ROYAUME DU MAROC

13

2020 N

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION Normale : JUILLET 2020

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Dimanche 19 juillet 2020

2ième BAC - SM
MAROC

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

Première Méthode :

$$(x,y)\ est\ solution\ de\ (D) \iff 7x^3 - 13y = 5$$

$$soit\ \ d = x \wedge 13 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ d/13 \\ \Rightarrow \ d \in \{1\,;13\} \end{array} \right.$$

$$Si\ \ d = 13 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ 13 = x \wedge 13 \\ \Rightarrow \ 13/x \\ \Rightarrow \ x = 13k \ ; \ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \ 7(13k)^3 - 13y = 5 \\ \Rightarrow \ 13\left(\underbrace{7(13k)^2 - y}_{=k'\in\mathbb{Z}}\right) = 5 \\ \Rightarrow \ 13/5 \ \ contradiction \\ \Rightarrow \ d \neq 13 \\ \Rightarrow \ \boxed{d = 1} \end{array} \right.$$

Deuxième Méthode :

Les cas possibles du reste de la division euclidienne d'un entier naturel sur le nombre 5 sont : $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

Il est clair que :

$$Si \begin{cases} x \equiv 0\,[5] \\ y = 0\,[5] \end{cases} \quad Alors \ \ (7x^3 - 13y) \equiv 0\,[5]$$

$$C-\text{à}-d \ : \ 5 \equiv 0\,[5]$$

Donc ce cas est clairement plausible.

On suppose maintenant que $\begin{cases} x \equiv r\,[5] \\ y \equiv r'\,[5] \end{cases}$

$avec\ \ r\ et\ r'\ appartiennent\ \text{à}\ \{1,2,3,4\}$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \ 7x^3 \equiv 7r^3\,[5] \quad et \quad -13y \equiv -13r'\,[5] \\ \Rightarrow \ (7x^3 - 13y) \equiv (7r^3 - 13r')\,[5] \\ \Rightarrow \ 5 \equiv (7r^3 - 13r')\,[5] \\ \Rightarrow \ 7r^3 - 13r' = 0 \quad ou \quad 7r^3 - 13r' = 5 \\ \Rightarrow \ \boxed{7r^3 = 13r'} \quad ou \quad \boxed{7r^3 = (5 + 13r')} \\ \quad Avec \quad r \in \{1\,;2\,;3\,;4\} \quad et \quad r' \in \{1\,;2\,;3\,;4\} \\ \Rightarrow \ contradiction\ (Absurde) \end{array}$$

$$Car\ : \ Si\ \ r' = 1 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ 7r^3 = 13 \quad ou \quad 7r^3 = 18 \\ \Rightarrow \ r = 1{,}22 \quad ou \quad r = 1{,}36 \\ \Rightarrow \ r \notin \{1\,;2\,;3\,;4\} \end{array} \right.$$

$$Si\ \ r' = 2 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ 7r^3 = 26 \quad ou \quad 7r^3 = 31 \\ \Rightarrow \ r = 1{,}54 \quad ou \quad r = 1{,}63 \\ \Rightarrow \ r \notin \{1\,;2\,;3\,;4\} \end{array} \right.$$

$$Si\ \ r' = 3 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ 7r^3 = 39 \quad ou \quad 7r^3 = 44 \\ \Rightarrow \ r = 1{,}76 \quad ou \quad r = 1{,}83 \\ \Rightarrow \ r \notin \{1\,;2\,;3\,;4\} \end{array} \right.$$

$$Si\ \ r' = 4 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \ 7r^3 = 52 \quad ou \quad 7r^3 = 57 \\ \Rightarrow \ r = 1{,}93 \quad ou \quad r = 1{,}99 \\ \Rightarrow \ r \notin \{1\,;2\,;3\,;4\} \end{array} \right.$$

