Correction de rattrapage examen national math 2023 science math A et B

Correction proposée par **Youssef SEMHI**	Contact : 0644127117 *monstremath.com*	Email : semhi.aka@gmail.com

Exercice 1 :

Partie I :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$f_n(0) = 0$ et $(\forall x \in [0, +\infty[\,)$;

$f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1)

a) $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = (2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = (2n)^n x^{\frac{n}{2n}}\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = (2n)^n x^{\frac{n}{2n}}\left(\frac{1}{2n}\ln(x)\right)^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = (2n)^n x^{\frac{n}{2n}}\left(\frac{1}{2n}\right)^n(\ln(x))^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2n}{2n}\right)^n(\ln(x))^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = x^{\frac{1}{2}}(\ln(x))^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = \sqrt{x}(\ln x)^n$$

$$(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = f_n(x)$$

La continuité a la droite :

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} (2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$$ Changement de variable $y = x^{\frac{1}{2n}}$

lorsque $x \to 0^+$ aussi $y \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{y\to 0^+} (2n)^n(y\ln(y))^n = 0$$ Car $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$ alors f_n est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln x)^n = +\infty$

c) $\forall x \in]0,+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n x^{\frac{n}{2n}}\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n x^{\frac{1}{2}}\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(2n)^n\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x^{\frac{n}{2n}}}$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{(2n)^n\left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n}$$

$$\frac{f(x)}{x}=(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{y\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln(y)}{y}\right)^n=0$ Avec : Changement de variable $y=x^{\frac{1}{2n}}$ lorsque $x\to+\infty$ aussi $y\to+\infty$

Alors, (C_n) admet un branche parabolique suivant l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

d) Cas 1, n est paire :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n=+\infty$$

Alors f_n n'est pas dérivable en a droit de 0, (C_n) admet une demi-tangente vertical d'équation $x=0$ dirigé vers le haut

Cas 2, n est impaire :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n=-\infty$$

Alors f_n n'est pas dérivable en a droit de 0, (C_n) admet une demi-tangente vertical d'équation $x = 0$ dirigé vers le bas

2)

a) On a f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ car f_n est le produite de deux fonctions dérivables sur f_n tel que :

$\forall x \in]0, +\infty[\,;\ f(x) = h(x)(g(x))^n$

$$\forall x \in]0, +\infty[\,;\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\ln x)^n + \sqrt{x} \times \frac{n}{x} \times (\ln x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\ln x)^n + \frac{n}{\sqrt{x}} \times (\ln x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^n + 2n(\ln x)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n)}{2\sqrt{x}}$$

b) $\forall\ n \geq 2$ on a : $f'(x) = 0$ équivalent a:

$$\frac{(\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n)}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$(\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n) = 0$$

$$(\ln x)^{n-1} = 0 \quad ou \quad (\ln x + 2n) = 0$$

$$\ln x = 0 \quad ou \quad \ln x = -2n$$

$$x = 1 \quad ou \quad x = e^{-2n}$$

c) Si n est paire alors n-1 est impaire :

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$2n+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^{n-1}$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(e^{-2n})$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est impaire alors n-1 est paire

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$2n+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^{n-1}$	||	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$			$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) On a :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ; \qquad f''(x) = \left(\frac{(\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n)}{2\sqrt{x}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{\left((\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n)\right)' \times 2\sqrt{x} - (\ln x)^{n-1}(\ln x + 2n)\left(2\sqrt{x}\right)'}{4x}$$

$$f''(x)=\frac{\left((n-1)\frac{1}{x}(\ln x)^{n-2}\times(\ln x+2n)+(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}\right)\times 2\sqrt{x}-(\ln x)^{n-1}(\ln x+2n)\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$f''(1)=\frac{\left((n-1)\frac{1}{x}(\ln 1)^{n-2}\times(\ln 1+2n)+(\ln 1)^{n-1}\times\frac{1}{1}\right)\times 2\sqrt{1}-(\ln 1)^{n-1}(\ln 1+2n)\times\frac{1}{\sqrt{1}}}{4\times 1}$$

$$f''(1)=\frac{0}{4}=0$$

Alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1) Soit $\beta\in]1,e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=f_n(\beta)$$

a) On a :

$$\beta\in]1,e[$$

$$1<\beta<e$$

Et puisque f_n est croissant sur $]1,e[$ alors :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ f_n(1)<f_n(\beta)<f_n(e)$

