Corrigé Examen Nat 2011

Session de rattrapage

Mathématiques

Niveau : 2Bac-PC-SVT
Durée : 3 heures
Coef : 7

Exercice 1 (2.5 points)

1 (a) Le discriminant Δ de l'équation $x^2+4x-5=0$ est :

$$\Delta = 4^2 - 4\times(-5) = 16+20 = 36$$

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$
$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$$

D'où : $\boxed{S_1 = \{-5;1\}}$

(b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-3-2e^x}{e^x} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

On pose : $t = e^x$, on a :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -1 \ ou \ t = 3$$

Puisque pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $e^x > 0$, alors $t > 0$, donc $t = 3$, alors $e^x = 3$, d'où $x = \ln 3$.

D'où : $\boxed{S_2 = \{\ln 3\}}$

2 La fonction : $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors :

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \geq e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow x+1 \geq -x$$
$$\Leftrightarrow 2x \geq -1$$
$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

alors : $\boxed{S_3 = \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[}$

Exercice 2 (4 points)

1 Le discriminant Δ de l'équation $z^2 - 6z + 18 = 0$ est :

$$\Delta = (-6)^2 - 4\times 18 = -36 = (6i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$$
$$z_2 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i$$

D'où : $S = \left\{3-3i ; 3+3i\right\}$

2 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B d'affixes respectives : $a = 3+3i$ et $b = 3-3i$.

(a) On a :

$$\boxed{a = 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\boxed{a = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

(b) B' est l'image de B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$ signifie que : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$, alors :

$$b' - b = a - 0$$
$$b' = a + b$$
$$b' = 3+3i+3-3i$$
$$b' = 6$$

Alors : l'affixe de B' est 6

(c) On a :

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i} = \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1^2-i^2}$$
$$= \frac{2i}{2} = \boxed{i}$$

Alors :

$$\left(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_{B'}}{z_A - z_{B'}}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg(i) [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le triangle $AB'B$ est rectangle en B', et on a :

$$\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = |i| \Leftrightarrow \left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow |b-b'| = |a-b'|$$
$$\Leftrightarrow B'B = B'A$$

Donc le triangle $AB'B$ est isocèle en B'.

D'où : $AB'B$ est un triangle rectangle isocèle en B'

ⓓ B' est l'image de B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$ signifie que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BB'}$, alors $OAB'B$ est un parallélogramme, comme $B'A = B'B$, alors $OAB'B$ est un losange, puisque $\left(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, d'où : $\boxed{OAB'B \text{ est un carré}}$

Exercice 3 (3.5 points)

www.elmaths.com

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1+15u_n} - \frac{1}{3} = \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3\,(15u_n+1)} = \frac{3u_n - 1}{3\,(15u_n+1)} = \frac{\frac{3u_n}{3} - \frac{1}{3}}{15u_n+1} = \boxed{\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n+1}}$$

2 Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1 > \dfrac{1}{3}$

Supposons que : $u_n > \dfrac{1}{3}$ et montrons que $u_{n+1} > \dfrac{1}{3}$.

On a :

$$u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} u_n - \frac{1}{3} > 0 \\ 15u_n + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n+1} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > \frac{1}{3}}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence : $\boxed{u_n > \dfrac{1}{3}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

3 On pose : $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

ⓐ On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1+15u_n}{6u_n} = 1 - \frac{1}{18u_n} - \frac{15u_n}{18u_n} \\ &= 1 - \frac{5}{6} - \frac{1}{18u_n} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18u_n} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{6}v_n} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{6}}$

On a donc : $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$ et comme :

$$v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

D'où : $\boxed{v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3\left(1 - v_n\right)} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)} \\ &\Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{6} < 1$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

D'où : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}}$

Exercice 4 (10 points)

Partie I : On considère la fonction g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$.

1 (a) Pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - 0 + \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in I); \quad g'(x) = \frac{x+1}{x}}$

(b) Pour tout x de I, on a : $x > 0$ et $x + 1 > 0$, alors $\frac{x+1}{x} > 0$, d'où : $(\forall x \in I); \quad g'(x) > 0$.