D'après ce raisonnement par l'absurde on en déduit que l'hypothèse $\begin{cases} x \equiv r\,[5] \\ y \equiv r'\,[5] \end{cases}$; $r, r' \in [\![1,4]\!]$ est fausse. Donc $x \equiv 0[5]$ et $y \equiv 0[5]$.

$$D'o\text{ù} \ : \ x = 5k \quad et \quad y = 5k' \ ; \ k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \ 7x^3 - 13(5k') = 5 \\ \Rightarrow \ x(7x^2) - 13(5k') = 5 \\ \Rightarrow \ x(\,7\cdot(5k)^2\,) - 13(5k') = 5 \\ \Rightarrow \ x(\,7\cdot 5\cdot k^2\,) + 13(-k') = 1 \\ \Rightarrow \ xu + 13v = 1 \ ; \ \left| \begin{array}{l} u = 7\cdot 5\cdot k^2 \in \mathbb{Z} \\ v = -k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ \Rightarrow \ \boxed{x \wedge 13 = 1} \ ; \ selon\ Bezout \end{array}$$

La Question : 1) b)

$$\left|\begin{array}{l} 13 \; premier \\ x \wedge 13 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow x^{13-1} \equiv 1\,[13] \quad ; \quad selon \; Fermat$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{12} \equiv 1\,[13]}$$

La Question : 1) c)

$$13 \equiv 0\,[13] \left| \begin{array}{l} \Rightarrow 13y \equiv 0\,[13] \\ \Rightarrow (7x^3 - 5) \equiv 0\,[13] \\ \Rightarrow \boxed{7x^3 \equiv 5\,[13]} \quad (1) \end{array}\right.$$

$$Or \quad \boxed{70 \equiv 5\,[13]} \quad (2)$$

$$(1) \; et \; (2) \quad \Rightarrow \quad 7x^3 \equiv 70\,[13]$$

$$\left|\begin{array}{l} \Rightarrow 13/(7x^3 - 70) \\ \Rightarrow 13/7(x^3 - 10) \\ \Rightarrow 13/(x^3 - 10) \quad car \quad 13 \wedge 7 = 1 \quad (Gauss) \\ \Rightarrow \boxed{x^3 \equiv 10\,[13]} \end{array}\right.$$

La Question : 1) d)

$$x^3 \equiv 10\,[13] \quad \Rightarrow \quad x^3 \equiv -3\,[13] \quad car \quad 10 \equiv -3[13]$$

$$\left|\begin{array}{l} \Rightarrow (x^3)^4 \equiv (-3)^4\,[13] \\ \Rightarrow x^{12} \equiv 81\,[13] \\ \Rightarrow \boxed{x^{12} \equiv 3\,[13]} \quad car \quad 81 \equiv 3\,[13] \end{array}\right.$$

La Question : 2)

Par l'absurde on suppose que (D) est solvable dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^{12} \equiv 1\,[13]} \quad et \quad \boxed{x^{12} \equiv 3\,[13]}$$

Et ce d'après les résultats précédents.

$$\Rightarrow \quad \boxed{3 \equiv 1\,[13]} \quad transitivit\acute{e} \; de \; la \; relation \; (\equiv)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{13 \; divise \; 2} \quad absurde \; et \; contradiction$$

$$Donc \; (D) \; n'admet \; aucune \; solution \; dans \; \mathbb{Z}^2$$

Remarque :

L'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$ peut être se ramener à l'équation (E) : $7a - 13b = 5$ à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ par la méthode classique.

$$\begin{array}{c|c} 13 & 7 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{13 \wedge 7 = 7 \wedge 6}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{7 \wedge 6 = 6 \wedge 1 = 1}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 1 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad Stop \\ \Rightarrow \quad PGCD(13{,}7) = 1 \end{array}$$

Comme 5 ne divise pas 1 Alors (E) n'est pas solvable dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (D) non plus ☹.

Le Deuxième Exercice

La Question : 1) a)

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad ; \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$$

D'abord $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme indiquée ci-dessus.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ deux matrices de E .

