★★★★

ROYAUME DU MAROC

2020 R

14

2ième BAC - SM

MAROC

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2020
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mercredi 09 Août 2020

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

$$Soit \quad d = p \wedge 9 \quad \Rightarrow \quad d/p \quad et \quad d/9$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d \in \{1,p\} \quad et \quad d \in \{1,3,9\} \\ &\Rightarrow d \in \{1,p\} \cap \{1,3,9\} \\ &\Rightarrow d \in \{1\} \quad ; \quad p \neq 3 \\ &\Rightarrow d = 1 \\ &\Rightarrow p \wedge 9 = 1 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \wedge 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{9^{p-1} \equiv 1\,[p]}$$

$$On\ a\ aussi \quad : \quad 9^{p+q-1} \equiv 1\,[pq]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow pq/(9^q \cdot 9^{p-1} - 1) \\ &\Rightarrow (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) = kpq \\ &\Rightarrow (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) = k'p \quad avec \ k' = kq \\ &\Rightarrow p/(9^q \cdot 9^{p-1} - 1) \\ &\Rightarrow \boxed{9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 1\,[p]} \quad (1) \end{aligned}$$

$$Or \quad 9^{p-1} \equiv 1\,[p] \Rightarrow \boxed{9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 9^q\,[p]} \quad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow \boxed{9^q \equiv 1\,[p]}$$

La Question : 2) a)

$$Soit \quad d = (p-1) \wedge q$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d/q \quad et \quad q \ est\ un\ nbr\ premier \\ &\Rightarrow d \in \{1,q\} \end{aligned}$$

$$On\ suppose\ que\ d = q$$

$$Alors \quad (p-1) \wedge q = q$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow q/(p-1) \\ &\Rightarrow \boxed{q < (p-1)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$Or\ on\ a \quad \boxed{p < q} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1)\ et\ (2) \ &\Rightarrow p < q < p-1 \\ &\Rightarrow p < p-1 \\ &\Rightarrow \boxed{0 < -1} \quad contradiction \\ &\Rightarrow l'hypothèse\ (d = q) \ à \ rejeter \\ &\Rightarrow l'hypothèse\ (d = 1)\ est\ retenue \\ &\Rightarrow \boxed{(p-1) \wedge q = 1} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$On\ a \ : \quad \boxed{(p-1) \wedge q = 1}$$

$$\Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{N} \ : \quad aq - b(p-1) = 1 \quad ; \quad Bezout$$

$$Car \ q \ et \ (p-1) \in \mathbb{N} \ tels\ que \ q > (p-1)$$

■ $$\begin{cases} 9^q \equiv 1\,[p] \\ 9^{(p-1)} \equiv 1\,[p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (9^q)^a \equiv 1^a\,[p] \\ \left(9^{(p-1)}\right)^b \equiv 1^b\,[p] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1\,[p] \\ 9^{(p-1)b} \equiv 1\,[p] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1\,[p] \\ 9^{(p-1)b+1} \equiv 9\,[p] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1\,[p] \\ 9^{aq} \equiv 9\,[p] \end{cases} \\ &\Rightarrow 9 \equiv 1\,[p] \\ &\Rightarrow p \ divise \ 8 \\ &\Rightarrow p \in \{1,2,4,8\} \\ &\Rightarrow \boxed{p = 2} \quad car \ p \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Dans le raisonnement proposé dans la question 1)a) On peut faire pareil pour montrer l'identité $q \wedge 9 = 1$.

$$Ainsi \quad : \quad \begin{cases} q \in \mathbb{P} \\ q \wedge 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{9^{q-1} \equiv 1\,[q]}$$

La Question : 2) d)

$$\begin{cases} 9^{(q-1)} \equiv 1\,[q] \\ 9^{p+q-1} \equiv 1\,[q] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9^{(q-1)} \equiv 1\,[q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1\,[q] \end{cases} \;;\; p=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 9^2\,[q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1\,[q] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9^2 \equiv 1\,[q]$$

$$\Rightarrow q \ divise\ 80$$

$$\Rightarrow q \in \{1,2,4,5,8,10,16,20,40,80\}$$

$$\Rightarrow q \in \{2;5\} \quad car \quad q \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow q \in \{5\} \quad car \quad q > p = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 5}$$

