Correction d'examen national normale math 2024 science PC et SVT

Correction proposée par **Youssef SEMHI** | Contact : 0644127117 *monstremath.com* | Email : semhi.aka@gmail.com

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$$

1)

a) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 4 - 6}{1 + u_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 4}{1 + u_n} - \frac{6}{1 + u_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{4(u_n + 1)}{1 + u_n} - \frac{6}{1 + u_n}$$

$$u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$$

b) Pour $n = 0$ on a $u_0 = 4$ donc : $2 \leq u_0 \leq 4$

On suppose que $2 \leq u_n \leq 4$ et on montre que : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$. D'après l'hypothèse :

$$2 \leq u_n \leq 4$$

$$3 \leq u_n + 1 \leq 5$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{5} \leq \frac{6}{u_n + 1} \leq \frac{6}{3}$$

$$-\frac{6}{3} \leq -\frac{6}{u_n + 1} \leq -\frac{6}{5}$$

$$-2 \leq -\frac{6}{u_n + 1} \leq -\frac{6}{5}$$

$$4 - 2 \leq 4 - \frac{6}{u_n + 1} \leq 4 - \frac{6}{5}$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq \frac{14}{5}$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq \frac{14}{5} \leq 4$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 4$$

Donc d'après principe de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,;\, 2 \leq u_n \leq 4$

2)

a) On a pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n} - \frac{u_n(u_n + 1)}{u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n(u_n + 1)}{1 + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - {u_n}^2 - u_n}{1 + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 2 - {u_n}^2}{1 + u_n}$$

Et on a :

$$\frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n} = \frac{2u_n - 2 - {u_n}^2 + u_n}{1 + u_n}$$

$$\frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n} = \frac{u_n - 2 - {u_n}^2}{1 + u_n}$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$$

b) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$$

Et on a $u_n \geq 2$, alors $u_n - 1 \geq 1$ donc, $u_n - 1 \geq 0$

Et : $-u_n \leq -2$ alors $2 - u_n \leq -2$

Donc :

$$\frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n} \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante, est puisqu'elle est minorée par 2 alors elle est convergente.

3) Pour tout entier n : $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$

a) On a pour tout entier n :

$$v_{n+1} = \frac{2 - u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{2 - \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}}{1 - \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2 + 2u_n}{1 + u_n} - \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}}{\frac{1 + u_n}{1 + u_n} - \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2 + 2u_n - 4u_n + 2}{1 + u_n}}{\frac{1 + u_n - 4u_n + 2}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4 - 2u_n}{1 + u_n}}{\frac{3 - 3u_n}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{3(1 - u_n)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2-u_n}{1-u_n}\right)$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

b) On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier therme $v_0 = \frac{2-u_0}{1-u_0} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$

Donc pour tout entier n :

$$v_n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Donc pour tout entier n :

$$v_n(1-u_n) = 2-u_n$$
$$v_n - v_n u_n = 2-u_n$$
$$u_n - v_n u_n = 2-v_n$$
$$u_n(1-v_n) = 2-v_n$$
$$u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n}$$
$$u_n = \frac{1-v_n+1}{1-v_n}$$
$$u_n = \frac{1-v_n}{1-v_n} + \frac{1}{1-v_n}$$
$$u_n = 1 + \frac{1}{1-v_n}$$
$$u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

c) Puisque : $0 \leq \frac{2}{3} < 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + \frac{1}{1-0} = 2$$

Exercice 2 :

1) On a le plane (P) passe par A et le vecteur $\vec{n}(2,-2,1)$ perpendiculaire à lui alors :

$$(P): 2x - 2y + z + d = 0$$

Et puisque A appartient à (P) alors :

$$2x_A - 2y_A + z_A + d = 0$$
$$-2 - 1 + d = 0$$
$$d = 3$$

Alors :

$$(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$$

2) On a $\Omega(2,-1,0)$ le centre de la sphère (S) et $R = 5$ le rayon de la sphère alors :

$$(S):\ (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 + (z-z_\Omega)^2 = R^2$$
$$(S):\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$
$$(S):\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 25$$
$$(S):\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 1 + 4 - 25 = 0$$
$$(S):\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