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix} \in E$$

$$Car \quad x' + xy' \in \mathbb{R} \quad et \quad yy' \in \mathbb{R}^* \quad car \quad \left|\begin{array}{l} y \in \mathbb{R}^* \\ y' \in \mathbb{R}^* \end{array}\right.$$

La conclusion :

$$\forall \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E$$

Donc $\times$ est une loi de composition interne sur E

Ainsi : E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \times)$

La Question : 1) b)

Si $\times$ est commutative sur E, Alors On aurait :

$$\forall \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Le fait de prouver que $\times$ n'est pas commutative revient à exhiber un contre exemple.

$$On \; a \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$$

L'expression yy' est commutative donc le contre exemple dépendra de l'expression $x' + xy'$, il suffirait de choisir $x \neq x'$ *et* y, y' n'importe lesquels.

$$Soient \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad deux \; \acute{e}l\acute{e}ments \; de \; E$$

$$On \; a \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$et \; On \; a \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\times$ n'est pas commutative sur E.

Attention à ne pas dire :

Comme $\times$ n'est pas commutative sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Alors $\times$ n'est pas commutative sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est faux ☹ car ils existent des sous ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ là où la multiplication serait commutative.

La Question : 1) c)

Juste un simple calcul matriciel.

$$\begin{pmatrix}1 & x\\0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\0 & y\end{pmatrix}=I$$

La Question : 2)

Vous avez le choix entre deux méthodes, la première consiste à démontrer via la définition d'un groupe que :

- $\times$ est une LCI sur E. (Stabilité)
- $\times$ est une loi associative sur E (stabilité de E dans $(\mathcal{M}_2(\mathcal{M}),\times)$)
- $\times$ admet un élément neutre I (à travers la stabilité et $I \in E$)
- Les éléments de E sont symétrisables par rapport à $\times$. (déjà prouvé)
- $\times$ n'est pas commutative sur E, déjà prouvé , juste pour justifier la qualification groupe non commutatif.

Deuxième Méthode :

Cette deuxième méthode adopte la notion d'un sous groupe et consiste à prouver que :

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe (d'après le cours)
- $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ C'est trivial.
- $\forall A,B \in E \ ; \ A\times sym(B) \in E$
- $\times$ est non commutative sur E (déjà vu).

Pour la troisième assertion, elle est très simple :

$$\begin{pmatrix}1 & x\\0 & y\end{pmatrix}\times sym\begin{pmatrix}1 & a\\0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \frac{-a}{b}\\0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)\\0 & \frac{y}{b}\end{pmatrix}\in E \quad ; \quad car \ \left|\begin{array}{l}\left(\frac{x-a}{b}\right)\in\mathbb{R}\\ y\neq 0 \ ; \ b\neq 0\end{array}\right.$$

La Question : 3) a)

Soit $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\0 & x\end{pmatrix} \ ; \ x\in\mathbb{R}^*\right\}$

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi : (\mathbb{R}^*,\times) & \mapsto & (F,\times)\\ x & \mapsto & M(x)\end{array}}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^{2*}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x)\times\varphi(y) &= M(x)\times M(y)\\ &=\begin{pmatrix}1 & x-1\\0 & x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & y-1\\0 & y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & xy-1\\0 & xy\end{pmatrix}\\ &= M(xy)\in E \quad car \quad xy\in\mathbb{R}^*\\ &=\varphi(xy)\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme.

La Question : 3) b)

On montre d'abord que φ est bijective.

Soit $M(a)$ une matrice donnée dans F, On va résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation d'inconnue x suivante : $\varphi(x)=M(a) \iff M(x)=M(a)$.

$$\iff \begin{pmatrix}1 & x-1\\0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a-1\\0 & a\end{pmatrix}$$

$$\iff x=a$$

$$d'où \ \ \forall M(a)\in E \ ; \ \exists! \, x=a\in\mathbb{R}^* \ : \ \varphi(x)=M(a)$$

$$C-à-d \ \ que \ \varphi \ est \ un \ isomorphisme.$$

$$D'où \quad \varphi(\mathbb{R}^*,\times)=(F,\times)$$

Comme $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif et comme φ est un isomorphisme alors $\varphi(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif c-à-d $(F,\times)$.