$0<f_n(\beta)<\sqrt{e}$

$0<u_n<\sqrt{e}$

b) On a :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_{n+1}-u_n=f_{n+1}(\beta)-f_n(\beta)=\sqrt{\beta}(\ln\beta)^{n+1}-\sqrt{\beta}(\ln\beta)^n=$

$\sqrt{\beta}(\ln\beta)^n(\ln\beta-1)$

Et puisque $\beta<e$ alors $\ln\beta<\ln e$ donc $\ln\beta<1$

Donc $\sqrt{\beta}(\ln\beta)^n(\ln\beta-1)<0$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - u_n < 0$

$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

c) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f_n(\beta) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\beta}(\ln\beta)^n = 0$$

Car $1 < \beta < e$ alors $0 < \ln\beta < 1$

2)

a) On considère la fonction g_n définie sur $]1, e[$ par : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

On a g_n est continue sur $]1, e[$ car f_n est sur $]1, e[$

On a $\lim_{n\to 1^+} g_n(x) = -1$ et $\lim_{n\to e^-} g_n(x) = 0^+$

Et puisque f_n est strictement croissant sur $]1, e[$ alors g_n est strictement croissant $]1, e[$, donc d'après le théorème de croissement finie, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]1, e[$;

Finalement il existe un unique $x_n \in\ ]1, e[$ tell que $f_n(x_n) = 1$

b) On a : $x \in\ ]1, e[$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{x}(\ln x)^{n+1} = \sqrt{x}(\ln x)^n \times \ln x = f_n(x)\ln x$

Et comme $\ln x < 1$ alors $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ alors pour $x = x_{n+1}$, on a :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1})$$

On suppose que $x_{n+1} \leq x_n$, et comme f_n est strictement croissant sur $]1, e[$ alors $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$ et comme $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1})$ donc ;

$f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$

$f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$

$1 < f_n(x_{n+1}) \leq 1$

$1 < 1$ Donc c'est absurde, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_{n+1} > x_n$

Conclusion : $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. Et puisqu'il est borné, alors il est convergent.

3) On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

a) On a $x_n \in \left]1, e\right[$ alors $1 < x_n < e$ puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissant, alors :

$$1 < \lim_{n\to+\infty} x_n \leq e$$

$$1 < l \leq e$$

b) On a :

$$f_n(x_n) = 1$$

$$\sqrt{x_n}(\ln x_n)^n = 1$$

$$(\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

c) Si $l < e$ alors :

Puisque $l < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n < e$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln x_n < 1$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln x_n) < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln n) = -\infty$

Si $l < e$ alors $\lim_{n\to+\infty} \ln((\ln x_n)^n) = -\infty$ c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = 0$

ce qu'est contradictoire avec $\lim_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{l}}$ donc : $l = e$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = e$$

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$

1)

a) On a $F(x)$ est primitive d'une fonction continue sur I alors $F(x)$ est aussi continue sur I

b) On a $f_1(t) = \sqrt{t}\ln t$, alors :

$$F(x) = \int_x^1 t(\ln t)^2 dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u = (\ln t)^2 & et \quad u' = \dfrac{2\ln t}{t} \\ v' = t & et \quad v = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

Donc :

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2(\ln t)^2\right]_x^1 - \int_x^1 t\ln t \ dt$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right] - \int_x^1 t\ln t \ dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u = \ln t & et \quad u' = \dfrac{1}{t} \\ v' = t & et \quad v = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_x^1 + \frac{1}{2}\int_x^1 t\,dt$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^1$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right]$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^2$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}(1 - x^2)$$

