Corrigé Examen National Maths Sciences Maths A et B 2025 Normale

2ème année Baccalauréat - Sciences Maths

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1 : (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie I :

1- a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ **;** $f(1-x) = f(x)$

Solution : Calculons $f(1-x)$:

$$f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)} + e} = \frac{e \cdot e^{-x}}{e^2 \cdot e^{-2x} + e} = \frac{e^{1-x}}{e^{2-2x} + e}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par e^{2x} :

$$f(1-x) = \frac{e^{1-x} \cdot e^{2x}}{(e^{2-2x} + e)e^{2x}} = \frac{e^{1+x}}{e^2 + e^{2x+1}} = \frac{e^{x+1}}{e(e^1 + e^{2x})} = \frac{e^x}{e^{2x} + e} = f(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(1-x) = f(x)$. $0.25pt$

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Solution : La relation $f(1-x) = f(x)$ montre que la courbe (Γ) est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$. $0.25pt$

c) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **puis en déduire** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution :

Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ et $e^{2x} \to 0$, donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{0+e} = 0$$

En utilisant la symétrie démontrée en 1-a), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(1-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

0.5

d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

Solution : Les limites montrent que :

La droite $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (Γ) en $-\infty$ et en $+\infty$.

0.5

2- a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ **;** $f'(x) = f(x)\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$

Solution : $(\forall x \in \mathbb{R})$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+e) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{e^{3x}+e^{x+1}-2e^{3x}}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{-e^{3x}+e^{x+1}}{(e^{2x}+e)^2}$$

Factorisons le numérateur :

$$f'(x) = \frac{e^x(-e^{2x}+e)}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}+e} \cdot \frac{-e^{2x}+e}{e^{2x}+e} = f(x) \cdot \frac{e(1-e^{2x-1})}{e(e^{2x-1}+1)} = f(x)\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$$

0.5

b) Donner les variations de f puis en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ **;** $0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$

Solution :

Signe de la dérivée : Le dénominateur $1 + e^{2x-1} > 0$ toujours. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de $1 - e^{2x-1}$.

$$1 - e^{2x-1} > 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} < 1 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$f'(x) > 0$ sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$
$f'(x) < 0$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

Variations :

f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$
f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

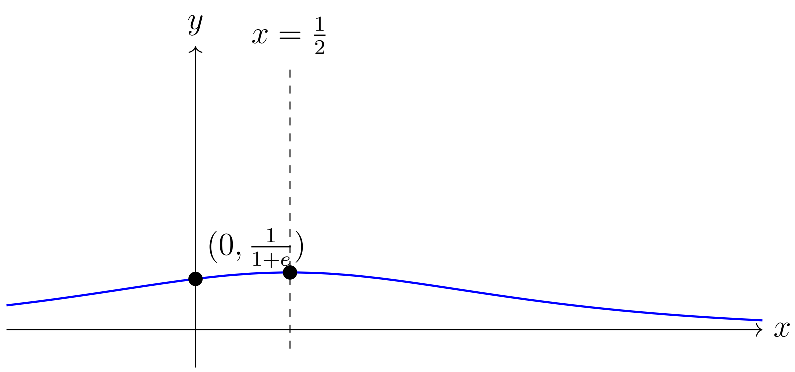
Maximum en $x = \dfrac{1}{2}$: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^{1/2}}{e+e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2e} = \dfrac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0.30$

Encadrement :

$f(x) > 0$ car $e^x > 0$ et $e^{2x} + e > 0$
Le maximum est $\frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$, donc $f(x) < \frac{1}{2}$

1

3- Représenter graphiquement la courbe (Γ).