Le Deuxième Exercice

La partie une :

La Question : 1) a)

Rappel : (Caractérisation des SEV sur $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\begin{matrix} F\ est\ un\ sev \\ de\ (E,+,\cdot) \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x,y \in F) \\ (\alpha x + y) \in F \end{matrix}}$$

Soient A et B deux éléments de E.

Soit α un scalaire de $\mathbb{R}$.

$$\alpha A + B = \alpha \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -(\alpha y + y') & -(\alpha y + y') \\ 0 & (\alpha z + z') & 0 \\ (\alpha y + y') & (\alpha x + x') - (\alpha z + z') & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$

$$= M(\,(\alpha x + x')\ ;\ (\alpha y + y')\ ;\ (\alpha z + z')\,) \in E$$

$$Car\ \ (\,(\alpha x + x')\ ;\ (\alpha y + y')\ ;\ (\alpha z + z')\,) \in \mathbb{R}^3$$

$$D'où :\ (\forall \alpha \in \mathbb{R}), (\forall\, A,B \in E)\ :\ (\alpha A + B) \in E$$

$$C-à-d\ :\ E\ est\, un\ sev\ de\ l'espace\ (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$$

Just think about it ☺

“ scientists investigate that which already is ; engineers create that which has never been “

La Question : 1) b)

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{u} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{w}$$

$$= xu + yv + zw$$

Donc (u,v,w) est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E,+,\cdot)$.

Soit $(\alpha u + \beta v + \gamma w = \theta)$ une combinaison linéaire nulle des éléments $u\ ,\ v\ et\ w$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la seule combinaison linéaire de (u,v,w) qui soit nulle est celle pour laquelle on ait $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C-à-d (u,v,w) est une famille libre.

Finalement on déduit que (u,v,w) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,\cdot)$ comme étant génératrice de E et étant libre. Et on aurait ainsi : $(\,dimE = 3\,)$

La Question : 2) a)

$$M(x,y,z) \times M(x',y',z')$$

$$= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -(xy' + x'y) & -(xy' + x'y) \\ 0 & zz' & 0 \\ (xy' + x'y) & (xx' - yy') - zz' & (xx' - yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(\,xx' - yy'\ ;\ xy' + yx'\ ;\ zz'\,) \in E$$

$$Car\ :\ (\,xx' - yy'\ ;\ xy' + yx'\ ;\ zz'\,) \in \mathbb{R}^3$$

Just think about it ☺

“ Science can amuse and fascinate us all, but it is engineering that changes the world “

La Question : 2) b)

$(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Alors : $\boxed{(E,+)\ est\ un\ groupe\ commutatif}$

On a aussi : $\boxed{\times\ est\ associative\ sur\ E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Car $\times$ est associative sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Comme $\times$ est distributive par rapport à $+$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E. Car $E \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La conclusion finale est que $(E,+,\times)$ est un anneau. En plus cet anneau est commutatif car la loi $\times$ est commutative sur E.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \times M(x',y',z') &= M(\,xx'-yy'\ ;\ xy'+yx'\ ;\ zz'\,) \\ &= M(\,x'x-y'y\ ;\ y'x+x'y\ ;\ z'z) \\ &= M(x',y',z') \times M(x,y,z) \end{aligned}$$

La partie deux :

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} &D'abord\ \ On\ a\ :\ F \subseteq E \\ &Car\ \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ M(x,y,0) \in E \\ &Aussi\ :\ F\ est\ non\ vide\ car\ \theta \in F \\ &Soient\ A = M(x,y,0)\ et\ B = M(x',y',0) \\ &\quad deux\ matrices\ de\ F,\quad On\ a\ : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= M(x,y,0) - M(x',y',0) \\ &= M(\,x-x'\ ;\ y-y'\ ;\ 0\,) \in F \\ &Car\ \ (x-x') \in \mathbb{R}\ et\ \ (y-y') \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que F est un sous-groupe du groupe commutatif du groupe (E,+)

