Leçon3 : **Equations, inéquations et systèmes**

PARTIE1 : Equation et inéquations du premier degré à une inconnue

Présentation globale

- Equation du premier degré à une inconnue ;
- équations se ramenant à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue
- Signe de : ax +b et inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Inéquations se ramenant à la résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Equation du second degré à une inconnue,
- Factorisation d'un trinôme ;
- Equations du premier degré à deux inconnues ;
- Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

(méthodes derésolution : substitution, combinaison lineaire).

Capacités attendues

- Résoudre des équations du premier degré et du second degré à une inconnue et des équations précédentes ;
- Factoriser un trinôme du second degré en utilisant différentes techniques ;
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue et des inéquations se ramenant à la résolution des inéquations précédentes ;
- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ;
- Mathématiser des situations qui se ramènent à la résolution des équations, des inéquations et des systèmes précédents.

Recommandations pédagogiques

- Les techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ont été étudiées au collège, il faudra renforcer cette pratique par l'étude de quelques exemples Simple ;
- En utilisant le discriminant dans la résolution des équations du second degré, on donnera aussi une Importance aux autres techniques (factorisation, forme canonique…)
- Les équations paramétriques du premier et du second degré sont hors programme ;
- Des problèmes, issus de la vie quotidienne ou des autres matières (qui sont en relation avec l'avenir de l'élève : économie, géographie...) , devront être proposés dans le but d'habituer les élèves à mathématiser des situations et de les résoudre.

I) Equation du premier degré à une inconnue ;

1) Définition : On appelle équations du premier degré a une inconnue toute équation de la forme : $ax+b=0$ où les coefficients *a*, *b* sont des réels donnés et x est l'inconnue

Résoudre l'équation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : S

2)Applications : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x+4=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$ 3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

4) $x^2-100=0$ 5) $x^3-7x=0$ 6) (2x + 3)² - (2x + 3)(x - 4) = 0 ,

Solution :1) $2x+4=0$ Équivaut à : $2x=-4$

Équivaut à : $x=\frac{-4}{2}$

Équivaut à : $x=-2$ Et par suite: $S=\{-2\}$

2) $3(2x+5)=6x-1$ équivaut à $6x+15=6x-1$ équivaut à $6x-6x=-1-15$ équivaut à $0x=-16$

Équivaut à $0=-16$ ceci est impossible
Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$
Équivaut à $4x-8=6x-2x-8$
Équivaut à $4x-4x+8-8=0$
Équivaut à $0=0$ donc tous les réels sont solutions et par suite : $S=\mathbb{R}$

4) $x^2-100=0$ équivalent à : $x^2-10^2=0$
C'est une identité remarquable de la forme :
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
Équivalent à : $(x-10)(x+10)=0$
Équivalent à : $x-10=0$ ou $x+10=0$
Équivalent à : $x=10$ ou $x=-10$
D'où : $S=\{-10;10\}$

5) $x^3-7x=0$ Équivalent à : $x(x^2-7)=0$
Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-7=0$
Équivalent à $x=0$ ou $x^2=7$
Équivalent à : $x=0$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$
D'où : $S=\{-\sqrt{7};0;\sqrt{7}\}$

6) $(2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 4) = 0$ ce qui est équivalent à : $(2x+3)(2x+3 -x + 4) = 0$
Ce qui est équivalent à : $(2x + 3)(x + 7) = 0$
Les Solutions sont $-3/2$ ou -7.
Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\{-7;-3/2\}$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$
2) $(3x+1)(2x-1)-4x^2+1=0$

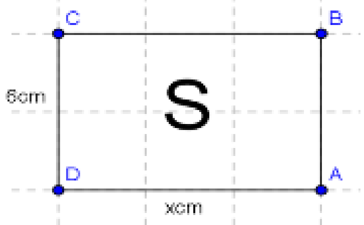
Solution : 1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$ Équivaut à : $x+x\sqrt{2}=-3-\sqrt{18}$

Équivaut à $x(1+\sqrt{2})=-3-3\sqrt{2}$ Équivaut à : $x=\dfrac{-3-3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{-3(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=-3$

Par suite: $S=\{-3\}$

2) $(3x+1)(2x-1)-4x^2+1=0$ Équivalent à : $(3x+1)(2x-1)-(4x^2-1)=0$
Équivaut à : $(3x+1)(2x-1)-(2x-1)(2x+1)=0$
Équivaut à : $(2x-1)[(3x+1)-(2x+1)]=0$
Équivaut à : $(2x-1)(3x+1-2x-1)=0$
Équivaut à : $x(2x-1)=0$ Équivaut à : $x=0$ ou $2x-1=0$
Équivaut à : $x=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}$ d''où : $S=\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$

Exercice : Quelle est la longueur d'un rectangle sachant que sa largeur est 6cm et sa surface vaut le double de son périmètre **?**