0.5

4- a) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$

Solution : Effectuons le changement de variable $u = 1 - x$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 f(1-u)(-du) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

car $f(1-u) = f(u)$. 0.5

b) En déduire que $\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

Solution :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

d'après la question précédente. 0.25

5- a) En effectuant le changement de variables : $t = e^x$**, montrer que :**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$$

Solution : Posons $t = e^x$, donc $dt = e^x dx = tdx$ et $dx = \frac{dt}{t}$.
Changement des bornes :

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = e^{1/2} = \sqrt{e}$

Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{e^{2x} + e} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2 + e} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$$

0.25

b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$

Solution :

$$\int \frac{dt}{t^2 + e} = \frac{1}{\sqrt{e}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right) + C$$

Donc :

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right]$$

Mais en utilisant $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{e}\right)$$

Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{e}\right)\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

0.5

c) En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$

Solution : L'aire A est :

$$A=\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{2}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

Donc l'aire est :

$$A=\frac{2}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\ \text{cm}^2$$

0.25

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in]0;\frac{1}{2}[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, u_{n+1}=f(u_n)$

1- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,|f'(x)|\leq f(x)$

Solution : D'après I.2-a), on a :

$$f'(x)=f(x)\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$$

Donc :

$$|f'(x)|=f(x)\left|\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right|$$

Or $\left|\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right|\leq 1$ car :

Si $1-e^{2x-1}\geq 0$, alors $\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\leq\dfrac{1+e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}=1$

Si $1-e^{2x-1}\leq 0$, alors $\dfrac{e^{2x-1}-1}{1+e^{2x-1}}\leq\dfrac{e^{2x-1}+1}{1+e^{2x-1}}=1$

Ainsi $|f'(x)|\leq f(x)$. 0.5

2- a) Montrer que : $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\,;\,0\leq f'(x)<\frac{1}{2}$

Solution : Pour $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$:

$2x-1\leq 0$ donc $e^{2x-1}\leq 1$

Ainsi $1-e^{2x-1}\geq 0$ et $1+e^{2x-1}\geq 1$

Donc $f'(x)\geq 0$.

De plus, comme $f(x)<\dfrac{1}{2}$ (d'après I.2-b)) et $\left|\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right|<1$, on a :

$$f'(x)<\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Finalement : $0\leq f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 0.5

b) Montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Solution : Calculons la dérivée :

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question 1, $|f'(x)| \leq f(x) < \dfrac{1}{2}$, donc :

$$g'(x) \leq f(x) - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Ainsi g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. 0.25

c) Existence et unicité de $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Solution :

$g(0) = f(0) - 0 = \dfrac{1}{1+e} > 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{e}} - \dfrac{1}{2} \approx -0.20 < 0$

g est continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Donc, il existe un unique $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$. 0.5

3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$

Solution : Par récurrence :

Initialisation : $u_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ par définition

Hérédité : Si $0 < u_n < \frac{1}{2}$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :

$f(u_n) > 0$ car $f > 0$

$f(u_n) < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$ car f croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \dfrac{1}{2}$. 0.5

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Solution : Comme $f(\alpha) = \alpha$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe c_n entre u_n et α tel que :

$$f(u_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(u_n - \alpha)$$

Or on sait que :

D'après II.2.a), pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| < \frac{1}{2}$

Comme $u_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ (d'après II.3.a)) et $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $c_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

On en déduit :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f'(c_n)| \cdot |u_n - \alpha| < \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

0.5

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Solution :

Initialisation : Pour $n = 0$, égalité évidente

Hérédité : Si $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$, alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

Donc par reccurence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0.5

d) Convergence de (u_n) vers α

Solution : Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, alors $u_n \to \alpha$. 0.25

Partie III :

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{k/n} + e^{1-k/n}}$$

1- a) Vérifier que : $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Solution : Commençons par exprimer $f\left(\frac{k}{n}\right)$:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{e^{k/n}}{e^{2k/n} + e}$$

Réécrivons le terme général de S_n :

$$\frac{k}{e^{k/n} + e^{1-k/n}} = \frac{ke^{k/n}}{e^{2k/n} + e} = k \cdot \frac{e^{k/n}}{e^{2k/n} + e} = kf\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25

b) Montrer que : $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

Solution : Par le changement de variable $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_1^0 (1-t)f(1-t)(-dt) = \int_0^1 (1-t)f(t)dt$$

En additionnant avec l'intégrale originale :

$$\int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (1-x)f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

$$2\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \quad \text{(d'après I.4-b))}$$

