Exercice 1 (2.5 points)

www.elmaths.com

1 **a** Le discriminant Δ de l'équation $x^2+4x-5=0$ est :

$$\Delta = 4^2 - 4\times(-5) = 16+20 = 36$$

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$
$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$$

D'où : $\boxed{S_1 = \{-5;1\}}$

b Pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $2x>0$, $x+1>0$ et $x^2+5>0$, alors :

$$\begin{aligned}\ln(x^2+5) = \ln(x+2)+\ln(2x) &\Leftrightarrow \ln(x^2+5) = \ln(2x(x+2))\\ &\Leftrightarrow x^2+5 = 2x(x+2)\\ &\Leftrightarrow x^2+5 = 2x^2+4x\\ &\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\end{aligned}$$

D'après la question **1)a)**, on a : $x=-5$ ou $x=1$ et comme $x>0$, alors $x=1$

D'où : $\boxed{S_2 = \{1\}}$

2 Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'inéquation : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$.

Pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $x>0$, $x+1>0$ et $x^2+1>0$, alors :

$$\begin{aligned}\ln(x)+\ln(x+1) \geq \ln(x^2+1) &\Leftrightarrow \ln(x(x+1)) \geq \ln(x^2+1)\\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+x) \geq \ln(x^2+1)\end{aligned}$$

Puisque la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\begin{aligned}\ln(x^2+x) \geq \ln(x^2+1) &\Leftrightarrow x^2+x \geq x^2+1\\ &\Leftrightarrow x^2+x-x^2 \geq 1\\ &\Leftrightarrow x \geq 1\end{aligned}$$

Comme : $[1;+\infty[\subset]0;+\infty[$ alors : $\boxed{S_3 = [1;+\infty[}$

Exercice 2 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+8u_n}$ pour tout n et $\mathbb{N}$

1 Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1 > 0$

Supposons que : $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 5+8u_n > 5 \Rightarrow 5+8u_n > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5+8u_n} > 0 \Rightarrow \frac{u_n}{5+8u_n} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence : $u_n > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2 On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{5+8u_n}{u_n} + 2 \\ &= \frac{5}{u_n} + \frac{8u_n}{u_n} + 2 = \frac{5}{u_n} + 8 + 2 \\ &= \frac{5}{u_n} + 10 = 5\left(\frac{1}{u_n} + 2\right) \\ &= \boxed{5v_n} \end{aligned}$$

D'où : (v_n) est une suite géométrique de raison 5

On a donc : $v_n = v_0 \times 5^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$ et comme :

$$v_0 = \frac{1}{u_0} + 2 = \frac{1}{1} + 2 = 3$$

D'où : $v_n = 3 \times 5^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n} + 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = v_n - 2 \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 2} \\ &\Leftrightarrow u_n = \boxed{\frac{1}{3 \times 5^n - 2}} \end{aligned}$$

Comme $5 > 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 5^n - 2 = +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3 \times 5^n - 2} = 0$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 3 (5 points)

1. Le discriminant Δ de l'équation $z^2 - 18z + 82 = 0$ est :

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 82 = -4 = (2i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{18+2i}{2} = 9+i$$
$$z_2 = \frac{18-2i}{2} = 9-i$$

D'où : $\boxed{S = \{9-i; 9+i\}}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 9+i, b = 9-i$ et $c = 11-i$.

(a) On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{(11-i)-(9-i)}{(9+i)-(9-i)} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \boxed{-i}$$

Alors :

$$\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) [2\pi] \equiv \arg(-i) [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le triangle ABC est rectangle en B, et on a :

$$\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = |-i| \Leftrightarrow \left|\frac{c-b}{a-b}\right| = 1 \Leftrightarrow |c-b| = |a-b| \Leftrightarrow BC = AB$$

Donc le triangle ABC est isocèle en B.