3)

a) On a :

$$d(\Omega;(\mathrm{P})) = \frac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$
$$d(\Omega;(\mathrm{P})) = \frac{|4 + 2 + 0 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$
$$d(\Omega;(\mathrm{P})) = \frac{|9|}{\sqrt{3}}$$
$$d(\Omega;(\mathrm{P})) = 3$$

b) On a : $d(\Omega;(\mathrm{P})) = 3 < \mathrm{R}$ alors le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon :
$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$
$$r = \sqrt{5^2 - 3^2}$$
$$r = \sqrt{25 - 9}$$
$$r = \sqrt{16}$$
$$r = 4$$

4)

a) On a (Δ) une droite passe par Ω et perpendiculaire a (P) alors la vecteur $\vec{n}$ est une vecteur directeur de la droite (Δ) alors :
$$(\Delta) : \begin{cases} x = at + x_\Omega \\ y = bt + y_\Omega \\ z = ct + z_\Omega \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = 1t + 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) On a (Δ) passe par Ω et perpendiculaire à (P) et (P) coupe (S) suivant le cercle (Γ) donc la projection de Ω sur (P) est le point H tell que :
$$\begin{cases} x_H = 2t + 2 \\ y_H = -2t - 1 \\ z_H = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad et \qquad 2x_H - 2y_H + z_H = 0$$
Donc : $2(2t + 2) - 2(-2t - 1) + t = 0$. Alors : $t = -1$,alors :
$$\begin{cases} x_H = 2(-1) + 2 \\ y_H = -2(-1) - 1 \\ z_H = (-1) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$$
Donc $H(0\,,1,-1)$ est le centre de (Γ)

c) On a :
$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$
$$\overrightarrow{AB}(1 + 1\,, 2 - 0\,, -1 + 1)$$
$$\overrightarrow{AB}(2\,,2\,,0)$$
Donc :
$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2 \times 2 + 2 \times (-2) + 1 \times 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 4 - 4 = 0$$
Alors (AB) et (Δ) perpendiculaire, et on les coordonnées de milieu du segment $[AB]$ sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - 1}{2} \\ y = \dfrac{2 + 0}{2} \\ z = \dfrac{-1 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Donc H est le milieu de $[AB]$ et puisque H appatient à (Δ) alors (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 :

1) On a :

$$a = \sqrt{3}(1 - i)$$
$$|a| = |\sqrt{3}(1 - i)|$$
$$|a| = \sqrt{3}|(1 - i)|$$
$$|a| = \sqrt{3} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$|a| = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$
$$|a| = \sqrt{6}$$

Et :

$$a = \sqrt{3}(1 - i)$$
$$a = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$
$$\arg(a) = \frac{-\pi}{4}$$

2)

a) On a :

$$\frac{b}{a} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - \sqrt{3}i}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - \sqrt{3}i}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + \sqrt{3}i)}{(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + \sqrt{3}i)}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3} + 3 + 2i\sqrt{3} + 3i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3 + 3}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3}i + 3i}{6}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3} + 3}{6} + \frac{3\sqrt{3} + 3}{6}i$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+3}{6}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}i\right)$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) On a :
$$\arg(a)=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$$
Et :
$$\arg\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
Alors :
$$\arg(b)-\arg(a)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\arg(b)-\frac{-\pi}{4}=\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\arg(b)=\frac{\pi}{3}+\frac{-\pi}{4}[2\pi]$$
$$\arg(b)=\frac{\pi}{12}[2\pi]$$
Et :
$$\arg(b^{24})=24\times\frac{\pi}{12}[2\pi]$$
$$\arg(b^{24})=2\pi[2\pi]$$
$$\arg(b^{24})=0[2\pi]$$
Donc : $b^{24}\in\mathbb{R}$