2)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2)$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}(\mathrm{x}\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{1}{4}$$

b) Puisque $F(x)$ est continue sur I alors :

$$\lim_{n\to 0^+} F(x) = F(0) = \frac{1}{4}$$

c) Calcule de volume :

$$V = \left|\lim_{x\to 0^+} \pi\int_x^1 t(\ln t)^2 dt\right| = \pi[-F(1) + F(0)] = \frac{\pi}{4}cm^3$$

Exercice 2 :

1)

a) Calcule :

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}$$

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}+\frac{1\times\left(\sqrt{x}-i\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+i\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-i\sqrt{y}\right)}$$

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}+\frac{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}{x+y}$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{\left(\sqrt{x}+i\sqrt{y}\right)(x+y)}{x+y}+\frac{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}{x+y}$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}+i\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{y}\right)}{x+y}+\frac{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}{x+y}$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+y\sqrt{x}+i\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{y}-\sqrt{y}\right)}{x+y}$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{x}(x+1+y)}{x+y}+i\frac{\sqrt{y}(x-1+y)}{x+y}$$

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{x+y}{x+y}\right)+i\sqrt{y}\left(-\frac{1}{x+y}+\frac{x+y}{x+y}\right)$$

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+y}+1\right)+i\sqrt{y}\left(-\frac{1}{x+y}+1\right)$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$$

b) On :

$$z+\frac{1}{z}=\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$$

Alors :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\times z=\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)\times z$$

$$z^2+1=\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)z$$

$$z^2-\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)z+1=0$$

$$\Delta=\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)^2-4\times 1\times 1$$

$$\Delta=\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)^2-4=\frac{28}{25}+\frac{96}{25}i=\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2$$

Alors :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)-\sqrt{\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2}}{2} \\ z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)+\sqrt{\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)-\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)}{2} \\ z_2=\dfrac{\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)+\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i}{2} \\ z_2 = \dfrac{\frac{20}{5}+\frac{10}{5}i}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4}{10}-\dfrac{2}{10}i \\ z_2 = \dfrac{20}{10}+\dfrac{10}{10}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i \\ z_2 = 2+i \end{cases}$$

c) Puisque x et y sont des reels, alors $(x, y) = (4,1)$

2) Les solutions de system est :

$$S = \{(4,1)\}$$

Partie II :

1) $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| = 1$ equivalent a $z \times \bar{z} = 1$ equivalent a:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

2)

a) On a $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BC}$ deux vecteurs colinéaires alors :

$$\frac{p-a}{c-b} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{p-a}{c-b} = \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{b}}$$

Alors :

$$(p-a)(\bar{c}-\bar{b}) = (\bar{p}-\bar{a})(c-b)$$

$$(p-a)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)(c-b)$$

$$(p-a)\left(\frac{b-c}{cb}\right)=\left(\frac{a-p}{pa}\right)(c-b)$$

$$(p-a)\left(\frac{b-c}{cb}\right)=\left(\frac{a-p}{pa}\right)(c-b)$$

$$\left(\frac{b-c}{cb}\right)=\left(\frac{b-c}{pa}\right)$$

$$\left(\frac{1}{cb}\right)=\left(\frac{1}{pa}\right)$$

$$p=\frac{cb}{a}$$

b) On a (AP) et (AQ) sont perpendiculaire alors :

$$\frac{p-a}{q-a}\in i\mathbb{R}$$

$$\frac{p-a}{q-a}=-\overline{\left(\frac{p-a}{q-a}\right)}$$

$$\frac{p-a}{q-a}=-\frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{q}-\bar{a}}$$

$$(p-a)(\bar{q}-\bar{a})=-(\bar{p}-\bar{a})(q-a)$$

$$(p-a)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{a}\right)=-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)(q-a)$$

$$(p-a)\left(\frac{a-q}{aq}\right)=-\left(\frac{a-p}{ap}\right)(q-a)$$

$$(p-a)\left(\frac{a-q}{aq}\right)=-\left(\frac{p-a}{ap}\right)(a-q)$$

$$\left(\frac{1}{aq}\right)=-\left(\frac{1}{ap}\right)$$

$$\frac{1}{aq} = -\frac{1}{ap}$$

$$q = -p$$

c) On suppose que (PR) et (OB) sont perpendiculaire alors :

