Correction d'examen national normale math 2024 science math A et B

Correction de l'examen national de mathématiques 2 Bac sciences maths A et B 2024 session normal.

Exercice 1

1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{2} \times \frac{2\ln(x)}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x^2)}{x^2 - 1}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Changement de variable } x^2 = y \\ \text{Lorsque } x \to 1^+ \text{ on a : } y \to 1^+ \end{array} \right.$

$= \lim\limits_{y \to 1^+} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(y)}{y - 1}$

$= \frac{1}{2} \times 1$

$= \frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

alors f est continue à droite en 1.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{0} \times \underbrace{\frac{1}{x - \frac{1}{x}}}_{\frac{1}{+\infty}}$ (0 × 0)

$= 0$

interprétation géométrique : (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

3) a) on pose $t = (x-1)^2$ et $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{-\sqrt{(x-1)^2} + \ln(1+\sqrt{(x-1)^2})}{(x-1)^2}$$

(2)

puisque $x \in]1; +\infty[$ alors $x - 1 > 0$ donc :

$$\frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{-(x-1) + \ln(1+x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 - x + \ln(x)}{(x-1)^2}$$

b) soit g une fonction definie sur $[0; +\infty[$ tel que :

$$g(x) = -\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x})$$

on a : g est continue sur $[0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$

alors d'après TVI : $\exists c \in]0, t[$ avec $t \in]0; +\infty[$ telque :

$$g'(c) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{g(t)}{t}$$

et on a $\forall x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$$g'(x) = \frac{-\cancel{1} - \sqrt{x} + \cancel{1}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$g'(x) = \frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2(1+\sqrt{x})}$$

donc $g''(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall x \in]0; +\infty[$

$g''(x) > 0$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

donc $g'(x)$ est strictement croissant sur $]0,+\infty[$

alors :
$$g'(0) < g'(c) < g'(t)$$
$$-\frac{1}{2} < g'(c) < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$
$$-\frac{1}{2} < \frac{g(t)}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

$\forall t \in]0,+\infty[$ $$-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

c) $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

On suppose $t=(x-1)^2$ alors $x \to 1^+$ on a : $t \to 0^+$

et puisque $\forall t \in]0,+\infty[$:
$$-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

donc $$-\frac{1}{2} < \lim_{t \to 0^+} \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \lim_{t \to 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$
$$-\frac{1}{2} < \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} < -\frac{1}{2}$$

donc $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

4) a) $\forall x \in]1,+\infty[$:
$$\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{x-1}$$
$$= \frac{\frac{2\ln(x)-(x^2-1)}{2(x^2-1)}}{x-1}$$
$$= \frac{2\ln(x)-x^2+1}{2(x-1)(x^2-1)}$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

et on a : $\forall x \in]1;+\infty[$

$$-\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}=\frac{-\ln(x)(x-1)+(x+1)(\ln(x)-x+1)}{2(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{-x\ln(x)+\ln(x)+x\ln(x)-x^2+x+\ln(x)-x+1}{2(x-1)(x-1)(x+1)}$$

(4)

$$=\frac{2\ln(x)-x^2+1}{2(x-1)(x^2-1)}$$

donc : $\forall x \in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

b) $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\underbrace{-\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}}_{-1\times\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}}_{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

interprétation graphique : (C_f) admet une demi-tangent à droite de 1 dirigé vers le bas d'équation : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+1$$

5) a) soit $t\in[1;x]$ avec $x\in[1;+\infty[$,

on a : $\forall x\in[1;+\infty[$ et $\forall t\in[1,x]$:

$t^3\geq t^2$ alors $\frac{1}{t^3}\leq\frac{1}{t^2}$

et $t^2-1\geq0$

donc :

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

$$0 \leq \frac{t^2-1}{t^3} \leq \frac{t^2-1}{t^2}$$

$$\int_1^x 0 \, dt \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt$$

$$0 \leq I(x) \leq J(x)$$

5

b) $\forall x \in [1; +\infty[$

$$I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) dt$$

$$= \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2}\right]_1^x$$

$$= \ln(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \ln(x) + \frac{1-x^2}{2x^2}$$

$$= \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}$$

$$J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt$$

$$= \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= x + \frac{1}{x} - 1 - 1$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

c) $\forall x \in]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2-1) - 2x\ln(x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2-1-2x^2\ln(x)}{x}}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2\ln(x)}{x(x-1)^2(x+1)^2}$$

