Exercice 1 (2 points)

1 (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x}-4e^{x}+3=0$ **(0.5pt)**

$$\begin{aligned}
e^{2x}-4e^{x}+3=0 &\Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}+4-1=0\\
&\Leftrightarrow (e^{x}-2)^2-1=0\\
&\Leftrightarrow (e^{x}-2-1)(e^{x}-2+1)=0\\
&\Leftrightarrow (e^{x}-3)(e^{x}-1)=0\\
&\Leftrightarrow e^{x}-3=0 \quad \text{ou} \quad e^{x}-1=0\\
&\Leftrightarrow e^{x}=3 \quad \text{ou} \quad e^{x}=1\\
&\Leftrightarrow x=\ln 3 \quad \text{ou} \quad x=\ln 1=0
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{S_1=\left\{0;\ln 3\right\}}$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$ **(0.5pt)**

Le signe de $e^{2x}-4e^{x}+3$ est le même que le signe de x^2-4x+3, alors on a :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$e^{2x}-4e^{x}+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0 \Leftrightarrow x\in[0;\ln 3]$

D'où l'ensemble des solutions de cette inéquations est : $\boxed{S_2=\left[0;\ln 3\right]}$

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$ **(0.5pt)**

On a : $e^{2x}-1=(e^{x})^2-1=(e^{x}+1)(e^{x}-1)$ et $e^{2x}-4e^{x}+3=(e^{x}-3)(e^{x}-1)$, donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-3)(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-3}{e^{x}+1}\\
&= \frac{1-3}{1+1}\\
&= \frac{-2}{2}\\
&= -1
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=-1}$

2 Montrer que l'équation $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$ **(0.5pt)**

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^{2x}+e^{x}+4x$.

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, car somme, composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Comme : $\begin{cases} h(-1)=\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e}-4=\dfrac{1+e-4e}{e^2}\approx -0.96<0 \\ h(0)=1+1+0=2>0 \end{cases}$, alors $h(-1)\times h(0)<0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h admet une solution dans $[-1,0]$

Exercice 2 (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Calculer u_1 **(0.25pt)**

$$u_1=\frac{u_0}{3-2u_0}=\frac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

D'où : $u_1=\dfrac{1}{4}$

2 Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ **(0.5pt)**

- Pour $n=0$, on a $u_0=\dfrac{1}{2}$, alors : $0<u_0\leq\dfrac{1}{2}$
- Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ et montrons que $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$.

  On sait (par hypothèse de récurrence) :

$$\begin{aligned} 0<u_n\leq\frac{1}{2} &\Leftrightarrow -1<-2u_n\leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2<3-2u_n\leq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{3-2u_n}\leq\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0\times\frac{1}{3}<u_n\times\frac{1}{3-2u_n}\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0<\frac{u_n}{3-2u_n}\leq\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0<u_{n+1}\leq\frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$

3 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$ **(0.5pt)**

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{u_n}=\frac{u_n}{3-2u_n}\times\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3-2u_n}$$

D'après la question (2), on a :

$$\begin{aligned}0 < u_n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < -2u_n \leq 0 \Leftrightarrow 2 < 3 - 2u_n \leq 3\\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}}$

b En déduire la monotonie de la suite (u_n) **(0.5pt)**

D'après la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$

D'où : **la suite (u_n) est décroissante.**

4 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n) **(0.75pt)**

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{1}{2}$, alors : $0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$
- Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

  On sait (par hypothèse de récurrence et la question $3)a)$) :

$$\begin{cases} 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, et puisque : $0 < \frac{1}{2} < 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$,

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

b On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$ **(0.5pt)**

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - 2u_n = 3$

Puisque la fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$ et que $3 \in]0; +\infty[$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \ln(3 - 2u_n) = \ln\left(\lim_{n \to +\infty} 3 - 2u_n\right) = \ln 3$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ln 3}$

5 ⓐ Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$ **(0.5pt)**

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3-2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3-2u_n-u_n}{u_n} = \frac{3-3u_n}{u_n} = 3\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

D'où : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)}$

ⓑ En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$ **(0.5pt)**

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$ et $\dfrac{1}{u_n} - 1 \neq 0$,