3)

a) On a :
$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$
$$z'-0=e^{i\frac{\pi}{6}}(z-0)$$
$$z'=ze^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z'=z\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$z'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$$
Alors :
$$R(A)=A'$$
$$a'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)a$$
$$a'=\frac{(\sqrt{3}+i)}{2}a$$
$$\arg(a')=\arg\left(\frac{(\sqrt{3}+i)}{2}\right)+\arg(a)\ [2\pi]$$
$$\arg(a')=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

$$\arg(a') = -\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

b) On a :

$$R(A') = A''$$
$$a'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)a'$$
$$a'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \times \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)a$$
$$a'' = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^2 a$$
$$|a''| = \left|\frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^2 a\right|$$
$$|a''| = \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^2\right||a|$$
$$|a''| = 1 \times \sqrt{6}$$
$$|a''| = \sqrt{6}$$
$$\arg(a'') = \arg\left(\frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^2 a\right)$$
$$\arg(a'') = \arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^2\right) + \arg(a)\ [2\pi]$$
$$\arg(a'') = 2\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) + \arg(a)\ [2\pi]$$
$$\arg(a'') = 2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$
$$\arg(a'') = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$
$$\arg(a'') = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$

Donc :

$$a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Et on a :

$$\arg\left(\frac{b-0}{a''-0}\right) = \arg\left(\frac{b}{a''}\right)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{b-0}{a''-0}\right) = \arg(b) - \arg(a'')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{b-0}{a''-0}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{b-0}{a''-0}\right) = 0\ [2\pi]$$
$$\frac{b-0}{a''-0} \in \mathbb{R}$$

Donc A'', B et O sont des points alignés

c) On a :

$$B' = R(B)$$
$$b' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)b$$
$$b' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}a$$

$$b' = a\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$b' = a\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$b' = a\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)i$$

$$b' = a\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i$$

$$b' = \sqrt{3}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i(1-i)$$

$$b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{3}(i+1)$$

$$b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$$

d) On a :

$$\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) = \arg\left(\frac{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)ia}{a}\right)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) = \arg\left(\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i\right)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) = \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)+\arg(i)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) = 0+\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Alors le triangle $AB'O$ est un triangle rectangle en O

Exercice 4 :

1) On a :

$$P(A) = \frac{C_4^2+C_2^2}{C_7^2}$$

$$P(A) = \frac{6+1}{21}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

2)

$$P(B) = \frac{C_2^2+C_1^1C_4^1}{21}$$

$$P(B) = \frac{1+4\times 1}{21} = \frac{5}{21}$$

$$P(B) = \frac{5}{21}$$

3)

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^2}{C_7^2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{21}$$

4)

$$P(A).P(B) = \frac{7}{21} \times \frac{5}{21}$$

$$P(A).P(B) = \frac{5}{63}$$

Alors :

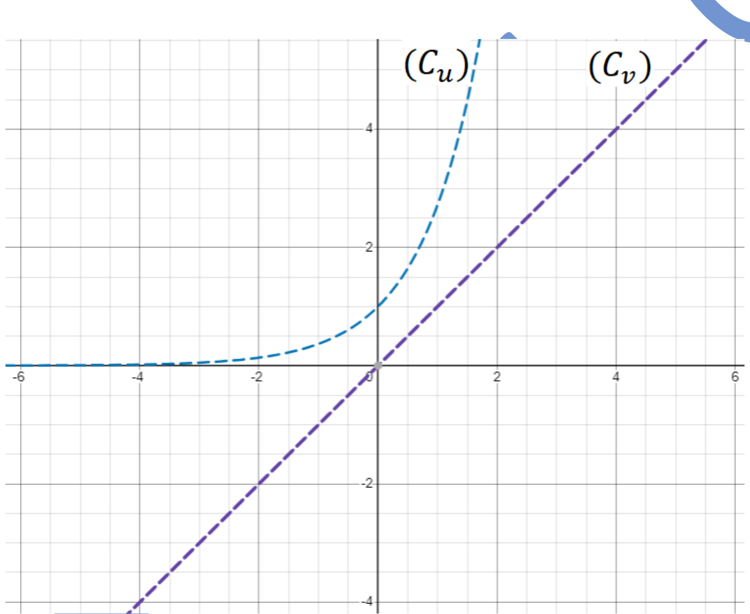
$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

Donc A et B ne sont pas indépendant

Problème :

Partie 1 :

1)



2) D'après les deux courbes précédents on a la courbe (C_u) est au-dessus de la courbes (C_v) alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} ;\ u(x) > v(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ;\ e^x > x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ;\ e^x - x > 0$$

3) Calculons l'intégrale suivant :