et on a : $\frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}}$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{\frac{2x^2\ln(x) - x^2 + 1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{2x^2\ln(x) - x^2 + 1}{2x^2} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x(2x^2\ln(x) - x^2 + 1)}{2x^2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2x^2\ln(x)}{x(x-1)^2(x+1)^2}$$

donc $\forall x \in]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$$

d) on a : $\forall x \in]1, +\infty[$

$$I(x) \geqslant 0$$

$$\frac{I(x)}{J(x)} \geqslant 0$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

$$\frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{\delta(x)} \leqslant 0$$

$$f'(x) \leqslant 0 \qquad (1)$$

7

et on a : $\forall x \in]1;+\infty[$

$$x > 1$$

$$x+1 > 2$$

$$\frac{x+1}{2} > 1$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 > 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} > 1 \quad \text{alors} \quad -\frac{(x+1)^2}{2} \leqslant -2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x+1)^2} \geqslant -\frac{1}{2}$$

et on a : $I(x) \leqslant \delta(x)$

$$\frac{I(x)}{\delta(x)} \leqslant 1$$

$$\frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{\delta(x)} \geqslant \frac{-2}{(x+1)^2} \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) \geqslant \frac{-2}{(x+1)^2} \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) \geqslant -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

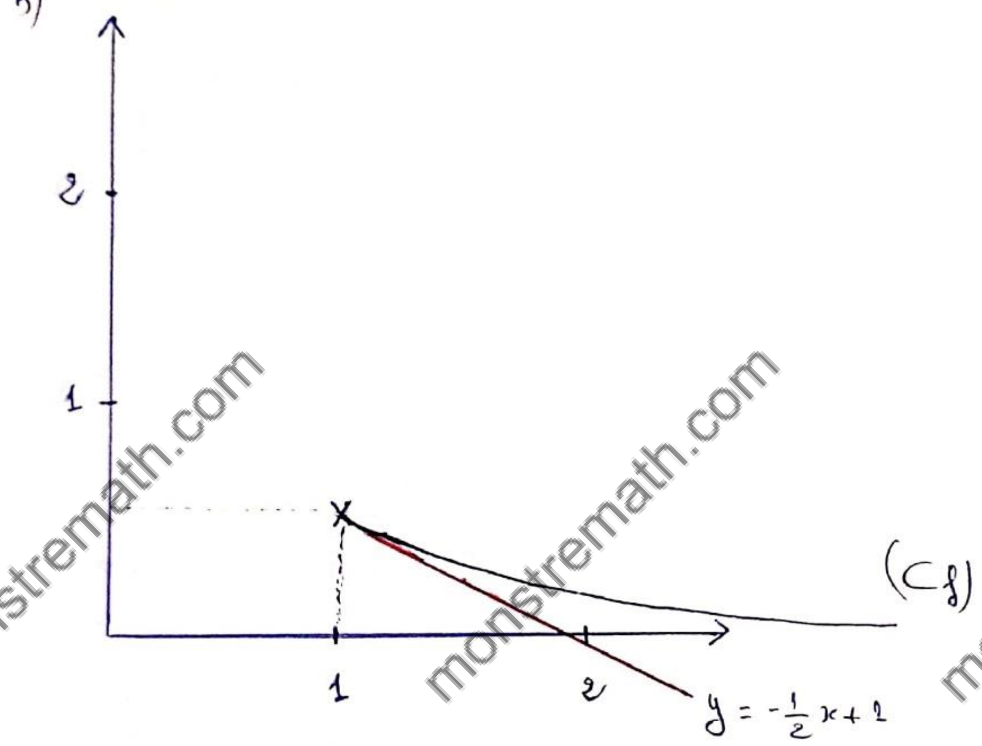
de (1) et (2) : $\forall x \in]1;+\infty[$:

$$-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

6) a)

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$\frac{1}{2}$ ↘	0

b)



la courbe de (C_f)

7) soit h une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(1) = \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} - x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- on a h est continue sur $[1; +\infty[$ car f est continue sur $[1, +\infty[$ donc h est continue sur $]1; 2[$
- on a $\forall x \in]1, +\infty[$ $h'(x) = f'(x) - 1$ et puisque $f'(x) \leq 0$ alors $f'(x) - 1 < 0$ donc $h'(x) < 0$ donc h est strictement croissant sur $]1; 2[$.