Les caractéristiques de $(F,\times)$ sont héritées de l'ensemble $(\mathbb{R}^*,\times)$ via l'application φ .

Pour le groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$ on a :

- $\times$ est commutative sur $\mathbb{R}^*$
- $\times$ est associative sur $\mathbb{R}^*$
- 1 est l'élément neutre dans $\mathbb{R}^*$
- $\frac{1}{x}=symétrique(x)$ dans $\mathbb{R}^*$

Alors pour le groupe $(F,\times)$ on a :

- $\times$ est commutative sur F
- $\times$ est associative sur F
- $\varphi(1)=M(1)=I$ est l'EN dans F
- $symétrique(M(x))=symétrique(\varphi(x))$

$$\begin{aligned}&=\varphi(symétrique(x))\\ &=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=M\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Le Troisième Exercice

La partie une :

La Question : 1)

$$(E) : \quad z^3 - 2m\,z^2 + 2m^2\,z - m^3 = 0$$

En effectuant la division euclidienne du côté de gauche par le polynôme $(z-m)$ l'équation (E) devient : $(z-m)(z^2 - mz + m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad z - m = 0 \quad et \quad z^2 - mz + m^2 = 0 \; : \; (E')$$

$$\Delta_{(E')} = (-m)^2 - 4m^2 = \left(\sqrt{3}\,i\,m\right)^2$$

$$z_1 = \frac{m - \sqrt{3}\,i\,m}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)m = \boxed{m\,e^{\frac{-i\pi}{3}}} \quad ; \quad z_2 = \frac{m + \sqrt{3}\,i\,m}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)m = \boxed{m\,e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est défini explicitement par ce qui suit :

$$S = \left\{ m \;;\; m\,e^{\frac{i\pi}{3}} \;;\; m\,e^{\frac{-i\pi}{3}} \right\}$$

La Question : 2) a)

Première Méthode :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$$

Car en général ; si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ Alors :

$$\boxed{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}} \quad et \quad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

Deuxième Méthode :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \left(m\,e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{-1} + \left(m\,e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{m}\left(e^{\frac{-i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{i0}$$

$$= \frac{1}{m} \times 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{m}}$$

La Question : 2) b)

$$m = 1 + e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{0 - \frac{\pi}{3}}{2}\right)e^{i\left(\frac{0+\frac{\pi}{3}}{2}\right)}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{3}\,e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$Ainsi \;:\; z_1 = m\,e^{\frac{-i\pi}{3}} = \sqrt{3}\cdot e^{\frac{i\pi}{6}}\cdot e^{\frac{-i\pi}{3}} = \boxed{\sqrt{3}\,e^{\frac{-i\pi}{6}}}$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$Encore \;:\; z_2 = m\,e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3}\cdot e^{\frac{i\pi}{6}}\cdot e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3}\,e^{\frac{i\pi}{2}} = \boxed{\sqrt{3}i}$$

La partie deux :

La Question : 1)

$$On \; a \;:\; \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{m\,e^{\frac{-i\pi}{3}}}{m\,e^{\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Donc les points O ; A ; B ne sont pas alignés.