0.5

2- Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite

Solution : Reconnaissons une somme de Riemann :

$$S_n = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\to \int_0^1 xf(x)dx}$$

Quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

0.5

Exercice 2 : (3.5 points)

1- a) Vérifier que le discriminant est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2$

Solution : L'équation (E_α) s'écrit :

$$z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0$$

Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha &= \left[2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} \\ &= 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(1+4i-4) - 8i2^{2\alpha}e^{i2\alpha} \\ &= 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(-3+4i-8i) \\ \Delta_\alpha &= 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(-3-4i)\end{aligned}$$

Donc on constate que :

$$(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2 = 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(1-4i-4) = 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(-3-4i) = \Delta_\alpha$$

car $(1-2i)^2 = 1-4i-4 = -3-4i$. 0.5

b) Solutions a et b avec $|a| < |b|$

Solution : Les racines sont :

$$z = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) \pm 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2}$$

Donc :

$$b = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}[(1+2i)-(1-2i)]}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha} \cdot 2i = 2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}$$
$$a = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}[(1+2i)+(1-2i)]}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha} \cdot 1 = 2^\alpha e^{i\alpha}$$

On a bien $|b| = 2^{\alpha+1} > |a| = 2^\alpha$. 0.5

2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est imaginaire pur

Solution :

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}}{2^\alpha e^{i\alpha}} = 2i$$

qui est bien imaginaire pur. 0.5

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note par $M(z)$ le point d'affixe z. On pose :

$$\lambda = \frac{b}{ia} \quad \text{avec} \quad Im\left(\frac{b}{a}\right) = \lambda$$

1-a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = \frac{-i\lambda}{1+\lambda}$

Solution :

On a : $h = \frac{a+b}{2}$ et $b - a \neq 0$, donc :

$$\frac{h}{b-a} = \frac{a+b}{2(b-a)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{b-a}$$

En factorisant par a :

$$\frac{a+b}{b-a} = \frac{a(1+\frac{b}{a})}{a(\frac{b}{a}-1)} = \frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} \Rightarrow \frac{h}{b-a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}$$

En posant $\lambda = \frac{b}{ia} \Rightarrow \frac{b}{a} = i\lambda$, on a :

$$\frac{h}{b-a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+i\lambda}{i\lambda - 1} = \frac{-i\lambda}{1+\lambda}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{h}{b-a} = \frac{-i\lambda}{1+\lambda}}$$

Et puisque : $arg\left(\frac{h}{b-a}\right) = \frac{-\pi}{2}$ Alors les droites (OH) et (AB) sont donc perpendiculaires.

1-b) Montrer que les points A, H, B sont alignés

Solution :

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{\frac{a+b}{2}-a}{b-a} = \frac{b-a}{2(b-a)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Le quotient est réel, donc les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, ce qui implique que A, H, B sont alignés. 0.5

2- a) Montrer que $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$ (où $I(m)$ milieu de $[OH]$, $J(n)$ milieu de $[HB]$)

Solution :

On a :

$m = \frac{0+h}{2} = \frac{h}{2}$

$n = \frac{h+b}{2}$

Alors :

$$\begin{aligned} n &= \frac{h+b}{2} = \frac{\frac{ab}{a+b}+b}{2} = \frac{ab+b(a+b)}{2(a+b)} = \frac{2ab+b^2}{2(a+b)} \\ &= \frac{2a\cdot 2ia+(2ia)^2}{2(a+2ia)} = \frac{4ia^2-4a^2}{2a(1+2i)} = \frac{-4a^2+4ia^2}{2a(1+2i)} \\ &= \frac{-2a+2ia}{1+2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m-a &= \frac{h}{2}-a = \frac{\frac{ab}{a+b}}{2}-a = \frac{ab}{2(a+b)}-a \\ &= \frac{2ia^2}{2(a+2ia)}-a = \frac{ia}{1+2i}-a \\ &= a\left(\frac{i}{1+2i}-1\right) = \frac{a(-1-i)}{1+2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{m-a} &= \frac{\frac{-2a+2ia}{1+2i}}{\frac{a(-1-i)}{1+2i}} = \frac{-2+2i}{-1-i} \\ &= \frac{2(-1+i)}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i} = \frac{2(1-2i+i^2)}{1-i^2} = \frac{2(-2i)}{2} = -2i = -\lambda i \end{aligned}$$

