↔

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا المسالك الدولية الدورة العادية 2023	
NS 22F	الموضوع	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

0.25 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

0.5 b) En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d\left(B,(AC)\right)$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 a) Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

0.5 b) En déduire que $d\left(\Omega,(ABC)\right)=3$.

3) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

0.5 a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

0.5 b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

0.5 4) Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\overline{b}$ et $d=2i$

0.25 1) Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

0.25 2) a) Vérifier que $b-d=c$

0.5 b) Montrer que $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

0.25 3) a) Vérifier que $ac=2b$

0.5 b) En déduire que $2arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

0.25 a) Montrer que $z'=\frac{1}{2}az$

0.5 b) En déduire que $R(C)=B$ et que $R(A)=D$

0.5 c) Montrer que $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 3 (3points) :

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : $0\,;0\,;1\,;1\,;1\,;2$ et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres: $1\,;1\,;1\,;2\,;2$.
On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :
« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

A : "la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1"

B : "le produit ab est égal à 2"

0.5 1) a) Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A .

0.5 b) Montrer que $p(B)=\frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

0.75 2) Calculer $p\left(A/B\right)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 a) Montrer que $p(X=0)=\frac{1}{3}$

0.5 b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

0.5 c) On considère les événements :

M : " le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

Problème (11points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par $f\left(x\right)=2-\frac{2}{x}+\left(1-\ln x\right)^2$

Soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1\,cm$).

0.25 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$: $f\left(x\right)=\frac{3x-2-2x\ln x+x\left(\ln x\right)^2}{x}$

0.5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} x\left(\ln x\right)^2=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)^2}{x}=0$ (On peut poser : $t=\sqrt{x}$)

0.5 c) Déduire que $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

0.75 d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

0.5 2) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$: $f'(x)=\frac{2\left(1-x+x\ln x\right)}{x^2}$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$:

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f'(\beta)$	$\searrow$	0

(On donne $\beta \approx 4.9$)

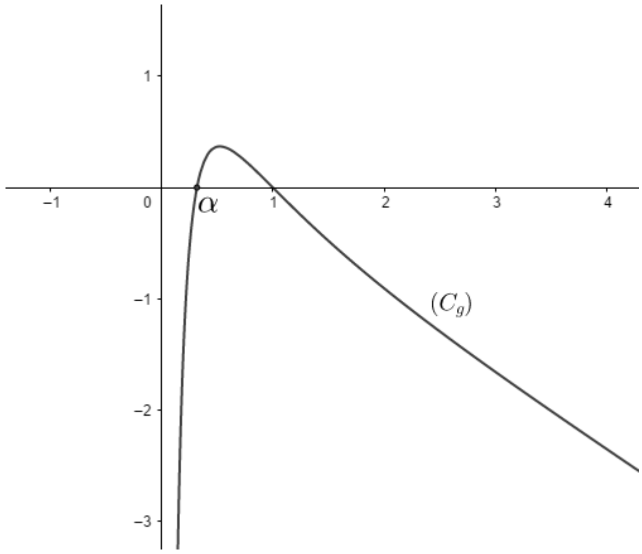
0.5 a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f

0.5 b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0,+\infty[$

1 c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.

4) La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.



0.5 a) A partir de la courbe (C_g), déterminer le signe de la fonction g sur $]0,+\infty[$

0.5 b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha,1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$

1.5 5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prend : $\alpha \approx 0.3$, $\beta \approx 4.9$ et $f(\beta) \approx 1.9$)

0.5 6) a) Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha,1]$

1 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{\alpha}^{1} (1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha) + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

0.75 c) Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

7) Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha,1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 a) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)

0.75 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.