La Question : 2) a)

$$r_1(O) = A \quad \Leftrightarrow \quad (z_A - z_P) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_O - z_P)$$

$$\Leftrightarrow \quad m\,e^{\frac{i\pi}{3}} - p = i(-p)$$

$$\Leftrightarrow \quad p(1-i) = m\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\cdot\left(e^{i0} + e^{\frac{-i\pi}{2}}\right) = m\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\cdot\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{\frac{-i\pi}{4}} = m\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{\frac{-i\pi}{4}} = m\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{m\,e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{i7\pi}{12}} = \boxed{\frac{m\sqrt{2}}{2}\,e^{\frac{i7\pi}{12}}}$$

$$r_3(B) = \mathcal{O} \iff (z_{\mathcal{O}} - z_R) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_R)$$
$$\iff -r = i\left(m\, e^{\frac{-i\pi}{3}} - r\right)$$
$$\iff -r = i\, m\, e^{\frac{-i\pi}{3}} - ir$$
$$\iff r(i-1) = i\, m\, e^{\frac{-i\pi}{3}}$$
$$\iff r\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot m \cdot e^{\frac{-i\pi}{3}}$$
$$\iff r \cdot \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}} = m \cdot e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\iff r \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}} = m \cdot e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\iff r = \frac{m\, e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{i3\pi}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{-i7\pi}{12}} = \boxed{\frac{m\sqrt{2}}{2}\, e^{\frac{-i7\pi}{12}}}$$

La Question : 2) b)

$$r_2(A) = B \iff (z_B - z_Q) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_A - z_Q)$$
$$\iff m\, e^{\frac{-i\pi}{3}} - q = i\left(m\, e^{\frac{i\pi}{3}} - q\right)$$
$$\iff m\, e^{\frac{-i\pi}{3}} - q = i\, m\, e^{\frac{i\pi}{3}} - iq$$
$$\iff q(i-1) = m\left(e^{\frac{i5\pi}{6}} - e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)$$
$$\iff q \times \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi}\right) = m\left(2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$
$$\iff q \times \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) e^{\frac{i3\pi}{4}} = m\left(2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) e^{\frac{i3\pi}{4}}$$
$$\iff q = \frac{m \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$
$$\iff \boxed{q = m \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

Just think about it ☺

“ Normal people believe that if it ain’t broke, don’t fix it. Engineers believe that if it ain’t broke, it doesn’t have enough features yet. “

La Question : 3)

$$\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_{\mathcal{O}}} = \frac{\frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{-i7\pi}{12}} - \frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{i7\pi}{12}}}{m\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$
$$= \frac{m\sqrt{2}}{2m\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\left(e^{\frac{-i7\pi}{12}} - e^{\frac{i7\pi}{12}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\left(2i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) e^{i0}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\left(-2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \boxed{-i}$$

$$D'où : \boxed{\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_{\mathcal{O}}} = -i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_R - z_P}{z_Q - z_{\mathcal{O}}}\right| = |-i| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_R - z_P}{z_Q - z_{\mathcal{O}}}\right) \equiv \arg(-i)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_R - z_P| = |z_Q - z_{\mathcal{O}}| \\ \arg\left(\dfrac{z_R - z_P}{z_Q - z_{\mathcal{O}}}\right) \equiv \pi + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PR = \mathcal{O}Q \\ \left(\overrightarrow{\mathcal{O}Q}\,;\,\overrightarrow{PR}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PR = \mathcal{O}Q \\ (\mathcal{O}Q) \perp (PR) \end{cases}$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1)

$$Soit\ \ \varphi(t) = \ln t \Rightarrow \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in\,]x\,;\,x+1[\ ;\ \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{(x+1) - x} = \varphi'(c)$$
$$\Rightarrow x < c < x+1\ ;\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}\ ;\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$$
$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}}}_{(P)}\ ;\ x > 0$$

La Question : 2) a)

$$d'abord \quad : \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$On\ a \quad : \quad \forall\, x>0 \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{x+1} < x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^2}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}_{x\to 0^+ \ \to\ \boxed{0}} < \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) < \underbrace{(x)}_{x\to 0^+\ \to\ \boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0 = f_d'(0)$$

$$\Rightarrow \quad f \ est\ dérivable\ à\ droite\ \ en\ \ zéro.$$

La Question : 2) b)

$$On\ a \quad : \quad \forall\, x>0 \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^3}{x+1} < x^3\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^3}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underbrace{\left(\frac{x^3}{x+1}\right)}_{x\to+\infty\ \to\ \boxed{+\infty}} < f(x)} < x^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty} \ (1)$$

$$Or \quad \boxed{\underbrace{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}_{x\to+\infty\ \to\ \boxed{+\infty}} < \frac{f(x)}{x}} < x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty} \ (2)$$

D'après les résultats (1) et (2) on peut en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe (OY) l'axe des ordonnées.