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned} \varphi(\,(x+iy)\times(x'+iy')\,) &= \varphi\big((xx'-yy')+i(xy'+yx')\big) \\ &= M(\,xx'-yy'\ ;\ xy'+yx'\ ;\ 0\,) \\ &= M(x,y,0) \times M(x',y',0) \\ &= \varphi(x+iy) \times \varphi(x'+iy') \end{aligned}$$

Just think about it ☺

> **“ You never change things by fighting the existing reality. To change something, build a new model that makes the existing model obsolete “**

La Question : 1) c)

On montre d'abord que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ vers F^*. Soit $M(a,b,0)$ une matrice donnée de F^*. Et soit à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a,b,0)$.

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a,b,0) \iff\ & \varphi(x+iy) = M(a,b,0) \\ \iff\ & M(x,y,0) = M(a,b,0) \\ \iff\ & \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & a \end{pmatrix} \\ \iff\ & \boxed{x=a}\quad et \quad \boxed{y=b} \end{aligned}$$

D'où la chose suivante :

$(\forall\, M(a,b,0) \in F^*), (\exists!\, z = a+ib \in \mathbb{C}^*)\ :\ \ \varphi(z) = M(a,b,0)$

C-à-d que φ est bijective.

D'où φ est un isomorphisme.

Alors $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (F^*,\times)$ est un groupe commutatif car $(\mathbb{C}^*,\times)$ l'est à priori. Comme $(1+0i)$ est l'élément neutre pour le groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ Alors $\varphi(1+0i) = M(1,0,0)$ est l'élément neutre pour le groupe $(F^*,\times)$.

$$Comme\ :\ Sym_{\mathbb{C}^*}(x+iy) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} Alors\ :\ Sym_{F^*}\big(M(x,y,0)\big) &= Sym_{F^*}\big(\varphi(x+iy)\big) \\ &= \varphi\big(Sym_{\mathbb{C}^*}(x+iy)\big) \\ &= \varphi\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right) \\ &= M\left(\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{-y}{x^2+y^2}\ ;\ 0\right) \end{aligned}$$

La Question : 1) d)

$(F,+,\times)$ est un corps commutatif car :

$$\begin{cases} (F,+)\ est\ un\ groupe\ abélien \\ (F^*,\times)\ est\ un\ groupe \\ \times\ est\ distributive\ prp\ à\ +\ dans\ F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \times\ est\ commutative\ sur\ F \subset E \end{cases}$$

L'unité du corps $(F,+,\times)$ sera l'élément neutre de la loi $\times$ dans F à savoir $M(1,0,0)$.

La Question : 2) a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La Question : 2) b)

On suppose l'existence d'un élément de F inversible pour la multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C-à-d : $M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 = 0} \quad contradiction$$

Donc ce qu'on a supposé est faux.

C-à-d qu'aucun élément de F n'est guerre inversible pour la multiplication matricielle dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le Troisième Exercice

La Question : I) 1)

$$(E) : \quad z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = (2im)^2 \quad ; \quad z = -1 \pm im$$

La Question : I) 2) a)

Soit ai un nombre imaginaire pure avec $a \neq 0$.

$$ai \ \epsilon \ solution(F)$$

$$\Longrightarrow (ai)^3 + 2(1-i)(ai) + (1+m^2-4i)ai - 2i(1+m^2) = 0$$

$$\Longrightarrow (4a - 2a^2) + i(-a^3 + 2a^2 + a + im^2 - 2 - 2m^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4a - 2a^2 = 0 \\ -a^3 + 2a^2 + a + im^2 - 2 - 2m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} oubien \quad a = 0 \\ oubien \quad a = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = 2} \quad car \quad a \neq 0$$

Pour l'implication réciproque si on remplace $z = 2i$ dans l'équation (F) on obtient zéro.

$$-8i - 8 + 8i + 2i + 2im^2 + 8 - 2i - 2im^2 = 0$$

D'où la conclusion : (F) admet une solution imaginaire pure et c'est le nombre $2i$.

