sont : $\{1,3,5,15,25,75\}$.
   Les diviseurs de 60 sont : $\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,18,30,60\}$.
2. Les cinq multiples de 3 sont : $\{3,6,9,12,15\}$.
   Les cinq multiples de 5 sont : $\{5,10,15,20,25\}$.
   Les cinq multiples de 7 sont : $\{7,14,21,28,35\}$.
   Les cinq multiples de 11 sont : $\{11,22,33,44,55\}$.
   Les cinq multiples de 15 sont : $\{15,30,45,60,75\}$.

Corrigé de l'exercice 5

lesnombres \ *divisible*	par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
7524	×	×	×		×
2805		×		×	
9360	×	×	×	×	×
5005005		×		×	
91328	×		×		
1010001		×			

Corrigé de l'exercice 6

1. Montrons que : $1+2+.......+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

   On pose $A=1+2+.......+n$

   On peut écrire A sous la forme : $A=n+(n-1)+........+2+1$

   Donc $A+A=(1+n)+(2+n-1)+........+(n+1)$

   Donc $2A=\underbrace{(n+1)+(n+1)+......+(n+1)}_{n\ \ fois}=n(n+1)$

   Et par suite $A=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Montrons que n divise le nombre $S-\dfrac{n(n+1)}{2}$

   On a $S-\dfrac{n(n+1)}{2}=na+(1+2+.......+n)-\dfrac{n(n+1)}{2}$ c -à -d $S-\dfrac{n(n+1)}{2}=n\times a$

   Donc n divise le nombre $S-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Montrons que si n est impair alors S est divisible par n

   Si n est impair alors $(n+1)$ est pair c -à -d $(n+1)=2k$ $(k\in\mathbb{N})$

   Donc $\dfrac{n(n+1)}{2}=k\times n$ et comme $S-\dfrac{n(n+1)}{2}=n\times a$ alors $S=n(a-k)$

   Et par suite S est divisible par n .

Corrigé de l'exercice 7

- Les nombres entiers naturels qui répondent à la question sont ceux dont la somme de leurs chiffres est divisible par 3 et dont les chiffres des dizaines sont 0 ou 5.
- Les nombres divisibles par 5 sont :

  205 210 215 220 225 230 235 240 245 250
  255 260 265 270 275 280 285 290 295
- Les nombres divisibles par 3 parmi la liste précédente sont :

  210 225 240
  255 270 285

Corrigé de l'exercice 8

1. On a $A = n^4 - 1 = \left(n^2\right)^2 - (1)^2 = \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) = (n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$
   Donc $n-1$, $n+1$ et n^2+1 sont des diviseurs du nombre A
2. On a $A = (n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$
   Donc : 1 , A , $(n-1)\left(n^2+1\right)$, $(n+1)\left(n^2+1\right)$ sont des diviseurs du nombre A .

Corrigé de l'exercice 9

1. Montrons que $A \in \mathbb{N}$
   On a :
   $$\begin{aligned} A &= (x+2y)^2 - x^2 \\ &= (x+2y+x)(x+2y-x) \\ &= 2y(2x+2y) \\ &= 4y(x+y) \end{aligned}$$
   On a $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $4y(x+y) \in \mathbb{N}$
   Et par suite $A \in \mathbb{N}$
2. Montrons que A est pair
   On a $A = 4y(x+y)$ c -à –d $A = 2\times\left[2y(x+y)\right]$
   Donc A est pair
3. Montrons que A est divisible par 4
   On a $A = 4\times\left[y(x+y)\right]$
   Donc A est divisible par 4.

Corrigé de l'exercice 10

1. On pose $a = 8k$ avec $k \in \mathbb{N}$
   Et on cherche k de tel façon $0 \le a \le 76$
   Donc $0 \le 8k \le 76$
   Donc $0 \le k \le \dfrac{76}{8}$
   Donc $0 \le k \le \dfrac{19}{2}$
   Donc $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

D'où les multiples de 8 inférieurs à 76 sont : $\{0,8,16,24,32,40,48,56,64,72\}$

2. De la même façon on a les multiples de 7 inférieurs à 76 sont : $\{0,7,14,21,28,35,42,49,56,63,70\}$

Corrigé de l'exercice 11 :

1. On a :

$$\begin{aligned} 544 &= 2\times 272 \\ 272 &= 2\times 136 \\ 136 &= 2\times 68 \\ 68 &= 2\times 34 \\ 34 &= 2\times 17 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} 544 &= 2\times 272 \\ &= 2\times(2\times 136) \\ &= 2\times 2\times(2\times 68) \\ &= 2\times 2\times 2\times(2\times 34) \\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times(2\times 17) \\ &= 2^5\times 17 \end{aligned}$$

Donc : $n=5$

Corrigé de l'exercice 12

a) $23a4$ est divisible par 3 si et seulement si $2+3+a+4$ est divisible par 3
c -à –d $9+a$ est divisible par 3
et par suite $a\in\{0,3,6,9\}$

b) $23a4$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9 si et seulement si $a\in\{3,6\}$

c) $23b5c$ est divisible par 3 et 5 si et seulement si $2+3+b+5+c=10+b+c$ est divisible par 3 et $c\in\{0,5\}$

- Si $c=0$: alors $10+b$ est divisible par 3 donc $b\in\{2,5,8\}$
- Si $c=5$: alors $15+b$ est divisible par 3 donc $b\in\{0,3,6,9\}$