La Question : 3) a)

On a $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a aussi la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ Donc la composition $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables. Finalement $x \mapsto x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' \quad ; \quad \forall\, x>0$$

$$= 3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3\ \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= 3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3\ \left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= 3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x+1}$$

$$= 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right)$$

La Question : 3) b)

$$On\ a \ : \ \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad selon\ (P) \\ \dfrac{1}{3(x+1)} < \dfrac{1}{x+1} & car \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$Donc \quad : \quad \frac{1}{3(x+1)} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad ; \quad \forall\, x \in [0,+\infty[$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f\ est\ strictement\ croissante\ sur\ [0,+\infty[}$$

La Question : 3) c)

x	$\boxed{0}$ $\boxed{+\infty}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\boxed{0} \nearrow \boxed{+\infty}$

La Question : 4) a)

$$Soit \quad x > 0 \quad : \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{x\left(f'(x) - f(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$$

$$= 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= (3x - x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$$

$$= 2x\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$$

$$= \boxed{2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)}$$

De la même manière que dans la question 3)b) on montre facilement la chose suivante :

$$2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right) > 0$$

D'où g est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

La Question : 4) b)

La fonction $g \ : \ ]0,+\infty[\ \mapsto g(\,]0,+\infty[\,)$ est une bijection car g est continue et étant strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

$$g(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to0^+} g(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$

$$= \left]\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\right[$$

$$=]0 \ ; \ +\infty[$$

comme $g \ : \ ]0,+\infty[\ \mapsto \ ]0,+\infty[$ est bijective :

$$\forall\, y \in]0,+\infty[\quad ; \quad \exists!\, x \in]0,+\infty[\quad : \quad g(x) = y$$

$$pour \quad 1 \in]0,+\infty[\quad ; \quad \exists!\, \alpha \in]0,+\infty[\quad : \quad g(\alpha) = 1$$

C-à-d l'équation $g(x) = 1$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

$$Pourquoi \quad 1 < \alpha < 2 \quad ?$$

$$On\ a \quad : \quad g(1) = f(1) = \ln 2 = 0{,}7$$

$$On\ a \quad : \quad g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{8\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2} = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{1{,}6}$$

$$On\ a \quad : \quad 0{,}7 < 1 < 1{,}6 \quad \Rightarrow \quad g(1) < g(\alpha) < g(2)$$

$$\Rightarrow \quad g^{-1}\big(g(1)\big) < g^{-1}\big(g(\alpha)\big) < g^{-1}\big(g(2)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1 < \alpha < 2} \quad \text{CQFD}$$

La Question : 4) c)

$$Si \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0$$

$$Si \quad x \neq 0 \quad l'équation \quad f(x) = x$$

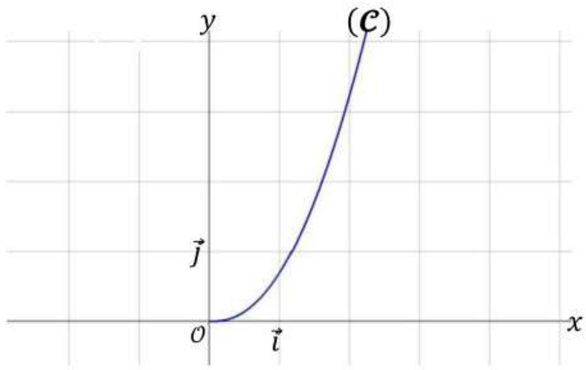
$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \alpha}$$

D'où l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions 0 et α.