Solution : Soit S La surface du rectangle $ABCD$
Et P Le périmètre du rectangle $ABCD$
Soit x La longueur du rectangle
On a donc : $S=6x$ et $P=2(6+x)=12+2x$

$S=2P$ Signifie $6x=2(12+2x)$

Signifie $6x=24+4x$ c'est-à-dire : $2x=24$

Signifie $x=\frac{24}{2}=12cm$

Exercice : Amin a 12 ans quand son père Ali 32ans ; Dans combien d'années l'âge de Ali sera-t-il le double de l'âge de Amin **?**

Solution : Soit x le nombre d'années cherché

Après x années l'âge d'Amin devient : $x+12$ ans

Puisque l'âge d'Ali sera le double de celui d'Amin

On a : $x+32=2(x+12)$

Équivaut à : $x+32=2x+24$ c'est-à-dire : $x=8$

Donc : après 8 années Amin aura : $8+12=20$ ans

Et son père Ali aura : $8+32=40$ ans

(le double de l'âge de Amin)

II) Les inéquations du premier degré à une inconnue.

a) Le signe du binôme $ax+b$ $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

Exemples :1) Etudions le signe de : $3x+6$ (coefficient de x positif)

$3x+6$ Équivalent à : $x=-2$

$3x+6>0$ Équivalent à : $x>-2$

$3x+6<0$ Équivalent à : $x<-2$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

2) Etudions le signe de : $-2x+12$ (coefficient de x négatif)

$-2x+12$ Équivalent à : $x=6$

$-2x+12>0$ Équivalent à : $x<6$

$-2x+12<0$ Équivalent à : $x>6$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

Résumé : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

b) Solution de l'inéquation du premier degré a une inconnue

Définition : On appelle inéquations du premier degré a une inconnue toute inéquation de la forme : $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b>0$ où les coefficients *a*, *b* sont des réels donnés et x est l'inconnue

Résoudre l'inéquation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : S

Applications : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$

3) $4x^2-9\geq 0$ 4) $(1-x)(2x+4)>0$ 5) $(3-6x)(x+2)\leq 0$

Solution : 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ Équivalent à : $x=6$ $-2=a$ et $a<0$ coefficient de x négatif

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$-2x+12$		$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]-\infty;6\right[$

2) $5x-15\le 0$

$5x-15=0$ Équivalent à : $x=3$ $5=a$ et $a>0$ coefficient de x positif

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$5x-15$		$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;3\right[$

3) $4x^2-9\ge 0$

$4x^2-9=0$ Équivalent à : $(2x)^2-3^2=0$ ssi $(2x-3)(2x+3)=0$

Équivalent à $2x+3=0$ ou $2x-3=0$

ssi $x=\frac{-3}{2}$ ou $x=\frac{3}{2}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-3/2$		$3/2$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ Équivalent à :

$2x+4=0$ ou $1-x=0$ Équivalent à : $x=-2$ ou $x=1$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+4)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]-2;1\right[$

5) $(3-6x)(x+2)\le 0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur : 3 – 6*x* et x + 2.

3 – 6*x* = 0 ou *x* + 2 = 0 Équivalent à 6*x* = 3 ou *x* = -2

$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ou $x=-2$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est : $S=]-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice : Etudier le signe de : $3x+6$ et $-2x+24$

Solution : a) $3x+6=0$ Équivalent à : $x=-2$
$3x+6>0$ Équivalent à : $x>-2$
$3x+6<0$ Équivalent à : $x<-2$
On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant : (Coefficient de a positif) $a=3$
(à droite le signe de $a=3$)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$	

b) le signe de : $-2x+24$ (Coefficient de a négatif) $a=-2$
$-2x+24=0$ Équivalent à : $x=12$
On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant : (à droite le signe de $a=-2$)

x	$-\infty$		12		$+\infty$
$-2x+24$		$+$	0	$-$	

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $-2x+6>0$ 2) $-6x+7>x-7$
Solution : 1) $-2x+6\succ 0$ $-2x+12=0$ Équivalent à : $x=6$
Et $-2=a$ on a : $a<0$ (coefficient de x négatif)
On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

Donc : $S=]-\infty;3[$
2) $-6x+7>x-7$ équivalent à : $-7x>-14$
Équivalent à : $x<\frac{-14}{-7}$ donc : $x<2$
L'ensemble de solution est alors : $S=]-\infty;2[$

Exercice : Un camion pesant à vide 2,5 tonnes doit passer sur un pont limiter à 10 tonnes
Combien de caisses de 400kg peut-il transporter ?
Solution : Soit x le nombre de caisses à transporter
Le chargement du camion est donc : $2500+400x\ kg$
Le poids du camion ne doit pas dépasser 10000
Cela implique : $2500+400x\leq 10000$
Équivalent à : $25+4x\leq 100$ c'est-à-dire : $4x\leq 75$ C'est-à-dire : $x\leq\frac{75}{4}=18,75$
Le nombre de caisses à transporter ne doit pas dépasser 18 caisses