$$\frac{p-r}{b-0} \in i\mathbb{R}$$

$$\frac{p-r}{b-0} = -\overline{\left(\frac{p-r}{b-0}\right)}$$

Or :

$$\overline{\left(\frac{p-r}{b-0}\right)} = \frac{\bar{p}-\bar{r}}{\bar{b}}$$

$$\overline{\left(\frac{p-r}{b-0}\right)} = -\frac{b(r-p)}{pr}$$

$$\overline{\left(\frac{p-r}{b-0}\right)} = -(p-r)\frac{a}{cr}$$

Et on a : $r = \frac{ab}{c}$ et $p = \frac{bc}{a}$, donc :

$$\overline{\left(\frac{p-r}{b-0}\right)} = -\frac{(p-r)}{b}$$

Donc (PR) et (OB)

Exercice 3 :

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau et non commutatif d'initié $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$

- Pour $a = 0, b = 0\ et\ c = 0$ on a : $M(0{,}0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

- Soit $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ dans E, on a :

$$M(a,b,c) - M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & -c' \\ 0 & c' & b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0 \\ 0 & b-b' & -(c-c') \\ 0 & c-c' & b-b' \end{pmatrix} \in E$$

Donc E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$.

2)

a) Montrer que ϕ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\,,\ *)$.

Soient Soit $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ dans E , alors :

$$\phi\big(M(a,b,c) + M(a',b',c')\big) = \phi\Big(M\big(a+a', (b+b') + i(c+c')\big)\Big)$$

D'autre part,

$$\phi\big(M(a,b,c)\big) * \phi\big(M(a,b,c)\big) = (a, b+ic) * (a', b'+ic')$$

$$= (a+a', (b+ic) + (b'+ic')) = \big(a+a', (b+b') + i(c+c')\big)$$

Alors : $\phi\big(M(a,b,c) + M(a',b',c')\big) = \phi\big(M(a,b,c)\big) * \phi\big(M(a',b',c')\big)$

Donc ϕ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\,,\ *)$.

Donc $\phi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

b) Commutativité de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\,,\ *)$.

Puisque ϕ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\,,\ *)$ et que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$, alors $+$ loi commutative dans E donc $(E, +)$ est un groupe commutatif puisque homomorphisme conserve la commutativité alors :

$(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\,,\ *)$ est un groupe commutatif.

3)

a) Montrer que T est commutative.

Soit $(x\,,z)$ et (x',z') dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Par définition :

$(x\,,z)T(x',z') = (xRe(z') + x'Re(z), zz')$

Et comme $Re(z)$ et $Re(z')$ sont des réels, l'addition de réels est commutative et la multiplication des nombres complexes est commutative. Donc :

$$(x\,,z)T(x',z') = (xRe(z') + x'Re(z), zz') = (x',z')T(x,z)$$

Alors, T est commutative.

b) Elément neutre de T

Pour tout $(x,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$:

$$(x,z)\ T\ (0,1) = (x\times Re(1) + 0\times Re(z), z\times 1) = (x\times 1 + 0, z) = (x,z)$$

Et puisque T est commutative alors $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

c) Non associativité de T :

Soit $(1,i)$ et $(x,-i)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$,

$$(1,i)\ T\ (x,-i) = (1\times Re(-i) + x\times Re(i), i\times(-i)) = (1\times 0 + x\times 0,1)$$
$$= (0,1)$$

Soit (x',z') dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ avec $z' = a + ib$

On a :

$$(x',z')T\big((1,i)\ T\ (x,-i)\big) = (x',z')T(0,1) = (x',z')$$

Et on a :

$$\big((x',z')\ T\ (1,i)\big)T(x,-i) = (0+a',-iz')T(0,1) = (a',-iz')T(0,1)$$

$$= (a',-iz')$$

Alors $(x',z')T\big((1,i)\ T\ (x,-i)\big) \neq \big((x',z')\ T\ (1,i)\big)T(x,-i)$

Donc la loi T est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

4) Soit $G = \{(Im(z),z),\ \ z\in\mathbb{C}\}$

a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ ,\ *\ )$:

- L'élément neutre de $*$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ est $(0,0)$, qui appartient à G, donc G est non vide.