La Question : 5) a)



La Question : 5) b)

$f \ : \ I \ \mapsto f(I)$ est une bijection car continue et étant strictement croissante :

$$f(I) = f(\,[0,+\infty[\,) = \left[f(0) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0,+\infty[= I$$

La partie deux :

La Question : 1)

Soit le prédicat $P(n) \ : \ 0 < u_n < \alpha$ à démontrer la véracité par récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation : pour $n = 0$ on a : $0 < u_0 < \alpha$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

$$P(n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad 0 < u_n < \alpha$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(\alpha) \quad ; \quad f\ est\ \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P(n+1) \quad est \quad vraie$$

$$d'où \quad : \quad \begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où d'après le principe de récurrence on en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \alpha$.

La Question : 2) a)

La fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc l'image de n'importe quel intervalle inclus dans $]0,+\infty[$ est un intervalle.

$$Ainsi \quad : \quad g(]0,\alpha[) = \left]\lim_{x\to 0^+} g(x)\ ;\ g(\alpha)\right[$$

$$= \left]\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\ ;\ g(\alpha)\right[$$

$$=]1\,,\alpha[$$

La Question : 2) b)

On a $g\ :\ ]0,\alpha[\ \mapsto\ ]0,1[$ est une bijection car continue et étant strictement croissante. Donc :

$$(\forall\, y \in]0,1[)\ \ (\exists!\, x \in]0,\alpha[)\quad :\quad g(x) = y$$

$$Autrement-dit \quad (\forall\, x \in]0,\alpha[)\ \ :\ \ g(x) \in]0,1[$$

$$Ou\ encore \ \ : \quad \boxed{(\forall\, x \in]0,\alpha[)\ \ :\ \ g(x) < 1}\ \ (*)$$

$$Pour\ \ x = u_n \in]0,\alpha[\ ,\ \ on\ aurait\ \ \ g(u_n) < 1$$

$$C-\text{à}-d \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad \frac{f(u_n)}{u_n} < 1$$

$$C-\text{à}-d \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad f(u_n) < u_n$$

$$C-\text{à}-d \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_n < f^{-1}(u_n)$$

$$C-\text{à}-d \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad u_n < u_{n+1}$$

$$C-\text{à}-d \quad la\ suite\ \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \ est\ \ strictement\ \ \nearrow$$

La Question : 2) c)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car croissante et étant majorée par α. (car $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n < \alpha$)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.

On a aussi $u_0 \in [0,+\infty[\ \ et\ \ f^{-1}([0,+\infty[) \subseteq [0,+\infty[$

Or la fonction f^{-1} est continue sur $[0,+\infty[$ et la suite $(u_n)_n$ est convergente vers un certain ℓ alors la limite ℓ vérifie l'équation $f^{-1}(\ell) = \ell$.

$$\Leftrightarrow \quad f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell \in \{\,0\,,\alpha\,\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \alpha \ \ car\ \ (u_n)_n\ \ \nearrow\ \ et\ \ \alpha > 0$$

La partie trois :

La Question : 1) a)

On a : $\forall\, x \geq 0\ \ ;\ \ f(x) \geq 0$ déjà vu ☺

Et f est continue sur $[0,+\infty[$

$$Si \quad x < 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt > 0$$

$$Si \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt < 0$$

$$Si \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$$

La Question : 1) b)

On a : $f(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Donc f admet des primitives sur $[0,+\infty[$.
En particulier, f admet une primitive φ sur $[0,+\infty[$ définie ainsi :

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \displaystyle\int_1^t f(t)dt \quad ; \quad 1 \in [0,+\infty[\\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(t) = f(t)\ \ ;\ \ \forall\, t \geq 0 \end{array}\right.$$

$$On\ \ a \ \ : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = -\varphi(x)$$

Donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \geq 0 \quad ; \quad F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