Donc (par le produit télescopique) :

$$\otimes \begin{cases} \cancel{\dfrac{1}{u_1} - 1} = 3\left(\dfrac{1}{u_0} - 1\right) \\ \cancel{\dfrac{1}{u_2} - 1} = 3\cancel{\left(\dfrac{1}{u_1} - 1\right)} \\ \quad\vdots \\ \cancel{\dfrac{1}{u_{n-1}} - 1} = 3\cancel{\left(\dfrac{1}{u_{n-2}} - 1\right)} \\ \dfrac{1}{u_n} - 1 = 3\cancel{\left(\dfrac{1}{u_{n-1}} - 1\right)} \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n\left(\frac{1}{u_0} - 1\right) = 3^n(2-1) = 3^n \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 3^n + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3^n+1}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \dfrac{1}{3^n+1}}$

Exercice 3 (5 points)

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ **(0.75pt)**

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4 \times 1 = 3 - 4 = -1 = i^2$$

Donc l'équation admet deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \;;\; z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions de équation est : $\boxed{S = \left\{\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}; \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}}$

2 Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ⓐ Écrire a sous forme algébrique. **(0.25pt)**

$$\boxed{a = e^{i\dfrac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

b Vérifier que $\bar{a}b=\sqrt{3}$ **(0.5pt)**

$$\overline{a}b=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\cancel{\frac{3}{4}i}-\cancel{\frac{3}{4}i}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$

D'où : $\overline{a}b=\sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives a,b et $\bar{a}$.

3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport. **(0.5pt)**

On a $|a|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1$ et d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\overline{a}b=\sqrt{3} &\Leftrightarrow \overline{a}ab=\sqrt{3}a\\ &\Leftrightarrow |a|^2b=\sqrt{3}a\\ &\Leftrightarrow b=\sqrt{3}a\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\sqrt{3}\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

D'où : le point B est l'image du point A par l'homothétie h de centre O et de rapport $\sqrt{3}$

4 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a Écrire z' en fonction de z et a. **(0.5pt)**

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z_{M'}-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M-z_A)\\ &\Leftrightarrow z'-a=i(z-a)\\ &\Leftrightarrow z'=i(z-a)+a\end{aligned}$$

D'où : $z'=i(z-a)+a$

b Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d=a+1$ **(0.25pt)**

$$\begin{aligned}R(C)=D &\Leftrightarrow d=i(\overline{a}-a)+a\\ &\Leftrightarrow d=i(-2i\mathrm{Im}a)+a\\ &\Leftrightarrow d=-i\times 2i\times\frac{1}{2}+a\\ &\Leftrightarrow d=1+a\end{aligned}$$

D'où : $d=a+1$

c Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange. **(0.5pt)**

$$d-1=a\Leftrightarrow\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow ADIO \text{ est un parallélogramme } (1)$$

$$\begin{cases}OA=|a|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1\\ \\ OI=|z_I|=|1|=1\end{cases}\Rightarrow\ OA=OI\ \ (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que : $ADIO$ est un losange

5 (a) Vérifier que $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d-b$ **(0.75pt)**

$$\begin{aligned} d-b &= 1+a-b = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}-3}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) \end{aligned}$$

D'où : $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\left(1-i\right)$

$$\begin{aligned} d-b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) &\Leftrightarrow d-b=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\ &\Leftrightarrow d-b=\left(\sqrt{3}-1\right)e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{3}-1>0$, alors : $\arg(d-b)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$

(b) Écrire le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique. **(0.5pt)**

$$1-b=1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

D'où : $1-b=\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(c) Déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}})$ **(0.5pt)**

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)[2\pi] \equiv \arg(d-b)-\arg(1-b)\,[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv -\frac{3\pi}{12}-\frac{16\pi}{12}\,[2\pi] \equiv -\frac{19\pi}{12}\,[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

D'où : $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

Exercice 4 (9 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$ si $x>0$
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\left(\text{unité : } 1cm\right)$

1 Montrer que f est continue à droite au point 0. **(0.5pt)**

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2x=0$, alors :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} 2x\ln x-2x=\lim_{x\to0^+} 2(x\ln x-x)=2(0-0)=0=f(0)$$

D'où : la fonction f est continue à droite au point 0.