D'où : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est croissante sur }]0; +\infty[}$

2 On a $g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$. Puisque g est croissante sur I, alors :

Si $x \geq 1$, alors $g(x) \geq g(1)$, alors $g(x) \geq 0$.

Si $0 < x \leq 1$, alors $g(x) \leq g(1)$, alors $g(x) \leq 0$.

Finalement : $\boxed{g(x) \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[\text{ et } g(x) \leq 0 \text{ sur }]0, 1]}$

Partie II : Soit f la fonction numérique définie sur I par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1 (a) Comme $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x \\ &= (-\infty)(-\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

Donc : $\boxed{(C) \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y=0 \text{ au voisinage de } +\infty}$

(b) Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln x - \frac{\ln x}{x} \\
&= +\infty - 0 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x} \\
&= 1\times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$

(c) Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors :

$\boxed{(C) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de } +\infty}$

2 (a) La fonction f est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)\ln x + \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{x-1}{x^2} \\
&= \frac{x-1+\ln x}{x^2} \\
&= \frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

d'où : $\boxed{(\forall x\in I) \; ; \; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$

(b) Pour tout x de $[1,+\infty[$ on a : $x^2>0$ et $g(x)\geq 0$, alors $\frac{g(x)}{x^2}\geq 0$, alors $f'(x)\geq 0$,

d'où : $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[}$

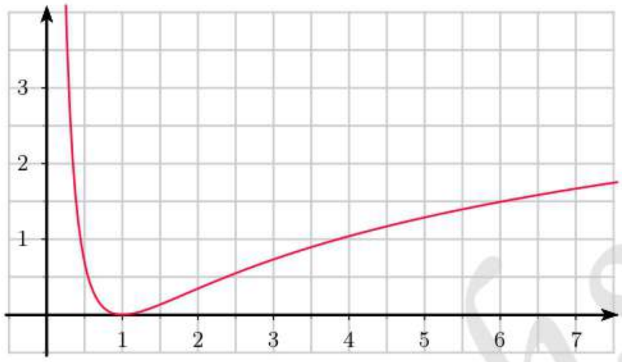
Pour tout x de $]0,1]$ on a : $x^2>0$ et $g(x)\leq 0$, alors $\frac{g(x)}{x^2}\leq 0$, alors $f'(x)\leq 0$,

d'où : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,1]}$

(c) Tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 La figure :



4 (a) La fonction H est continue dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc H est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I)\,;\ H'(x) = \frac{1}{2}\left(2\ln' x(\ln x)^{2-1}\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) = \frac{\ln x}{x} = h(x)$$

Donc H est une fonction primitive de la fonction h sur I.

(b) Puisque $[1,e] \subset I$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx &= \int_1^e h(x)dx \\
&= \Big[H(x)\Big]_1^e \\
&= H(e) - H(1) \\
&= \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{0}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}}$

(c) On pose, pour tout x de $[1,e]$: $u(x)=x$ et $v(x)=\ln x$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x dx &= \int_1^e u'(x)v(x)dx \\
&= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx \\
&= \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx \\
&= e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e 1dx \\
&= e - \Big[x\Big]_1^e \\
&= e-(e-1) \\
&= e-e+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\int_1^e \ln x dx = 1}$

5 (a) Pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x \\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x \\
&= \boxed{\ln x - \frac{\ln x}{x}}
\end{aligned}$$

(b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

D'après le tableau de variations de la fonction f, on a : $f(x)\geq 0$, pour tout x de I, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)|\,dx \\
&= \int_1^e f(x)\,dx \\
&= \int_1^e \ln x - \frac{\ln x}{x}dx \\
&= 1-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= 0,5 \text{ unité}^2
\end{aligned}$$

Comme $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, alors : $\text{unité}^2 = 1\text{cm}^2$, d'où : $\boxed{\mathcal{A} = 0,5\text{cm}^2}$