0.5

2- b) Perpendicularité de (OJ) et (AI) et égalité $OJ = |\lambda| AI$

Solution :

$\frac{n}{m-a} = -2i$ est imaginaire pur $\implies (OJ) \perp (AI)$

Module : $|n| = |-2i| \cdot |m-a| \implies OJ = 2 \cdot AI$ 0.5

2- c) Cocylclicité de K, I, H, J

Solution :

On a :

I est le milieu de $[OH]$ par définition.
J est le milieu de $[HB]$ par définition.
K est le point d'intersection de (OJ) et (AI).

Et on a :

D'après 2-b), $(OJ) \perp (AI)$, donc $\widehat{IKJ} = \frac{\pi}{2}$.
D'après 1-a), $(OH) \perp (AB)$. Comme $(IJ) \parallel (AB)$ (par la propriété des milieux), on a $(OH) \perp (IJ)$, donc $\widehat{IHJ} = \frac{\pi}{2}$.

Et on a :

Les points I, H, J voient le segment $[IK]$ sous le même angle droit.
Donc, les points K, I, H, J appartiennent à un même cercle de diamètre $[KH]$.

Conclusion : Les quatre points K, I, H, J sont cocycliques. 0.25

2- d) Montrer que $(IJ) \perp (OA)$

Solution :

Dans le triangle OHB :

I est le milieu de $[OH]$ et J celui de $[HB]$.
Donc : $(IJ) \parallel (OB)$.

De plus, on a $\frac{b}{a} = 2i$, donc les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont orthogonaux :

$$(OB) \perp (OA)$$

Par conséquent, comme $(IJ) \parallel (OB)$, on déduit :

$$\boxed{(IJ) \perp (OA)}$$

0.25

Exercice 3 : (3 points)

1- Montrer que pour un nombre premier impair p et un entier a premier avec p :

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p] \quad \text{ou} \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ [p]$$

Solution :

Par le petit théorème de Fermat, comme p est premier et a p $= 1$:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$$

Donc :

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \ [p]$$

Donc p divise $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

Comme p est premier, il divise l'un des deux facteurs :

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p] \quad \text{ou} \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ [p]$$

0.5

2- On considère l'équation $ax^2 \equiv 1\ [p]$. Soit x_0 une solution.

a) Montrer que $x_0^{p-1} \equiv 1\ [p]$

Solution :

Comme x_0 est solution, $ax_0^2 \equiv 1\ [p]$

Donc $x_0 \not\equiv 0\ [p]$ (sinon $0 \equiv 1$ impossible)

Par le petit théorème de Fermat :

$$x_0^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

0.5

b) En déduire que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$

Solution :

De $ax_0^2 \equiv 1\ [p]$, on élève à la puissance $\frac{p-1}{2}$:

$$a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

Or $x_0^{p-1} \equiv 1\ [p]$, donc :

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$$

0.25

3- Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$, alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$

Solution :

Si $p \mid 2^{2n+1} - 1$, alors $2^{2n+1} \equiv 1\ [p]$

Posons $d = \text{ord}_p(2)$, le plus petit entier tel que $2^d \equiv 1\ [p]$

d divise $2n+1$ (impair) et $p-1$ (Fermat)

Comme d est impair et divise $p-1$, il divise $\frac{p-1}{2}$

Donc $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2^d)^k \equiv 1^k \equiv 1\ [p]$

0.5

b) En déduire que $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

Solution :

Pour p=11, $2^5 = 32 \equiv 10 \not\equiv 1\ [11]$

Donc 11 ne divise pas $2^{2n+1} - 1$

Ainsi $\text{pgcd}(11, 2^{2n+1} - 1) = 1$

Par le théorème de Bézout, il existe $(x, y) \in Z^2$solution

0.5

4- On considère l'équation $x^2 + 5x + 2 \equiv 0\ [11]$

a) Montrer que $2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]$

Solution :