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

Et on a : $h(1) = f(1) - 1 + 1 = \frac{1}{2} > 0$

$$h(2) = f(2) - 2 + 1 = \frac{\ln(2)}{3} - 1 = \frac{\ln(2) - 3}{3} < 0$$

9

donc $h(1) \times h(2) < 0$

- Donc d'après TVI l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$
- Conclusion : La équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution $a \in]1; 2[$.

8) (a_n) une suite numérique telque $a_0 \in [1; +\infty[$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = 1 + f(a_n)$

a) on a $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$-\frac{1}{2} \leqslant f'(a_n) \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant f'(a_n) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$|f'(a_n)| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{a_{n+1} \cancel{-1} - a \cancel{+1}}{a_n - a} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$|a_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2} |a_n - a|$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

b) pour $n=0$ on a : $|a_0-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0-a|$ vrai

on suppose que $|a_n-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0-a|$

donc :

$$|a_n-a| \times \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0-a| \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}|a_n-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0-a|$$

$$|a_{n+1}-a| \leq \frac{1}{2}|a_n-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0-a|$$

$$|a_{n+1}-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0-a|$$

vraie pour $n+1$.

donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0-a|$$

c) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n-a| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0-a|$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0-a| = 0$

et $\forall x \in [1,+\infty[\quad f(x)+1>0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n-a| = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

donc la suite (a_n) est convergente.

Exercice 2 :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \quad \forall x \in [0,1]$$

1/a) on a : la fonction $t \to t^2$ continue sur $[0,1]$

et on a $\forall x \in [0,1]$, $e^{x^2}>0$ alors

$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est strictement croissante sur $[0,1]$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

b) F est strictement croissante sur $[0,1]$

F est continue sur $[0,1]$

donc F est une bijection de $[0,1]$ vers $F([0,1])$

avec $F([0,1]) = [0; F(1)]$

$= [0; \beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$

2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

$= \frac{1}{\beta} \frac{\beta}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

puisque F^{-1} est continue sur $[0;\beta]$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\beta} \times \frac{\beta}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

$$= \frac{1}{\beta} \times \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

(somme de Reimann avec $a = 0$ et $b = \beta$)

donc (S_n) est convergente et

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = l = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

b) $l = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$ on pose : $u = F^{-1}(t)$

donc $t = F(u)$

$dt = F'(u) du$

$dt = e^{u^2} du$

lorsque $t = 0$ alors $u = F^{-1}(0) = 0$

lorsque $t = \beta$ alors $u = F^{-1}(F(1)) = 1$

donc $l = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$

12

$$I = \frac{1}{\beta} \times 2 \times \frac{1}{2} \int_0^1 u\, e^{u^2} du$$

$$I = \frac{1}{2\beta} \int_0^1 2u\, e^{u^2} du$$

$$I = \frac{1}{2\beta} \left[e^{u^2} \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2\beta} [e - 1]$$

$$I = \frac{e-1}{2\beta}$$

Exercice III

Partie 1 :

1) a) $\Delta = (-2i)^2 - 4\alpha$

$= 4i^2 - 4\alpha$

$= -4 - 4\alpha$

$= -4(1+\alpha)$

b) pour que $(E\alpha)$ admet deux solutions distingue il faut que :

$\Delta \neq 0$ alors : $\alpha + 1 \neq$ donc $\alpha \neq -1$

donc l'ensemble c'est $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

2) $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 2i$

$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = \alpha$

Partie 2 :

1) a) $z_1 = \dfrac{2i - 2i\sqrt{1+\alpha}}{2}$

$z_1 = i - i\sqrt{1+\alpha}$

$= i - i\sqrt{1+m^2-2m}$

$= i - i\sqrt{(m-1)^2}$

$= i - i|m-1|$

$z_2 = \dfrac{2i + 2i\sqrt{1+\alpha}}{2}$

$z_2 = i + i\sqrt{1+\alpha}$

$z_2 = i + i\sqrt{1+m^2-2m}$

$z_2 = i + i\sqrt{(m-1)^2}$

$z_2 = i + i|m-1|$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

si $m \geq 1$:

$z_1 = 2i - im$ et $z_2 = im$

si $m \leq 1$

$z_1 = im$ et $z_2 = 2i - im$

donc dans les deux cas :

$S = \{im ; 2i - im\}$

b) $\frac{z_1 - 0}{z_2 - 0} = \frac{i(2-m)}{im} = \frac{2-m}{m} \in \mathbb{R}$

donc O, M_1 et M_2 sont alignées

2) on suppose que O, M_1, M_2 ne sont pas alignées.