D'où : $\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle en } B}$

(b) On a :

$$4(1-i) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b) &= (11-i-9-i)(11-i-9+i)\\ &= (2-2i)(2)\\ &= \boxed{4(1-i)}\end{aligned}$$

D'après la question **2)b)** : $|4(1-i)| = 4\sqrt{2}$, donc :

$$\begin{aligned}AC \times BC &= |(c-a)(c-b)|\\ &= |4(1-i)|\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{AC \times BC = 4\sqrt{2}}$

(d) On a :

$$\begin{aligned}R(M) = M' &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z - z_B) + z_B\\ &\Leftrightarrow z' = -i(z-9+i)+9-i\\ &\Leftrightarrow z' = -iz+9i+1+9-i\\ &\Leftrightarrow z' = \boxed{-iz+10+8i}\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}R(C) = C' &\Leftrightarrow c' = -ic+10+8i\\ &\Leftrightarrow c' = -i(11-i)+10+8i\\ &\Leftrightarrow c' = -11i-1+10+8i\\ &\Leftrightarrow c' = \boxed{9-3i}\end{aligned}$$

Exercice 4 (9.5 points)

Partie I : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

1 (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}g'(x) &= (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)'\\ &= -e^x + (1-x)e^x\\ &= -e^x + e^x - xe^x\\ &= \boxed{-xe^x}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R});\quad g'(x) = -xe^x}$

(b) On a : $e^x > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Si : $x \geq 0$, alors : $-xe^x \leq 0$, donc : $g'(x) \leq 0$, d'où : $\boxed{g \text{ est décroissante sur } [0;+\infty[}$

Si : $x \leq 0$, alors : $-xe^x \geq 0$, donc : $g'(x) \geq 0$, d'où : $\boxed{g \text{ est croissante sur }]-\infty;0]}$

Et on a : $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, d'où : $\boxed{g(0) = 0}$

2 Puisque la fonction g est continue et décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$, alors la fonction g admet un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R};\ g(x) \leq g(0)$, d'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R};\ g(x) \leq 0}$

Partie II : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ (unité : 1cm).

1 (a) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x \\ &= (-\infty)(+\infty) - (+\infty) \\ &= -\infty - \infty \\ &= -\infty\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ (1)

(b) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2-x}{x}\right)e^x - 1 \\ &= (-1)(+\infty) - 1 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ (2)

De (1) et (2) on constate que :

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2 (a) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^x - x \\ &= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x \\ &= 0 - 0 - (-\infty) \\ &= \boxed{+\infty}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x\to-\infty} [(2-x)e^x - x + x] \\ &= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x \\ &= 0 - 0 \\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

(b) On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, et on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2-x}{x}\right)e^x - 1 \\ &= -1 \times 0 - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

et on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$

d'où : la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage $-\infty$

3 (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x + (2-x)e^x - 1 \\ &= (2-x-1)e^x - 1 \\ &= (1-x)e^x - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \ f'(x) = g(x)}$

(b) Géométriquement :

$\boxed{f'(0) = 0 \text{ signifie que la courbe } (C) \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse } 0}$

(c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = g(x)$, et d'après la question **I)2)**: $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g(x) \geq 0$.

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) \geq 0$, d'où la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4 La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Or : $0 \in \mathbb{R}$, donc : $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ de } \mathbb{R}}$

Et on a : $f(2) = (2-2)e^2 - 2 = -2 < 0$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(2 - \dfrac{3}{2}\right)e^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2} \simeq 0.75 > 0$

Donc : $f(2) \times f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0.$ et on a : f est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\boxed{\dfrac{3}{2} < \alpha < 2}$

5 (a) On a : $e^x \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) + x = 0 &\Leftrightarrow (2-x)e^x - x + x = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

Et on a : $f(2) = -2$, donc : $\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ et la droite } (D) \text{ se coupent au point } A(2;-2)}$

(b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) + x = (2-x)e^x$

donc le signe de $f(x) + x$ est le même que celui de $2 - x$, car $e^x > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$

Si : $x = 2$, alors : $2 - x = 0$, d'où : $\boxed{f(x) + x = 0, \text{ pour } x = 2}$