- Soient $(Im(z),z)$ et $(Im(z'),z')$ deux éléments de G :

$(Im(z),z) * (Im(z'),z') = (Im(z) - Im(z'), z-z') = (Im(z-z'), z-z')$

Comme $(Im(z-z'), z-z') \in G$, alors G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ ,\ *\ )$

b) Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*\ ,\ \times\ )$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ ,\ T)$

Soient $z\ et\ z'$ deux éléments $\mathbb{C}^*$:

$\psi(z\times z') = \psi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big)$

$\psi(z\times z') = \psi(xx'-yy'+i(xy'+x'y))$

$\psi(z\times z') = \psi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big)$

$\psi(z\times z') = (xy'+x'y\,, xx'-yy'+i(xy'+x'y))$

Et on a :

$$\psi(z)\ T\ \psi(z') = \big((x+iy)\ T\ (x'+iy')\big)$$

$$\psi(z)\ T\ \psi(z') = \psi\big(xx'-yy'+i(xy'+x'y)\big)$$

$$\psi(z)\,T\,\psi(z') = \left(xy' + x'y\,, xx' - yy' + i(xy' + x'y)\right)$$

Donc : $\psi(z \times z') = \psi(z)\,T\,\psi(z')$, alors ψ est un homomorphisme de

$(\mathbb{C}^*\ ,\ \times\ )$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\ ,\ T)$

c) Déduire que $(G - \{(0,0)\}\ ,\ T)$ est un groupe commutatif :

On a $(\mathbb{C}^*\ ,\ \times\ )$ est un groupe commutatif, et ψ est un homomorphisme de

$(\mathbb{C}^*\ ,\ \times\ )$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\ ,\ T)$, alors $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\ ,\ T)$ aussi un groupe commutatif,

il suffit de montrer que $G - \{(0,0)\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}\ ,\ T)$,

donc :

$G - \{(0,0)\}$ est non vide car (0,1) appartient a $G - \{(0,0)\}$

Soient $(Im(z), z)\ et\ (Im(z'), z')$ deux éléments de $G - \{(0,0)\}$, on a :

$$(Im(z), z)\ T\ \left(Im\left(\frac{1}{z'}\right), \frac{1}{z'}\right) = \left(Im(z) \times Re\left(\frac{1}{z'}\right) + Im\left(\frac{1}{z'}\right) \times Re(z)\right)$$

$$(Im(z), z)\ T\ \left(Im\left(\frac{1}{z'}\right), \frac{1}{z'}\right) = \left(y \times \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{-y'}{x'^2 + y'^2} \times x\,, (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)\right)$$

$$(Im(z), z)\ T\ \left(Im\left(\frac{1}{z'}\right), \frac{1}{z'}\right) = \left(\frac{x'y}{x'^2 + y'^2} + \frac{-xy'}{x'^2 + y'^2}\,, \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right)$$

$$(Im(z), z)\ T\ \left(Im\left(\frac{1}{z'}\right), \frac{1}{z'}\right) = \left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\,, \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right)$$

$$(Im(z), z)\ T\ \left(Im\left(\frac{1}{z'}\right), \frac{1}{z'}\right) = \left(Im\left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right), \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right)$$

Donc :

$$\left(Im\left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right), \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)\right) \in G - \{(0,0)\}$$

Donc : $G-\{(0,0)\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ ,\ T)$, alors :

$(G-\{(0,0)\}\ \ ,T)$ est un groupe commutatif

5) Montrer que $(G,*\,,T)$ est un corps commutatif

- On a G est un sous-groupe de$(\mathbb{R}\times\mathbb{C}\ ,*)$, alors $(G\ \ ,*)$ est un corps commutatif.
- Et on a $(G-\{(0,0)\}\ \ ,T)$ est un groupe commutatif, donc il suffit de vérifier la distributivité de $T\ sur\ *$