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^1 - \frac{1}{2} \times 1^2\right] - \left[e^0 - \frac{1}{2} \times 0^2\right]$$

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = e - \frac{1}{2} - 1$$

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = e - \frac{3}{2}$$

Donc l'aire est :

$$A = e - \frac{3}{2}\ ua$$

Partie 2

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

1)

a) Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x - x > 0$ alors $D_f = \mathbb{R}$

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln\left(e^x(1 - xe^{-x})\right)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x) - \ln(1 - xe^{-x})$$
$$f(x) = x + 1 - x - \ln(1 - xe^{-x})$$
$$f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

c) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

Changement de variable $y = -x$, lorsque $x \to +\infty$ on a : $y \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} 1 - \ln(1 + ye^y)$$

Puisque $\lim_{y\to-\infty} ye^y = 0$, alors :

$$\lim_{y\to-\infty} 1 - \ln(1 + ye^y) = 1 - \ln(1+0) = 1 - \ln(1) = 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Interprétation géométrique : la courbe (C_f) de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

2)

a) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

Changement de variable $y = -x$, lorsque $x \to -\infty$ on a : $y \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} 1 - \ln(1 + ye^y)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) Pour tout $x < 0$:

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln\left(-x\left(\frac{e^x}{-x} + 1\right)\right)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(\frac{e^x}{-x} + 1\right)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 + \frac{e^x}{-x}\right)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$$
$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

c) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{-\ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

Et on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{xe^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{e^{x}}{x}=0$$

Alors :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

Et on a :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}x+1-\ln(e^{x}-x)-x$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}1-\ln(e^{x}-x)$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{y\to+\infty}1-\ln(e^{-y}+y)$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=-\infty$$

Interprétation géométrique : la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée par la droite d'équation $y = x$ au voisinage de :

3)

a) On a $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$f'=(x+1-\ln(e^{x}-x))'$$
$$f'=1-\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$$
$$f'=\frac{e^{x}-x}{e^{x}-x}-\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$$
$$f'=\frac{e^{x}-x-e^{x}+1}{e^{x}-x}$$
$$f'=\frac{1-x}{e^{x}-x}$$

b) On a $\forall x\in\mathbb{R}$; $e^{x}-x>0$ alors le signe de f' c'est le signe de $1-x$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	1

c) On a :

f fonction continue dur $\mathbb{R}$ alors il est continue sur $]-1,0[$

f fonction strictement croissante sur $]-1,0[$

$f(-1)=-\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)<0$

$f(0)=1>0$

Donc : $f(-1)\times f(0)<0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1,0[$

4)

a) D'après la représentation graphique on voit que la courbe coupe la droite en deux points distincts d'abscisse α et β , donc deux solutions pour l'équation $f(x) = x$.

b) On a :

$$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha-\beta$$

$$1+\alpha-\ln(e^{\alpha}-\alpha)-1-\beta+\ln\left(e^{\beta}-\beta\right)=\alpha-\beta$$
$$-\ln(e^{\alpha}-\alpha)+\ln\left(e^{\beta}-\beta\right)=0$$
$$\ln\left(\frac{e^{\beta}-\beta}{e^{\alpha}-\alpha}\right)=0$$
$$\frac{e^{\beta}-\beta}{e^{\alpha}-\alpha}=1$$
$$e^{\beta}-\beta=e^{\alpha}-\alpha$$
$$e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$$

5)

a) On a :

La fonction g est continue sur $]-\infty\,;1]$

La fonction g est strictement croissant sur $]-\infty\,;1]$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} sur l'intervalle J, telle que :

$$J=g(I)$$
$$J=g(]-\infty\,;1])$$
$$J=\left]\lim_{x\to-\infty}g(x)\;;g(1)\right]$$
$$J=]-\infty\,;2-\ln(e-1)]$$

b) On $g(0)=1$

Et on a $g'(0)=\frac{1-0}{1-0}=1\neq 0$

Donc g^{-1} est dérivable en 1 :

$$(g^{-1}(1))'=\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$
$$(g^{-1}(1))'=\frac{1}{g'(0)}$$
$$(g^{-1}(1))'=\frac{1}{1}$$
$$(g^{-1}(1))'=1$$