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 2 &\equiv 0\ [11] \\ 8(x^2 + 5x + 2) &\equiv 0\ [11] \\ 8x^2 + 40x + 16 &\equiv 0\ [11] \\ 8x^2 + 7x + 5 &\equiv 0\ [11] \end{aligned}$$

Développons $2(2x+5)^2$:

$$\begin{aligned} 2(2x+5)^2 &= 2(4x^2+20x+25) \\ &= 8x^2+40x+50 \\ &\equiv 8x^2+7x+6\ [11] \quad (\text{car } 40 \equiv 7 \text{ et } 50 \equiv 6\ [11]) \end{aligned}$$

Nous avons :

$$8x^2+7x+6 \equiv 1\ [11]$$

Mais $8x^2+7x+6 \equiv 2(2x+5)^2\ [11]$, donc :

$$2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]$$

Conclusion

$$\boxed{x^2+5x+2 \equiv 0\ [11] \iff 2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]}$$

0.25

b) En déduire qu'il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Solution :

D'après la question 4-a), nous avons établi l'équivalence :

$$(F) \iff 2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]$$

Alors :

$$(2x+5)^2 \equiv 6\ [11] \quad (\text{car } 2^{-1} \equiv 6\ [11])$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 0^2 &\equiv 0\ [11] \\ 1^2 &\equiv 1\ [11] \\ 2^2 &\equiv 4\ [11] \\ 3^2 &\equiv 9\ [11] \\ 4^2 &\equiv 16 \equiv 5\ [11] \\ 5^2 &\equiv 25 \equiv 3\ [11] \\ 6^2 &\equiv 36 \equiv 3\ [11] \\ 7^2 &\equiv 49 \equiv 5\ [11] \\ 8^2 &\equiv 64 \equiv 9\ [11] \\ 9^2 &\equiv 81 \equiv 4\ [11] \\ 10^2 &\equiv 100 \equiv 1\ [11] \end{aligned}$$

Les résidus quadratiques modulo 11 sont : **0, 1, 3, 4, 5, 9**.

Conclusion

6 n'est pas un résidu quadratique modulo 11, donc l'équation $(2x+5)^2 \equiv 6\ [11]$ **n'a pas de solution**.

Par conséquent, l'équation (F) **n'admet aucune solution** dans $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{L'équation } (F) \text{ n'admet pas de solution dans } \mathbb{Z}.}$$

0.5

Exercice 4 : Structures algébriques (3.5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1- a) Montrer que $A^2 = -2A$

Solution : Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-1)(-1)+(-1)(-1)+0 & (-1)(-1)+(-1)(-1)+0 & 0 \\ (-1)(-1)+(-1)(-1)+0 & (-1)(-1)+(-1)(-1)+0 & 0 \\ (-1)(-1)+1(-1)+(-2)(0) & (-1)(-1)+1(-1)+(-2)(0) & (-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Et :

$$-2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A^2 = -2A}$ 0.25

b) En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x)M(y) = M(x+y-2xy)$

Solution : On a :

$$M(x)M(y) = (I+xA)(I+yA) = I+xA+yA+xyA^2 = I+(x+y)A+xy(-2A) = I+(x+y-2xy)A$$

$\boxed{M(x)M(y) = M(x+y-2xy)}$ 0.25

2- a) Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = I + \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0.25

2- b) En déduire que $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible

Solution :

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est non nulle. Alors $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible.

0.25

3) Montrer que $E \setminus \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication

Solution :
Soient $M(x), M(y) \in E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ avec $x, y \neq \frac{1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= (I + xA)(I + yA) = I + (x+y)A + xyA^2 \\ &= I + (x + y - 2xy)A \quad (\text{car } A^2 = -2A \text{ d'après 1-a}) \\ &= M(x + y - 2xy) \end{aligned}$$

Alors : $x + y - 2xy \neq \dfrac{1}{2}$ **:**
Supposons $x + y - 2xy = \frac{1}{2}$. Alors :

$$4xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ OU } y = \frac{1}{2}$$

Contradiction avec l'hypothèse $x, y \neq \frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall M(x), M(y) \in E \setminus \{M(\tfrac{1}{2})\}, \quad M(x)M(y) = M(\underbrace{x + y - 2xy}_{\neq \frac{1}{2}}) \in E \setminus \{M(\tfrac{1}{2})\}}$$