2 (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **(0.5pt)**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x \ln x - 2x) = \lim_{x \to +\infty} 2x (\ln x - 1)$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x (\ln x - 1) = +\infty$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5pt)**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x \ln x - 2x}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} 2 (\ln x - 1) = +\infty$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

D'où : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 (a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat. **(0.75pt)**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2x \ln x - 2x}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} 2 (\ln x - 1) = -\infty$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - 0}{x - 0} = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

D'où : la fonction f n'est pas dérivable à droite au point 0

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. **(0.5pt)**

La f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit des fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)' \ln x + 2x (\ln x)' - (2x)' \\ &= 2 \ln x + \frac{2x}{x} - 2 \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\left(\forall x \in]0, +\infty[\right); \quad f'(x) = 2 \ln x}$

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$ **(0.5pt)**

- Si $x \in]0, 1]$, alors $\ln x \leq 0$, alors $f'(x) \leq 0$, d'où f est décroissante sur $]0, 1]$
- Si $x \in [1, +\infty[$, alors $\ln x \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$, d'où f est croissante sur $[1, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$ **(0.5pt)**

Soient S_1 et S_2 les ensembles des solutions d'équations respectives $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow 2x\ln x-2x=0\\ &\Leftrightarrow 2x(\ln x-1)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \ln x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \ln x=1\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=e \end{aligned}$$

Puisque : $0\notin\ ]0,+\infty[$ et $e\in\ ]0,+\infty[$

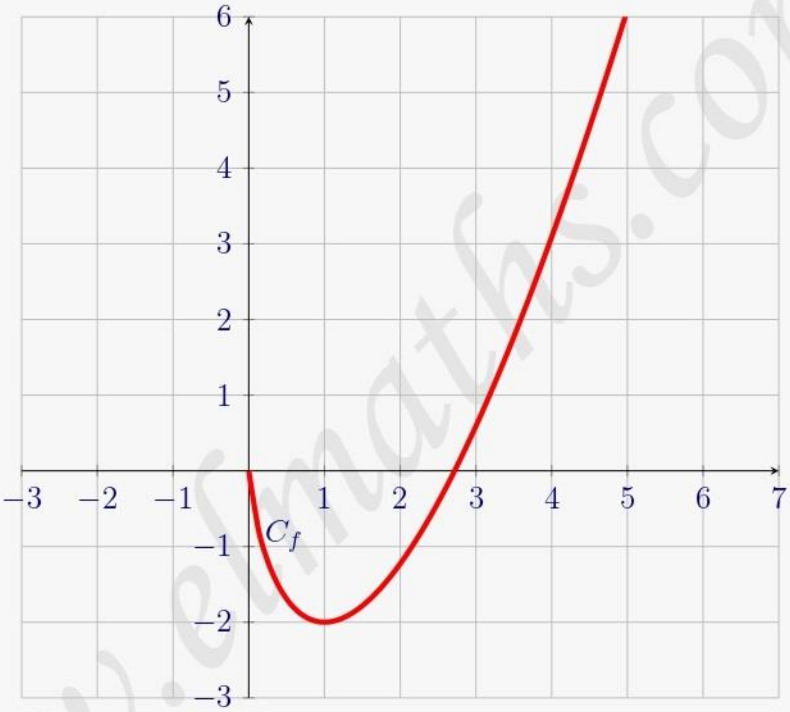
Alors : $\boxed{S_1=\left\{e\right\}}$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow 2x\ln x-2x=x\\ &\Leftrightarrow x(2\ln x-3)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2\ln x-3=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \ln x=\frac{3}{2}\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Puisque : $0\notin\ ]0,+\infty[$ et $e^{\frac{3}{2}}\in\ ]0,+\infty[$

Alors : $\boxed{S_2=\left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}}$

b Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4.5$) **(1pt)**



5 **a** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x\ln x dx=\frac{1+e^2}{4}$ **(0.5pt)**

Par la méthode d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^e x\ln x dx &= \int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\ln x dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx\\ &=\frac{1}{2}e^2\ln e-\frac{1}{2}e^1\ln 1-\int_1^e\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e\\ &=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\times 1^2\right]=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\\ &=\frac{2e^2-e^2+1}{4}=\frac{1+e^2}{4} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\int_1^e x\ln x dx=\frac{1+e^2}{4}}$

b En déduire : $\int_1^e f(x)dx$ **(0.5pt)**

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e 2x\ln x - 2xdx \\ &= 2\int_1^e x\ln xdx - \int_1^e 2xdx \\ &= 2\times\frac{1+e^2}{4} - \left[x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1+e^2}{2} - \left[e^2 - 1^2\right] \\ &= \frac{1+e^2}{2} - \frac{2e^2}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{1+e^2-2e^2+2}{2} \\ &= \frac{3-e^2}{2}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\int_1^e f(x)dx = \frac{3-e^2}{2}}$