La Question : I) 2) b)

En effectuant la division euclidienne du poly $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2)$ sur le polynôme $(z-2i)$ l'équation (F) devient ainsi :

$$(z-2i)(\, z^2 + 2z + 1 + m^2\,) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad z = 2i \\ oubien \quad z = -1 + im \\ oubien \quad z = -1 - im \end{cases}$$

La Question : II) 1)

$$\Omega = milieu[AB] \quad \Leftrightarrow \quad z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$$

$$\mathrm{r}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{P} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{z_P} - \mathrm{z}_\Omega) = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}}(\mathrm{z_A} - \mathrm{z}_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{p} + 1 = -\mathrm{i}(-1 + \mathrm{im} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p = m - 1}$$

$$A' = milieu[OB] \quad \Leftrightarrow \quad z_{A'} = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{-1 - im}{2}$$

$$r_2(B) = Q \quad \Leftrightarrow \quad \left(z_Q - z_{A'}\right) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B - z_{A'})$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(q + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right) = i\left(-1 - im + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = i - m - \frac{i}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(\, i - m - 1 - im\,)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(-i(-1 - im) - 1 - im)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(1 - i)(-1 - im)$$

$$B' = milieu[OA] \quad \Leftrightarrow \quad z_{B'} = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{-1 + im}{2}$$

$$r_3(O) = R \quad \Leftrightarrow \quad (z_R - z_{B'}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_O - z_{B'})$$

$$\Leftrightarrow \quad r + \frac{1}{2} - \frac{im}{2} = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = -\frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} + \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(-i - m - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(i(-1 + im) - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(i + 1)(-1 + im)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(\,\overline{1 - i}\,)(\,\overline{-1 - im}\,) = \overline{q}$$

La Question : II) 2) a)

$$D'abord \quad \boxed{\mathfrak{Im}(q) = \frac{1-m}{2}} \quad ; \quad facile\ à\ prouver$$

$$D'où : \quad \boxed{q-r} = q - \bar{q} = 2i\,\mathfrak{Im}(q) = 2i\left(\frac{1-m}{2}\right)$$
$$= i - im = -i(-1+m) = \boxed{-ip}$$

La Question : II) 2) b)

$$On\ a \quad \left(\frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O}\right) = \frac{q-r}{p} = \frac{-ip}{p} = -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

$$Ainsi \quad : \quad \begin{cases} \left|\dfrac{z_Q - z_R}{z_P - z_O}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_Q - z_R}{z_P - z_O}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} |z_P - z_O| = |z_Q - z_R| \\ \left(\overrightarrow{OP}\ ;\ \overrightarrow{RQ}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} QR = OP \\ (OP) \perp (QR) \end{cases}$$

Le Quatrième Exercice

La partie une :

La Question : 1) a)

La fonction $u : [0,1] \longmapsto [1,2]$ est dérivable sur $[0,1]$
$x \longmapsto (2-x)$
Car c'est un polynôme.

La fonction $v :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
D'après le cours. $x \longmapsto \ln x$

On remarque que $u([0,1]) = [1,2] \subset]0,+\infty[$.

Donc la composition $v \circ u\,(x) = \ln(2-x)$ est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$.

D'où $x \longmapsto x\ln(2-x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\,x\ln(2-x)\,)' \\ &= x(\ln(2-x))' + \ln(2-x) \\ &= \frac{-x}{2-x} + \ln(2-x) \quad ; \quad \forall\, x \in [0,1] \end{aligned}$$

La Question : 1) c)

La fonction $f'(x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme étant somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

$$f''(x) = \frac{-1}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\right) = \frac{x-4}{(2-x)^2}$$

On remarque que $\forall\, x \in [0,1] \ : \ f''(x) < 0$

Donc f' est strictement décroissante sur I.