0.25

4) Montrer que $\left(E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}, \times\right)$ est un groupe commutatif

Solution :
i) Stabilité : Déjà démontrée dans la question 3.
ii) Associativité : Héritée de l'associativité du produit matriciel dans $M_3(\mathbb{R})$.
iii) Élément neutre :

$$M(0) = I + 0 \cdot A = I$$

Alors :

$$\forall M(x) \in E, M(x)M(0) = M(x + 0 - 0) = M(x)$$

iv) Inverse : Pour tout $M(x) \in E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ $(x \neq \frac{1}{2})$, on cherche $M(y)$ tel que :

$$M(x)M(y) = M(0)$$

$$\Leftrightarrow M(x + y - 2xy) = M(0)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow y(1 - 2x) = -x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2x - 1} \quad (\text{défini car } x \neq \frac{1}{2})$$

Donc :

$$M\left(\frac{x}{2x-1}\right) \text{ est bien l'inverse de } M(x)$$

v) Commutativité :

$$M(x)M(y) = M(x+y-2xy) = M(y+x-2yx) = M(y)M(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{\left(E \setminus \{M(\tfrac{1}{2})\}, \times\right) \text{ est un groupe commutatif}}$$

1

5) a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)

Solution :
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to E$ définie par $\varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$.
On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+y) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right) = M\left(\frac{1-x}{2} + \frac{1-y}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(\frac{1-x}{2}\right) T M\left(\frac{1-y}{2}\right) = \varphi(x) T \varphi(y)$$

En on a :

$$\forall M(a) \in E, \exists x = 1-2a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x) = M(a)$$

$\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{R},+) \text{ vers } (E,T) \text{ et } \varphi(\mathbb{R}) = E}$ 0.5

b) En déduire que (E,T) est un groupe commutatif

Solution :
$\varphi : (\mathbb{R},+) \to (E,T)$ est un homomorphisme. Et on a : $\varphi(\mathbb{R}) = E$ Comme $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif, par transport de structure, (E,T) hérite des mêmes propriétés.
$\boxed{(E,T) \text{ est un groupe commutatif}}$ 0.25

6) Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif

Solution :
i) (E,T) **est un groupe commutatif** (déjà démontré en 5b)
ii) $(E \setminus \{0\}, \times)$ **est un groupe commutatif** (déjà démontré en 4)
iii) Distributivité : On a :

$$M(b)TM(c) = M\left(b+c-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$M(a) \times (M(b)TM(c)) = M(a) \times M\left(b+c-\tfrac{1}{2}\right) = M\left(a+b+c-\tfrac{1}{2}-2a(b+c-\tfrac{1}{2})\right)$$
$$= M\left(a+b+c-\tfrac{1}{2}-2ab-2ac+a\right) = M\left(2a+b+c-2ab-2ac-\tfrac{1}{2}\right)$$

Et on a :

$$M(a) \times M(b) = M(a+b-2ab)$$
$$M(a) \times M(c) = M(a+c-2ac)$$
$$(M(a) \times M(b))T(M(a) \times M(c)) = M(a+b-2ab)TM(a+c-2ac)$$
$$= M\left(a+b-2ab+a+c-2ac-\tfrac{1}{2}\right) = M\left(2a+b+c-2ab-2ac-\tfrac{1}{2}\right)$$

Donc :

$$\underbrace{M(a) \times (M(b)TM(c))}_{\text{Membre gauche}} = \underbrace{(M(a) \times M(b))T(M(a) \times M(c))}_{\text{Membre droit}} = M\left(2a + b + c - 2ab - 2ac - \frac{1}{2}\right)$$

Preuve par calcul direct en utilisant les expressions analytiques.

iv) Commutativité de $\times$: Déjà établie.

$\boxed{(E, T, \times) \text{ satisfait toutes les propriétés d'un corps commutatif}}$ 0.5