★★★★

**ROYAUME DU MAROC**

# 12

**2019 R**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION**
**DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**
**BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES**
**SESSION De RATTRAPAGE : JUILLET 2019**
**PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI**
**OUARZAZATE, le Mercredi 10 juillet 2019**

**2ième BAC - SM**
**MAROC**

# Le Premier Exercice

## La Première partie

### La Question : I) 1) a)

$$(E_\alpha): \quad z^2 - i\alpha\sqrt{3}\, z - \alpha^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-i\alpha\sqrt{3}\right)^2 - 4(-\alpha^2)\\ &= -3\alpha^2 + 4\alpha^2 \\ &= \alpha^2\end{aligned}$$

### La Question : I) 1) b)

$$\Delta = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{i\alpha\sqrt{3} \pm \sqrt{\alpha^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ z_2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \end{cases}$$

### La Question : I) 2)

Soit $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$ ; $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z_2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha &= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)|\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i2\pi}{3}}\, |\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)|\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i\pi}{3}}\, |\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

## La Deuxième partie

### La Question : II) 1) a)

Soient : $\Omega(\alpha)$ ; $M_1\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$ ; $M_2\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$

et la rotation définie ainsi :

$$\mathcal{R}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \mathrm{M} = \mathcal{R}(\Omega) \quad &\Leftrightarrow \quad (z_M - z_0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_\Omega - z_0) \\ &\Leftrightarrow \quad (z_M - 0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(\alpha - 0) \\ &\Leftrightarrow \quad z_M = e^{\frac{i\pi}{3}}\alpha = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_M = z_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{M}_1 = \mathcal{R}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \mathrm{M}' = \mathcal{R}(\mathrm{M}_1) \quad &\Leftrightarrow \quad (z_{M'} - z_0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_{M_1} - z_0) \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = e^{\frac{i\pi}{3}} z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\, |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = z_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{M}_2 = \mathcal{R}(M_1)} \end{aligned}$$

## La Question : II) 1) b)

$$\mathcal{R}(\Omega) = M_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{et bien } \left(\overrightarrow{O\Omega};\, \overrightarrow{OM_1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{et bien } \Omega\widehat{O}M_1 = 60° \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{Le triangle } \Omega OM_1 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } \Omega\widehat{O}M_1 = 60° \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad M_1\widehat{\Omega}O = O\widehat{M}_1\Omega = 60°$$

$$\Rightarrow \quad O\Omega M_1 \text{ est équilatéral}$$

$$\mathcal{R}(M_1) = M_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{et bien } \left(\overrightarrow{OM_1};\, \overrightarrow{OM_2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{et bien } M_1\widehat{O}M_2 = 60° \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{Le triangle } \Omega M_1M_2 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } M_1\widehat{O}M_2 = 60° \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad O\widehat{M}_1M_2 = O\widehat{M}_2M_1 = 60°$$

$$\Rightarrow \quad OM_1M_2 \text{ est équilatéral}$$

## La Question : II) 2) a)

**Rappel** : $\boxed{e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$

$$z_1 - z_2 = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)} - |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(2i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}\right)$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(2i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= |\alpha| \cdot e^{i\lambda} \cdot \underbrace{(2i)\cdot\left(\tfrac{-1}{2}\right)\cdot(i)}_{1}$$

$$= |\alpha| \cdot e^{i\lambda}$$

$$= \alpha$$

## La Question : II) 2) b)

**Rappel** : $\boxed{(AB) \perp (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}}$

$$\frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_O} = \frac{z_2 - \alpha}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} - \frac{\alpha}{z_1}$$

$$= \frac{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}}{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}} - \frac{|\alpha|\, e^{i\lambda}}{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$= e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

$$= 2i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}$$

D'où : $\boxed{(\Omega M_2) \perp (OM_1)}$

## La Question : II) 2) c)

**Rappel** : un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

C-à-d qu'on pourrait montrer que le quadrilatère est un losange en montrant qu'il est d'abord un parallélogramme, Mais avec des diagonales qui soient perpendiculaires.

La deuxième méthode que je présume être recommandée est d'adopter un raisonnement basé sur la définition d'un losange. À savoir, un losange est un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur.

$$\begin{cases} O\Omega M_1 \text{ équilatéral} \\ OM_1M_2 \text{ équilatéral} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = \Omega M_1 \\ OM_1 = OM_2 = M_1M_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad O\Omega = OM_1 = M_1M_2 = OM_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{O\Omega M_1M_2 \text{ est un losange}}$$

## La Question : II) 3)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(C) = \mathcal{C}(O, |\alpha|)$ .

Soit $M\left(|\alpha|e^{i\theta}\right) \in (\mathcal{P})$

$$\begin{cases} O\Omega M_1 \text{ équilatéral} \\ OM_1M_2 \text{ équilatéral} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = |\alpha| \\ OM_1 = OM_2 = |\alpha| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad O\Omega = OM_1 = OM_2 = |\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad \{\Omega\,;\, M_1\,;\, M_2\} \in (C)$$