La Question : 1) d)

On a f' est continue et strictement monotone sur l'intervalle I (décroissante).

Alors $f' \ : \ [0,1] \longmapsto [-1\,,\ln 2]$ est une bijection.

C-à-d : $(\forall\, y \in [-1;\ln 2])\ (\exists!\, x \in [0,1]) \ : \ f'(x) = y$

C-à-d : $(pour\ 0 \in [-1;\ln 2])\ (\exists!\, \alpha \in [0,1]) \ : \ f'(\alpha) = 0$

Comme : $f'(0) = \ln 2 \quad et \quad f'(1) = -1$.

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2-\alpha) - \frac{\alpha}{2-\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2-\alpha) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\,\ln(2-\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}} \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$Soit \quad x \in [0,1]$

$$Si \quad x \geq \alpha \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad f'(x) \leq f'(\alpha) \quad car \quad f' \ est \ \searrow \ I \\ &\Rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \quad car \quad f'(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f \ est \ \searrow \ sur \ [\alpha, 1]. \end{aligned}$$

$$Si \quad x \leq \alpha \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad f'(x) \geq f'(\alpha) \quad car \quad f' \ est \ \searrow \ I \\ &\Rightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad car \quad f'(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f \ est \ \nearrow \ sur \ [0, \alpha]. \end{aligned}$$

Ainsi on déduit le tableau suivant :

x	0	α	1
$f'(x)$	$\ln 2$	0	-1
f	$0 \nearrow$	$\dfrac{\alpha^2}{2-\alpha}$	$\searrow 0$

La Question : 2) b)

We have just found that the second derivative $f''(x)$ is always negative :

$$\forall\, x \in I \quad ; \quad f''(x) < 0$$

So the curve $(\mathcal{C})$ is concave. How about that ☺

La Question : 2) c)

Soient x *et* t deux éléments de I tels que $x < t$

$$\left|\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [x,t] \subset [0,1] \\ f \text{ est dérivable sur }]x,t[\subset [0,1] \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c \in\,]x,t[\quad ; \quad \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(c)$$

$$c \in\,]x,t[\quad \Rightarrow \quad c \leq t$$

$$\Rightarrow \quad f'(c) \geq f'(t) \quad ; \quad car \;\; f' \;\; est \;\searrow\; sur \;\; I$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) \geq f'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) \leq (x-t)f'(t) + f(t)} \quad (*)$$

La Question : 2) d)

Pour $t = 0$ l'inégalité $(*)$ devient :

$$f(x) \leq x\, f'(0) + f(0)$$

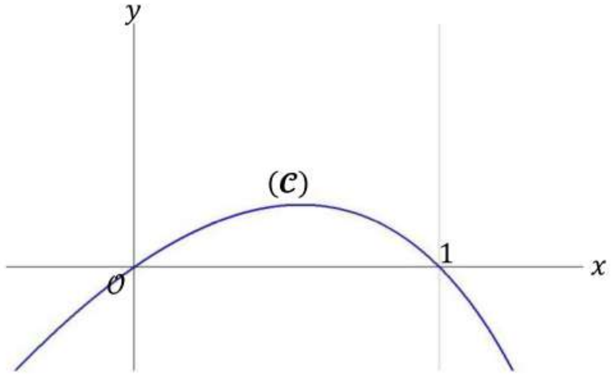
$$C-\text{à}-d \quad : \quad \boxed{f(x) \leq x \ln 2}$$

Pour $t = 1$ l'inégalité $(*)$ devient :

$$f(x) \leq (x-1)\, f'(1) + f(1)$$

$$C-\text{à}-d \quad : \quad \boxed{f(x) \leq 1 - x}$$

La Question : 3)