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

$= \frac{1}{|z_2|^2}\left(Re(z_1\overline{z_2}) + i Im(z_1\overline{z_2})\right)$

donc puisque $\frac{1}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}$ alors $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$ si $Re(z_1\overline{z_2}) = 0$

b) $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$

$= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$

$= z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1\overline{z_2})$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$
$- 4Re(z_1\overline{z_2})$

$= |z_1 + z_2|^2 - 4Re(z_1\overline{z_2})$

$z_1\overline{z_2} = (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)$
$= a_1a_2 + b_1b_2$
$+ i(a_2b_1 - a_1b_2)$

$z_2\overline{z_1} = a_1a_2 + b_1b_2$
$- i(a_2b_1 - a_1b_2)$

donc $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} =$
$2(a_1a_2 + b_1b_2)$
$= 2Re(z_1\overline{z_2})$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

c) d'après a) et b) on a :

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \text{ si } Re(z_1\bar{z}_2) = 0$$

donc si $Re(z_1\bar{z}_2) = 0$ alors : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$$

$$|z_1 - z_2| = |2i|$$

$$|z_1 - z_2| = 2$$

3) a) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

$$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 - 4z_1z_2$$

$$= (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2$$

$$= (2i)^2 - 4\alpha$$

$$= -4 - 4\alpha$$

$$= -4(1 + \alpha)$$

$$= \Delta$$

b) soit $\Omega \in P$: on a $\Omega \in (\Gamma)$ si et seulement si :

OM_1M_2 est triangle rectangle en O

donc $\frac{z_1 - 0}{z_2 - 0} \in i\mathbb{R}$

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$$

$$|z_1 - z_2| = 2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 4$$

$$|(z_1 - z_2)^2| = 4$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

$$|-4(1+\alpha)| = 4$$

$$|-4|.|1+\alpha| = 4$$

$$4|1+\alpha| = 4$$

$$|1+\alpha| = 1$$

$$|\alpha-(-1)| = 1$$

$$|z_\omega-(-1)| = 1$$

$|z_\omega - z_M| = 1$ avec M est le point d'affixe -1.

$$\omega M = 1$$

donc l'ensemble des points ω sont le cercle de centre M et de rayon $r = 1$

Exercice 4

1) a) on a : $(i;2)T(1;i) = (i\times(-i)+1;\ 2\times i)$

$$= (-i^2+1;\ 2i)$$

$$= (1+1;\ 2i)$$

$$= (2;\ 2i)$$

et on a : $(1;i)T(i,2) = (1\times 2+i;\ 2\times i)$

$$= (2+i;\ 2i)$$

b) on a : $(i;2)T(1;i) \neq (1;i)T(i;2)$

donc la loi n'est pas commutatif dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

2) soit (a_1,b_1) ; $(a_2;b_2)$ et $(a_3,b_3) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

on a : $(a_1,b_1)T((a_2,b_2)T(a_3,b_3)) = (a_1,b_1)T(a_2\overline{b_3}+a_3;\ b_2b_3)$

$$= (a_1\times\overline{b_2}\,\overline{b_3}+a_2\overline{b_3}+a_3;\ b_1b_2b_3)$$

et on a :

$\left((a_1,b_1)T(a_2,b_2)\right)T(a_3,b_3) = \left(a_1\bar{b}_2 + a_2, b_1b_2\right)T(a_3,b_3)$

$= \left((a_1\bar{b}_2 + a_2)\bar{b}_3 + a_3, b_1b_2b_3\right)$

$= \left(a_1 \times \bar{b}_2\bar{b}_3 + a_2\bar{b}_3 + a_3; b_1b_2b_3\right)$

16

donc $(a_1,b_1)T\left((a_2,b_2)T(a_3;b_3)\right) = \left((a_1,b_1)T(a_2,b_2)\right)T(a_3,b_3)$

alors T est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

3) soit $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ on a :

$(a,b)T(0,1) = (a\times 1 + 0; b\times 1)$

$= (a,b)$

et $(0;1)T(a,b) = (0\times\bar{b} + a; 1\times b)$

$= (a,b)$

donc $(0;1)$ est l'element neutre pour T dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

