

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

0.25 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

0.5 b) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

0.5 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

0.25 1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0.25 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

0.5 b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

0.5 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

0.5 b) Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 (4 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points

A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 1) Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

0.75 2) a) Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z

en un point M' d'affixe z' . On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

0.5 a) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') = \frac{-\pi}{12} [2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

0.5 b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O , A'' et B sont alignés.

0.5 c) Montrer que b' , l'affixe du point B' , vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

0.5 d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro »

0.5 2) Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'évènement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

0.5 3) Calculer $p(A \cap B)$

0.5 4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.



Problème (8 points) :

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur \mathbb{R} par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

- 0.5 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v
- 0.25 2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de \mathbb{R}
- 0.5 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u) , la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

- 0.25 1) a) Vérifier que f est définie sur \mathbb{R}
- 0.5 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$
- 0.5 c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 0.25 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 0.5 b) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$
- 0.75 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$
- 0.5 3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$
- 0.5 b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variations de f sur \mathbb{R}
- 0.75 c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -1, 0[$
- 4) La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
- 0.5 a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .
- 0.5 b) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$
- 5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$
- 0.5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)
- 0.75 b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