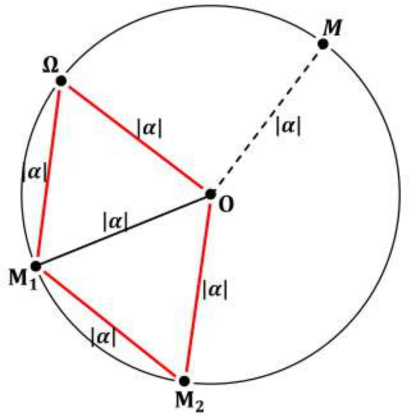
$\Rightarrow \quad \{\Omega\,;\, M_1\,;\, M_2\,;M\,\} \in (C)\ ;\ car\ |z_M| = |\alpha|$

$\Rightarrow \quad \{\Omega\,;\, M_1\,;\, M_2\,;M\,\}\ sont\ \ cocycliques$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_\Omega}\right) \times \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_\Omega}\right) \div \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha}\right) \div \left(\frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}\right) \in \mathbb{R}$$




# Le Deuxième Exercice

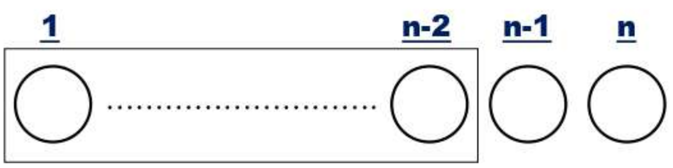
## La Question : 1)

D'abord, je signale que, dans cette expérience aléatoire, l'hypothèse d'équiprobabilité est bien évidemment vérifiée car les boules sont identiques et indiscernables au toucher.

Quand on tire n boules, l'une après l'autre, d'une urne contenant n boules au total, alors le nombre de résultats possibles correspond exactement au nombre de combinaisons de n éléments.

**Autrement-dit** : $card(\Omega) = n!$

Avec $\Omega$ est l'ensemble de toutes les éventualités possibles.




Vous avez ici $\boxed{n-2}$ emplacements

On a $(n-2)$ éventualités possibles pour qu'on ait la première boule étant la boule numéro 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la deuxième boule étant la boule numéro 2 qui suit la boule N° 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la troisième boule étant la boule numéro 3 qui va suivre la boule numéro 2.

Donc le nombre d'éventualités possibles correspondant à l'obtention des boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ dans cet ordre consécutif est $(n-2) \times 1 \times 1$

Ainsi :

$$p\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ consécutif \\ cet\ \ ordre \end{pmatrix} = \frac{card\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ consécutif \\ cet\ \ ordre \end{pmatrix}}{card(\Omega)} = \boxed{\frac{n-2}{n!}}$$

## La Question : 2)

On s'intéresse maintenant à l'ordre de sortie qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ , Mais peu importe la manière, consécutivement ou pas. Cet ordre précis nous permet de déterminer le nombre total d'éventualités possibles pour ce cas, ce nombre est $C_n^3$. Je n'ai pas adopter les arrangements $A_n^3$ parce que j'ai affaire à un seul ordre qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$. C'est comme on a tiré trois boules parmi n autres. Les arrangements $A_n^3$ prend en considération tous les ordres possibles, à savoir : 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ainsi :

$$p\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ cet\ \ ordre \\ consécutif\ ou\ non \end{pmatrix} = \frac{C_n^3}{card(\Omega)} = \boxed{\frac{1}{6(n-3)!}}$$

## La Question : 3)

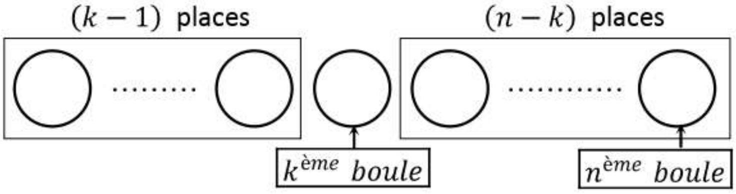
Soit $X_n$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirage nécessaires pour obtenir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$.

On remarque que la valeur minimale de $X_n$ est évidemment 3 c'est-à-dire qu'on peut obtenir les trois boules au cours des trois premiers tirages.
Et la valeur maximale est n. c'est-à-dire qu'on pourrait avoir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ au cours des trois derniers tirages de notre expérience aléatoire.
Donc les valeurs possibles de $X_n$ sont 3, 4, ... , n.
ou encore : $X_n(\Omega) = \{3, 4, \dots \dots \dots, n\}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire $X_n$ est l'application $P_{X_n}$ définie ainsi :

$$\begin{array}{llcl} P_{X_n} : & X_n(\Omega) & \longmapsto & [0,1] \\ & k & \longmapsto & P_{X_n}(k) = p[X_n = k] \end{array}$$

On considère le schéma suivant qui renseigne sur la forme générale de chaque résultat de la variable aléatoire $X_n$ défini dans l'énoncé.