4) a) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ $(a,b)T\left(\frac{-a}{\bar{b}}; \frac{1}{b}\right) = \left(a\times\left(\overline{\frac{1}{b}}\right) + \frac{-a}{\bar{b}}; b\times\frac{1}{b}\right)$

et $\left(\overline{\frac{1}{b}}\right) = \frac{1}{\bar{b}}$

donc $(a,b)T\left(\frac{-a}{\bar{b}}; \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{a}{\bar{b}} - \frac{a}{\bar{b}}; \frac{b}{b}\right)$

$= (0;1)$

b) soit $(a,b);(c,d) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ on a :

$(a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$

$(c,d)T(a,b) = (c\bar{b} + a, bd)$

pour $(a,b) = (0,i)$ et $(c,d) = (i,i)$

on a : $\left.\begin{array}{l}(a,b)T(c,d) = (i;-1)\\(c,d)T(a,b) = (1;-1)\end{array}\right\}$ $(a,b)T(c,d) \neq (c,d)T(a,b)$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

donc T est non commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

donc $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

5) a) on a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ et $(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \neq \emptyset$$

soit (a,b) et (c,d) deux elements de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

on a : $(a,b)\,T\,(c,d) = (a\bar{d}+c\,;\,bd)$

puisque $d\in\mathbb{R}^*$ alors $\bar{d}\in\mathbb{R}^*$

donc $(a\bar{d}+c\,;\,bd)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

donc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T.

b) on a : $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \neq \emptyset$

et soient (a,b) et (c,d) deux elements de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ on a :

$\left(\frac{-c}{\bar{d}}\,;\,\frac{1}{d}\right)$ est le symetrique de (c,d) par la loi T, donc :

$$(a,b)\,T\left(\frac{-c}{\bar{d}}\,;\,\frac{1}{d}\right) = \left(a\times\left(\overline{\frac{1}{d}}\right)+\frac{-c}{\bar{d}}\,;\,b\times\frac{1}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\bar{d}}-\frac{c}{\bar{d}}\,;\,\frac{b}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{a-c}{\bar{d}}\,;\,\frac{b}{d}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$

car $d\in\mathbb{R}^*$ alors $\bar{d}\in\mathbb{R}^*$

donc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T)$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

Exercice 5 :

1) a) $\begin{cases} p \text{ est premier} \\ p \wedge n = 1 \end{cases}$ d'après théorème de Fermat : $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

$\begin{cases} q \text{ est premier} \\ q \wedge n = 1 \end{cases}$ d'après théorème de Fermat : $n^{q-1} \equiv 1 [q]$

donc p divise $n^{p-1} - 1$ et q divise $n^{q-1} - 1$

b) on a : $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

$$\left(n^{p-1}\right)^{q-1} \equiv 1^{q-1} [p]$$

$$n^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p]$$

donc p divise $n^{(p-1)(q-1)} - 1$

et on a $n^{q-1} \equiv 1 [q]$

$$\left(n^{q-1}\right)^{p-1} \equiv 1^{p-1} [q]$$

$$n^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$$

donc q divise $n^{(p-1)(q-1)} - 1$

c) on a $\begin{cases} p / n^{(p-1)(q-1)} - 1 \quad \text{et } q / n^{(p-1)(q-1)} - 1 \\ \text{et} \quad p \wedge q = 1 \end{cases}$

donc $pq / n^{(p-1)(q-1)} - 1$

2) on pose : $p = 17$ et $q = 13$ on a : $p \wedge q = 1$
et on pose $n = 2024$ et on a : $(p-1)(q-1) = 16 \times 12 = 192$
et on a $2024 \wedge 17 = 1$ et $2024 \wedge 13 = 1$ alors :

$$2024^{(17-1)(13-1)} \equiv 1 [17 \times 13]$$

$$2024^{192} \equiv 1 [221]$$

donc $2024^{192} x \equiv 3 [221]$

$$x \equiv 3 [221]$$

Youssef SEMHI Contact : +212644127117/+212708875223 Email : semhi.aka@gmail.com

$$x - 3 \equiv 0 \, [221]$$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - 3 = 221k$$

donc $S' = \{3 + 221k \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$

Semhi Youssef

Enseignant de Math au Lycée Mohammed Serraj à Sidi Yahya Zair - Temara