6 **a** Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$ **(0.25pt)**

La fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$,
donc f admet un minimum au point 1 est $f(1) = -2$,
d'où : $\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } -2}$

b En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$ **(0.5pt)**

Pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) \geq \min_{x\in]0,+\infty[} f(x) &\Leftrightarrow 2x\ln x - 2x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x\ln x - x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x\ln x \geq x - 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x} \quad \left(\text{car } x > 0\right)\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), \quad \ln x \geq \frac{x-1}{x}}$

7 Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

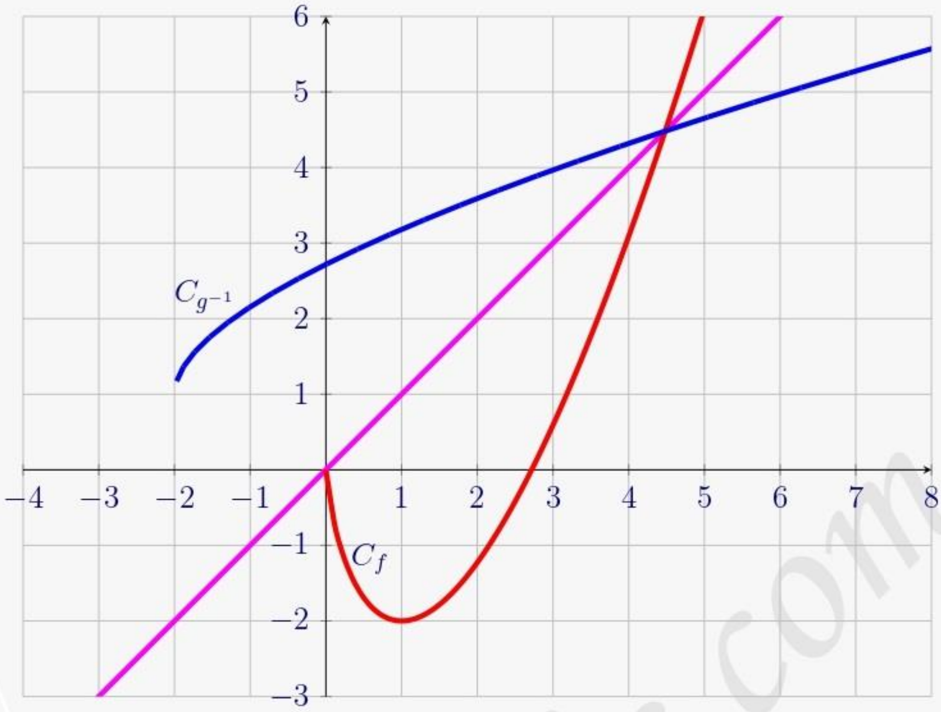
a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera. **(0.5pt)**

Pour tout x de $[1,+\infty[$, la fonction f est continue, dérivable et strictement croissante.
Alors g est continue, dérivable et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Donc : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet une fonction réciproque } g^{-1} \text{ définie sur un intervalle } J}$

Avec : $\boxed{J = f\left(\left[1,+\infty\right[\right) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[-2,+\infty\right[}$

(b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} **(0.75pt)**



8 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; \quad x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x & ; \quad x > 0 \end{cases}$

(a) Étudier la continuité de h au point 0. **(0.5pt)**

On a : $h(0) = 0^3 + 3\times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, alors :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x - 2x = 2\times 0 - 2\times 0 = 0 = h(0)$$

D'où : la fonction h est continue au point 0

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5pt)**

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2+3 = 3$$

Donc : h est dérivable à gauche au point 0 et on a $h_g{}'(0) = 3$

D'où : la courbe de h admet une demi-tangente à gauche au point 0 d'équation $y = 3x$

(c) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier. **(0.25pt)**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln x - 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\ln x - 2 = -\infty$$

Donc h n'est pas dérivable à droite au point 0

D'où : h n'est pas dérivable au point 0