La Question : 1) c)

$$\forall\, x \geq 0 \quad ; \quad F'(x) = -f(x) \leq 0$$

Car : $\forall\, x \geq 0\ \ ;\ \ f(x) \geq 0$

Donc F est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

La Question : 2) a)

Soit $x \geq 1$ et $t \geq 1$.

$$t \geq 1 \quad \left|\begin{array}{l} \Rightarrow \quad f(t) \geq f(1) \quad ; \quad car\ f\ \nearrow \\ \Rightarrow \quad \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt \geq \int_x^1 \ln 2\,dt \quad ; \quad x \geq 1 \\ \Rightarrow \quad \boxed{F(x) \leq (1-x)\ln 2} \quad ; \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

La Question : 2) b)

$$F(x) \leq \underbrace{(1-x)\ln 2}_{x\to+\infty}\ \longrightarrow\ \boxed{-\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty}$$

La Question : 3) a)

$$F(x)=\int_x^1 \underbrace{t^3}_{u'(t)}\cdot\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}_{v(t)}dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1-\int_x^1\frac{t^4}{4}\left(\frac{\frac{-1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\left(\frac{t^3}{1+t}\right)dt$$

La Question : 3) b)

$$\int_x^1\left(\frac{t^3}{1+t}\right)dt=\int_x^1(t^2-t+1)\,dt-\int_x^1\left(\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right]_x^1-[\ln|t+1|]_x^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)-(\ln 2-\ln(x+1))$$

$$=\boxed{\frac{5}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)}$$

La Question : 3) c)

$$F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\ln 2+\ln(x+1)\right)$$

$$=-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{\ln(x+1)}{4}$$

La Question : 3) d)

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{5}{24}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to0^+}x^4\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{4}\times(0)=\boxed{\frac{5}{24}}$$

Mais pourquoi $\lim_{x\to0^+}x^4\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$?

parce que c'est $\lim_{x\to0^+}x^4\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to0^+}(x^4+x^3)\right)\times\left(\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\left(1+\frac{1}{x}\right)}}\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$=0\times0=\boxed{0}$$

Comme $\lim_{x\to0^+}F(x)=\frac{5}{24}$

Alors : $\lim_{x\to0^+}\int_x^1 f(t)dt=\frac{5}{24}$

C-à-d : $\boxed{\int_0^1 f(t)dt=\frac{5}{24}}$

La Question : 4) a)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $k\in[\![0\,;\,n-1]\!]$

D'abord : $\left(\frac{2k+1}{2n}-\frac{2k}{2n}\right)=\frac{1}{2n}>0$

D'où : $\boxed{\frac{2k+1}{2n}>\frac{k}{n}}$

Soit $t\in\left[\frac{k}{n}\,;\,\frac{2k+1}{2n}\right]\Rightarrow\frac{k}{n}\le t\le\frac{2k+1}{2n}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right)\le f(t)\le f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}}f\left(\frac{k}{n}\right)dt\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}}f(t)\,dt\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)dt$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{1}f(t)\,dt+\int_1^{\frac{2k+1}{2n}}f(t)\,dt$$

$$\le\left(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^1 f(t)\,dt-\int_{\frac{2k+1}{2n}}^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le F\left(\frac{k}{n}\right)-F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\le\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{-1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La Question : 4) b)

- $\dfrac{-1}{2n} f\left(\dfrac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\dfrac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \dfrac{-1}{2n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$Or \quad \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) < \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ou encore , en remplaçant k par $k+1$ à gauche

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{-1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

La Question : 4) c)

- $\dfrac{-1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \dfrac{-1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{-1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt}_{\text{Somme de Riemann}} \leq v_n \leq \underbrace{\frac{-1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt}_{\text{Somme de Riemann}}$$

$$\boxed{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{24}\right)} \qquad \boxed{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{24}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-5}{48}}$$

J'ai le droit d'utiliser les sommes de Riemann car f est continue sur $[0,+\infty[\ \supseteq [0,1]$.