Si : $x > 2$, alors : $2 - x < 0$, d'où : $\boxed{f(x) + x < 0, \text{ pour tout } x > 2}$

Si : $x < 2$, alors : $2 - x > 0$, d'où : $\boxed{f(x) + x > 0, \text{ pour tout } x < 2}$

(c) D'après la question **5)b)** :

Si : $x > 2$, alors : $f(x) + x < 0$, donc : $f(x) < -x$, d'où : $\boxed{(C) \text{ est au-dessous de } (D) \text{ sur }]2;+\infty[}$

Si : $x < 2$, alors : $f(x) + x > 0$, donc : $f(x) > -x$, d'où : $\boxed{(C) \text{ est au-dessus de } (D) \text{ sur }]-\infty;2[}$

6 **a** Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow g'(x)=0 \\ &\Leftrightarrow -xe^{x}=0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x=0} \quad (car\ \ \forall x\in\mathbb{R};\ \ e^{x}\neq 0) \end{aligned}$$

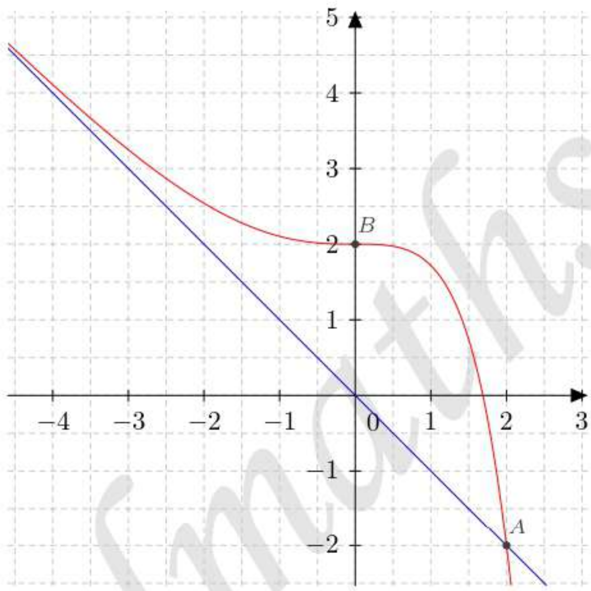
Si : $x\geq 0$, alors $-xe^{x}\leq 0$, alors $f''(x)\leq 0$.

Si : $x\leq 0$, alors $-xe^{x}\geq 0$, alors $f''(x)\geq 0$.

Alors $f''(0)=0$ et f'' change de signe au voisinage de 0, et comme $f(0)=2$.

D'où : (C) possède un point d'inflexion unique est $B(0;2)$

b La figure :



7 **a** A l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}(2-x)\,e^{x}dx &= \int_{-1}^{0}(2-x)\,(e^{x})'\,dx \\ &= \Big[(2-x)\,e^{x}\Big]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}(2-x)'e^{x}dx \\ &= \Big[2e^{0}-3e^{-1}\Big]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}e^{x}dx \\ &= 2-\frac{3}{e}+\Big[e^{x}\Big]_{-1}^{0} \\ &= 2-\frac{3}{e}+e^{0}-e^{-1} \\ &= 2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e} \\ &= 3-\frac{4}{e} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\int_{-1}^{0}(2-x)\,e^{x}dx=3-\frac{4}{e}}$

b Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=0$

On a : $\mathcal{A}=\int_{-1}^{0}|f(x)-(-x)|\,dx=\int_{-1}^{0}|f(x)+x|\,dx$

D'après la question **II)5)b)**, on a : $\forall x<2; f(x)+x>0$, donc : $|f(x)+x|=f(x)+x$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{-1}^{0} f(x)+x dx\\&=\int_{-1}^{0}(2-x)\,e^{x}dx\\&=\left(3-\frac{4}{e}\right)U^2\end{aligned}$$

Comme : $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=\left\|\overrightarrow{j}\right\|=1cm$, alors : $U^2=1cm^2$, d'où : $\boxed{\mathcal{A}=\left(3-\frac{4}{e}\right)cm^2}$