Soient $(Im(z),z)$, $(Im(w),w)$ et $(Im(u),u)$ de G, on a :

$$(Im(z),z)T\big((Im(w),w)*(Im(u),u)\ \big)=(Im(z),z)T\big((Im(w)+Im(u)),w+u)\big)$$
$$=(Im(z),z)T\big((Im(w+u)),w+u)\big)$$
$$=(Im(z)\times Re(w+u)+Im(w+u)\times Re(z),zw+zu)$$

Et on a :

$$\big((Im(z),z)T(Im(w),w)\big)*\big((Im(z),z)T(Im(u),u)\big)=$$
$$(Im(z)\times Re(w)+Im(w)\times Re(z),zw)*(Im(z)\times Re(u)+Im(u)\times Re(z),zu)=$$
$$(Im(z)Re(w)+Im(w)Re(z)+Im(z)Re(u)+Im(u)Re(z),zw+zu)=$$
$$\big(Im(z)\big(Re(w)+Re(u)\big)+Re(z)\big(Im(w)+Im(u)\big),zw+zu\big)=$$
$$(Im(z)Re(w+u)+Re(z)Im(w+u),zw+zu)$$

Donc :

$$(Im(z),z)T\big((Im(w),w)*(Im(u),u)\ \big)=\big((Im(z),z)T(Im(w),w)\big)*\big((Im(z),z)T(Im(u),u)\big)$$

Donc T est distributif sur $*$

Conclusion : $(G,*\,,T)$ est un corps commutatif.

Exercice 5 :

Soit p un nombre premier impaire. On pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{p-1}$

Soit q un nombre premier qui divise S.

1)

a) Soit $d = p \wedge q$ donc d divise p et divise q, et puisque p est premier alors $d = 1$ ou $d = p$, et puisque q est premier aussi alors $d = 1$, donc $p\ et\ q$ sont premiers entre eux.

b) On a $p \wedge q = 1$et q un nombre premier alors, d'après théorème de Gausse :

$$p^{q-1} \equiv 1[q]$$

c) $(p-1)S = pS - S$

$(p-1)S = p(1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{p-1}) - (1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{p-1})$

$(p-1)S = p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{p-1} + p^p - 1 - p - p^2 - p^3 - \cdots - p^{p-1})$

$(p-1)S = p - p + p^2 - p^2 + p^3 - p^3 + \cdots + p^{p-1} - p^{p-1} + p^p - 1$

$(p-1)S = p^p - 1$

Deduction:

On a: $(p-1)S = p^p - 1$ et puisque q divise S alors il exist k appartient à $\mathbb{Z}$ tell que $S = k \times q$ alors $p^p - 1 = k \times q(p-1)$ donc q divise $p^p - 1$ donc :

$p^p - 1 \equiv 0[q]$

$p^p \equiv 1[q]$

2) On suppose que $p\ et\ q - 1$ sont premier entre eux.

a) Soit p et q-1 deux nombres premiers entre eux :

$$pu + (q-1)v = 1$$

$$pu = 1 + (q-1)(-v)$$

$$pu = 1 + (q-1)(-v)$$

$$p^{pu} = p^{1+(q-1)(-v)}$$

$$(p^p)^u = p \times \left(p^{(q-1)}\right)^{-v}$$

Et on a :

$p^{q-1} \equiv 1[q]$ et $p^p \equiv 1[q]$ alors :

$$(1)^u \equiv p \times (1)^{-v}[q]$$

Enfin :

$$p \equiv 1[q]$$

b) On :

$S = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{p-1} \equiv 1 + 1 + \cdots + 1[q] = p[q] = 1[q]$

Donc :

$$S = 1[q]$$

3) On suppose que $pgcd(p, q-1) = 1$ alors :

$$S = 1[q]$$

Or q divise S, Alors :

$$S = 0[q]$$

Alors : $0 = 1[q]$ donc q divise 1, ce qui est absurde, donc : $pgcd(p, q-1) \neq 1$

Puisque p est premier alors p divise $q-1$, donc :

$$q - 1 = 0[p]$$

Enfin :

$q = 1[p]$