المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵓⵔⵉⵜ
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2025
- الموضوع -

LLLLLLLLLLLLLLLLLLLL-LLLLL | NS - 24F

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

<u>CONSIGNES</u> :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ………..…………..…(10 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes..……(3.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+e}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie I :

0.25 1- a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(1-x)=f(x)$

0.25 b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0. 5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.5 2- a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=f(x)\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$

b) Donner les variations de f puis en déduire que :

1 $(\forall x\in\mathbb{R})$; $0<f(x)<\dfrac{1}{2}$

0.5 3- Représenter graphiquement la courbe (Γ).

(On prendra $\|\vec{i}\|=1cm$, $\|\vec{j}\|=2cm$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\cong 0.30$ et $\dfrac{1}{1+e}\cong 0.27$)

0.5 4- a) Montrer que: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

0.25 b) En déduire que $\int_0^{1} f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

5- a) En effectuant le changement de variables : $t=e^x$, montrer que :

0.25 $$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$$

0.5 b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\left(\sqrt{e}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$

0.25 c) En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=f(u_n)$

1- En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

0.5 $(\forall x\in\mathbb{R})$; $|f'(x)|\le f(x)$

0.5 2- a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)$; $0\le f'(x)<\dfrac{1}{2}$

0.25 b) Montrer que la fonction $g: x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

0.5 c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

0.5 3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 b) Montrer que : $\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)

0.5 2- Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0;2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z:

$$(E_\alpha) \quad : \quad z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2$

0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$

0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note par $M\left(z\right)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\dfrac{b}{a}=\lambda i$ avec $\lambda=\operatorname{Im}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{h}{b-a}=-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites $\left(OH\right)$ et $\left(AB\right)$ sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que : $\dfrac{h-a}{b-a}=\dfrac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

2- Soient $I\left(m\right)$ le milieu du segment $\left[OH\right]$ et $J\left(n\right)$ le milieu du segment $\left[HB\right]$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{n}{m-a}=-\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites $\left(OJ\right)$ et $\left(AI\right)$ sont perpendiculaires et que $OJ=\left|\lambda\right|AI$

0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites $\left(IJ\right)$ et $\left(OA\right)$ sont perpendiculaires.

EXERCICE3 : (3 points)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

0.5 1- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ [p]$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2\equiv 1\ [p]$. Soit x_0 une solution de cette équation.

0.5 a) Montrer que : $x_0^{\,p-1}\equiv 1\ [p]$

0.25 b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$

3- Soit n un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que si p divise $2^{2n+1}-1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$

0.5 b) En déduire que l'équation $\left(E\right)$: $11x+\left(2^{2n+1}-1\right)y=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

4- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\left(F\right)$: $x^2+5x+2\equiv 0\ [11]$

0.25 a) Montrer que : $\left(F\right)\ \Leftrightarrow\ 2\left(2x+5\right)^2\equiv 1\ [11]$

0.5 b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

<u>EXERCICE4</u> : (3.5 points)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, et que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ et l'ensemble $E=\left\{M(x)=I+xA \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 1- a) Vérifier que : $A^2=-2A$

0.25 b) En déduire que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $M(x)\times M(y)=M(x+y-2xy)$

0.25 2- a) Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right)\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

0.25 b) En déduire que la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.25 3- Montrer que : $E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité : $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}\left(x+y-2xy-\frac{1}{2}\right)$)

1 4- Montrer que : $\left(E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\},\times\right)$ est un groupe commutatif.

5- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ M(x)\,T\,M(y)=M\left(x+y-\frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\varphi(x)=M\left(\frac{1-x}{2}\right)$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{R})=E$

0.25 b) En déduire que (E,T) est un groupe commutatif.

0.5 6- Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

FIN