Just think about it ☺

> **" Science is about knowing ; engineering is about doing "**

La Question : 4)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx \qquad \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$

$$= \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(2-x)}_{v}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(2-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(\frac{-1}{2-x}\right) dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{-1}{2-x}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{4} - 1 - 2[\ln|2-x|]_0^1$$

$$= \frac{-1}{4} - 1 - 2(-\ln 2)$$

$$= \left(\frac{8\ln 2 - 5}{4}\right) \; \|\vec{\imath}\|^2$$

$$= \left(\frac{8\ln 2 - 5}{4}\right) \; (4\, cm^2)$$

$$= (8\ln 2 - 5) \; cm^2$$

Remarque :

J'ai effectué dans mon brouillon, la division euclidienne de x^2 par $(2-x)$ pour justifier l'identité suivante :

$$\left(\frac{x^2}{2-x}\right) = \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x}\right)$$

La partie deux :

La Question : 1) a)

$$x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} et \; bien \;\; 0 \leq x^n \leq 1 \quad ; \quad \forall\, n \geq 2 \\ et \; bien \;\; 1 \leq 2 - x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x^n \leq 1 \\ 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x^n \ln(2-x) \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_n(x) \geq 0}$$

$$Et \quad Encore \quad : \quad \begin{cases} f_n(0) = 0^n \cdot \ln(2-0) = 0 \\ f_n(1) = 1^n \cdot \ln(2-1) = 0 \end{cases}$$

La Question : 1) b)

La fonction $f_n(x)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions continues et dérivables sur I.

Et on a $f_n(0) = f_n(1)$ donc d'après le théorème de **Rolle** : $\exists\, \alpha_n \in\,]0,1[\ :\ f_n^{'}(\alpha_n) = 0$

La Question : 2) a)

La fonction f_n est dérivable sur l'intervalle I comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur I.

$$\begin{aligned} f_n^{'}(x) &= (x^n \ln(2-x))^{'} \\ &= n\, x^{n-1}\cdot \ln(2-x) - \frac{x^n}{2-x} \\ &= x^{n-1}\left(n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}\right) \\ &= x^{n-1}\cdot g_n(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} g_n^{'}(x) &= \frac{-n}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\right) \\ &= \frac{-n(2-x)-2}{(2-x)^2} \\ &= nx - 2n - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in I &\Rightarrow x \leq 1 \\ &\Rightarrow nx \leq n \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq n - 2n - 2 \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq -(n+1) < 0 \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{nx-2n-2}{(2-x)^2} < 0 \\ &\Rightarrow g_n^{'}(x) < 0 \\ &\Rightarrow g_n \ est \searrow sur\ I \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Comme g_n est continue et étant strictement décroissante alors $g_n : [0,1] \mapsto [-1\,;\, n\ln 2\,]$ est une bijection de $[0,1]$ vers son image $[-1, n\ln 2]$ avec $g_n([0,1]) = [-1\,;\,n\ln 2]$ d'où selon la définition de la bijection on écrit :

$$(\forall\, y \in [-1\,;n\ln 2]),\quad (\exists!\, x \in [0,1])\ :\ g_n(x) = y$$

$$(pour\ \ 0 \in [-1\,;n\ln 2]), (\exists!\, \alpha_n \in [0,1])\ :\ g_n(\alpha_n) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\alpha_n)^{n-1}\cdot g_n(\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n^{'}(\alpha_n) = 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned} f_n^{'}(\alpha_n) = 0 &\Leftrightarrow g_n(\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow n\cdot\ln(2-\alpha_n) - \frac{\alpha_n}{2-\alpha_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow n\cdot\ln(2-\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{2-\alpha_n} \\ &\Leftrightarrow \ln(2-\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n}{2-\alpha_n}\right) \\ &\Leftrightarrow (\alpha_n)^n\cdot\ln(2-\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}\right) \\ &\Leftrightarrow f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}\right) \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$\alpha_n \in\,]0,1[\ \ ;\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < \alpha_n < 1 \quad et \quad 0 < \alpha_{n+1} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < (2-\alpha_n) < 2 \quad et \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2-\alpha_n} < 1 \quad et \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \left|\frac{1}{2-\alpha_n}\right| < 1 \quad et \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \left|\frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_n}\right| < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_n}\right| < \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow |f_n(\alpha_n)| < \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0} \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty} f_n(\alpha_n) = 0} \end{aligned}$$