Donc $(b,c)\in\{(2,0);(5,0);(8,0);(0,5);(3,5),(6,5);(9,5)\}$

Corrigé de l'exercice 13

On sait que : $n \geq 3$ et $n-3$ est multiple de 4
Donc il existe un entier naturel k tel que : $n-3=4k$
Donc : $n=3+4k$
Par suite :

$$\begin{aligned} n^2+6n+5 &= (3+4k)^2+6(3+4k)+5 \\ &= 9+24k+16k^2+18+24k+5 \\ &= 16k^2+48k+32 \qquad (k'=k^2+3k+2 \in \mathbb{N}) \\ &= 16(k^2+3k+2) \\ &= 16k' \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 14

1. On a p est un nombre premier tel que $p>2$ donc p est impair
   p s'écrit sous la forme $p=2k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$
   Donc
   $$\begin{aligned} p^2-1 &= (2k+1)^2-1 \\ &= 4k^2+4k+1-1 \\ &= 4k^2+4k \\ &= 4\times \underbrace{k(k+1)}_{pair} \\ &= 4\times 2k' = 8\times k' \end{aligned}$$
   Donc p^2-1 est multiple de 8
2. On a :
   $p^2-1=8k'$
   Et puisque p est impair donc il est clair que p^2+1 est pair donc $p^2+1=2k''$
   Et par suite $p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)=8k'\times 2k''=16\times(k'k'')$
   D'où 16 divise p^4-1.

Corrigé de l'exercice 15

1.

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$x = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$$
$$y = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

2. On a : $x \wedge y = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$ et $x \vee y = 2^3 \times 3^1 \times 5^3 \times 7^1 = 21000$
3. On a : $\sqrt{x} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5^3} = 2 \times 5 \times \sqrt{3 \times 5} = 10\sqrt{15}$ et $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2^2 \times 3^1 \times 5^3}{2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1} = \dfrac{5^2}{2 \times 7} = \dfrac{25}{14}$

Corrigé de l'exercice 16

Remarquons que : $\dfrac{n+13}{n+3} = \dfrac{n+3+10}{n+3} = 1 + \dfrac{10}{n+3}$

Donc $n+13$ est divisible par $n+3$ veut dire que $n+3$ divise 10

Puisque $1, 2, 5, 10$ sont les diviseurs de 10, alors :

$n+3=1$ ou $n+3=2$ ou $n+3=5$ ou $n+3=10$

Donc $n=-2$ ou $n=-1$ ou $n=2$ ou $n=7$

Et puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $n=2$ ou $n=7$.

Corrigé de l'exercice 17

1. a) On a : $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1$.

   Le nombre $2n+1$ est impair

   b) soit x un entier naturel impair , donc il existe un entier naturel n tel que : $x = 2n+1$, et d'après le résultat de la première question a), on a : $x = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$

   d'où le résultat.
2.
   - $19 = 2 \times 9 + 1 = (9+1)^2 - 9^2 = 10^2 - 9^2$

- $47 = 2\times 23 + 1 = (23+1)^2 - 23^2 = 24^2 - 23^2$
- $53 = 2\times 26 + 1 = (26+1)^2 - 26^2 = 27^2 - 26^2$

Corrigé de l'exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$
Posons $d = (n+1) \wedge (n+2)$
On a d divise $(n+2)$ et d divise $(n+1)$
Donc d divise $(n+2)-(n+1)$
Donc d divise 1
Et puisque $d \in \mathbb{N}^*$ alors $d = 1$
<u>Rq :</u> $(n+1)$ et $(n+2)$ sont deux nombres entiers consécutifs donc $(n+1)\wedge(n+2) = 1$

Corrigé de l'exercice 19

1. L'équation (1) équivaut à $(x+y)(x-y) = 51$
   Ça veut dire que $(x-y)$ et $(x+y)$ sont les diviseurs de 51
   On a $1,3,17$ et 51 sont les diviseurs de 51.
   Donc on a possibilités suivantes :
   $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=51 \\ x+y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=17 \\ x+y=3 \end{cases}$

   D'où $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=26 \\ y=-25 \end{cases}$ (impossible) ou $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=10 \\ y=-7 \end{cases}$ (impossible)

   Et par suite $(x,y) \in \{(26,25);(10,7)\}$

2. $(S): \begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$
   On a $a \wedge b = 12$ donc $a = 12x \quad (x \in \mathbb{N})$ et $b = 12y \quad (y \in \mathbb{N})$
   Donc $a^2 - b^2 = 7344$ équivaut à $(12x)^2 - (12y)^2 = 7344$
   équivaut à $144x^2 - 144y^2 = 7344$
   équivaut à $x^2 - y^2 = 51$
   et d'après le résultat de la première question on a : $(x,y) \in \{(26,25);(10,7)\}$

et par suite $(a,b)\in\{(312,300);(120,84)\}$

Corrigé de l'exercice 20 :

On a $a=5^{n+2}-5^n=5^n\left(5^2-1\right)=5^n\times 24=2^3\times 3^1\times 5^n$

Et on a $b=7^{n+2}-7^n=7^n\left(7^2-1\right)=7^n\times 48=2^4\times 3^1\times 7^n$

Donc $a\wedge b=2^3\times 3=24$ et $a\vee b=2^4\times 3\times 5^n\times 7^n=48\times(35)^n$

Corrigé de l'exercice 21 :

1.
   - On calcule $\sqrt{2017}$: $\sqrt{2017}\approx 44,91$
   - On détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2017}$:
     $2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43$
   - Le nombre 2017 n'est pas divisible par ces nombres
     D'où le nombre 2017 est premier.
2. On a $27000001=27000000+1=(300)^3+1^3=(300+1)\left(300^2-300+1\right)=301\times 89701$

   Donc le nombre 27000001 n'est pas premier.