La Question : 3) c)

$$g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\ln(2-\alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(n+1)\ln(2-\alpha_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}}}$$

$$\begin{aligned} On\ a\ :\ g_n(\alpha_{n+1}) &= n\ln(2-\alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}} \\ &= n\ln(2-\alpha_{n+1}) - (n+1)\ln(2-\alpha_{n+1}) \\ &= -\ln(2-\alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

La Question : 3) d)

$$D'abord \quad g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) \left| \begin{aligned} &= -\ln(2-\alpha_{n+1}) - 0 \\ &= -\ln(2-\alpha_{n+1}) \end{aligned} \right.$$

$$\alpha_{n+1} \in \,]0,1[\quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad -\alpha_{n+1} > -1$$

$$\Rightarrow \quad 2 - \alpha_{n+1} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln(2-\alpha_{n+1}) > 0$$

$$\Rightarrow \quad -\ln(2-\alpha_{n+1}) < 0$$

$$\Rightarrow \quad g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) < 0$$

$$\Rightarrow \quad g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow \quad g_n^{-1}\big(g_n(\alpha_{n+1})\big) < g_n^{-1}\big(g_n(\alpha_n)\big)$$

$$Car \ g_n \ est \ une \ bijection \ décroissant \ sur \ [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{n+1} > \alpha_n \quad ; \quad \forall\, n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_n)_{n\geq 2} \ est \ une \ suite \ croissante$$

La Question : 3) e)

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est une suite convergente car croissante et étant majorée par 1.

$$car \quad 0 < \alpha_n < 1 \quad soit \quad ainsi \quad \lim(\alpha_n) = \ell$$

La Question : 3) f)

$$On \ a \quad : \quad 0 < \alpha_n < 1$$

$$Alors \ par \ passage \ aux \ limites \quad : \quad 0 < \ell < 1$$

Comme f_n est continue sur $[0,1]$.

Alors : $\lim\limits_{n\infty} f_n(\alpha_n) = f_n\left(\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)\right) = f_n(\ell) = 0$

(c-à-d intervertir les signes lim et f_n)

$$\left| \begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \ell^n \ln(2-\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(2-\ell) = 0 \quad car \quad \ell \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1} \end{aligned} \right.$$

La partie trois :

La Question : 1)

$$x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} et\ bien \ \ 1 \leq (2-x) \leq 2 \\ et\ bien \ \ x \cdot x^n \leq x^n \quad car \quad x^n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} et\ bien \ \ 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \\ et\ bien \ \ x^{n+1} \leq x^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x^{n+1} \cdot \ln(2-x) \leq x^n \cdot \ln(2-x)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} \cdot \ln(2-x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \cdot \ln(2-x)\,dx$$

Car la continuité est vérifiée et 0<1 garde le sens de l'inégalité inchangée.

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \qquad ; \qquad \forall n \geq 2$$

La suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante en plus elle est minorée par 0 donc convergente.

La Question : 2)

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$\left| \begin{aligned} &= \int_0^1 \underbrace{x^n}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(2-x)}_{u(x)}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(2-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\left(\frac{-1}{2-x}\right)dx \\ &= 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx} \end{aligned} \right.$$

La Question : 3) a)

$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} et\ bien \ \ 2 - x > 1 \\ et\ bien \ \ x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} et\ bien \ \ 0 < \left(\dfrac{1}{2-x}\right) < 1 \\ et\ bien \ \ 0 < x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx \leq \int_0^1 1\,dx$$

La continuité est vérifié et $0 < 1$.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right)dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

La Question : 3) b)

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \leq I_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(I_n) = 0}$$