Il y a 3 éventualités possibles valables pour l'emplacement numéro k. car cette place devrait recevoir ou bien la boule $\boxed{1}$, la boule $\boxed{2}$, ou bien la boule $\boxed{3}$.

Après avoir remplir l'emplacement numéro k, il nous reste deux boules parmi $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ pour les $(k-1)$ emplacement sur la figure.
Et la distribution de deux boules sur $(k-1)$ emplacements, en prenant en considération l'ordre, s'effectue selon $A_{k-1}^{2}$ différentes manières possibles.

Après avoir servir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$, il nous reste à distribuer les $(n-3)$ boules sur $(n-3)$ places vides. Et pour se faire, il existe $(n-3)!$ façons possibles.

Alors, d'après le principe multiplicatif, on dénombre facilement les cas possibles correspondant à la vérification de l'événement $(X_n = k)$ :

Soit : $card(X_n = k) = 3 \cdot A_{k-1}^{2} \cdot (n-3)!$

Ainsi : 
$$P_{X_n}(k) = P[X_n = k] = \frac{card(X_n = k)}{card(\Omega)}$$
$$= \frac{3(n-3)!\ A_{k-1}^{2}}{n!}$$
$$= \frac{3(n-3)!}{n!} \times \frac{(k-1)!}{(k-3)!}$$
$$= \frac{3(n-3)! \cdot (k-1)(k-2) \cdot (k-3)!}{n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)! \cdot (k-3)!}$$
$$= \boxed{\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}}$$

**Finalement**, la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_n$ est l'application $P_{X_n}$ définie ainsi :

$$P_{X_n} : \{3, 4, \ldots\ldots\ldots, n\} \longmapsto [0,1]$$
$$k \longmapsto P_{X_n}(k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

**À titre de vérification :**

$$\sum_{k=3}^{n} P_{X_n}(k) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} (k^2 - 3k + 2)$$
$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} [(i+3)^2 - 3(i+3) + 2]$$
$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} (i^2 + 3i + 2)$$
$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left( \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + \frac{3(n-3)(n-2)}{2} + 2(n-2) \right)$$
$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left( \frac{(n-3)(n-2)(2n-5) + 9(n-3)(n-2) + 12(n-2)}{6} \right)$$
$$= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left( \frac{2n^2 - 11n + 15 + 9n - 27 + 12}{6} \right)$$
$$= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left( \frac{2n^2 - 2n}{6} \right)$$
$$= \frac{3(n-2) \cdot 2n(n-1)}{6n(n-1)(n-2)}$$
$$= \frac{6n(n-1)(n-2)}{6n(n-1)(n-2)} = 1$$

*Ainsi* : $\boxed{\sum_{k=3}^{n} P_{X_n}(k) = 1}$

# Le Troisième Exercice

## La Question : 1) a)

**Rappel** : dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est une base si et si et seulement si $det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$.

$$On\ a\ :\ det(\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0$$

Donc $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $v_2$.

## La Question : 1) b)

Par la suite je vais adopter l'écriture $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ au lieu de $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ juste pour simplifier les écritures et être à l'aise dans la rédaction.

$$Ainsi\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

**La Question : 1) c)**

Soient $(X, Y, X', Y')$ un quadriletère dans $\mathbb{R}^4$ .

$$(X\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}) * (X'\overrightarrow{e_1} + Y'\overrightarrow{e_2}) =$$

$$= \left(X \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right) * \left(X' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + Y' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{X-Y}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{X'+Y'}{2} \\ \frac{X'-Y'}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(X+Y)(X'+Y') + (X-Y)(X'-Y')}{4} \\ \frac{(X+Y)(X'-Y') + (X-Y)(X'+Y')}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{XX' + YY'}{2} \\ \frac{XX' - YY'}{2} \end{pmatrix}$$

$$= XX' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + YY' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{XX'\,\overrightarrow{e_1} + YY'\overrightarrow{e_2}}$$

**La Question : 2) a)**

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $et$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de $v_2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'x + y'y \\ y'x + x'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est trop facile car la commutativité de la loi $*$ dans $v_2$ résulte de celle de la loi $+$ dans $\mathbb{R}$.

**La Question : 2) b)**

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $et$ $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ trois éléments de $v_2$.

Dans un premier temps, On a :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x''(xx' + yy') + y''(xy' + yx') \\ y''(xx' + yy') + x''(xy' + yx') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'yy'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix}$$

Et dans un second temps, On ait :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'x'' + y'y'' \\ x'y'' + y'x'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x(x'x'' + y'y'') + y(x'y'' + y'x'') \\ x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' + y'y'') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'yy'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix}$$

Donc $*$ est une loi associative sur $v_2$.

**La Question : 2) c)** Soit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ l'élément neutre

Alors : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \epsilon\, v_2$ ; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

À cause de la commutativité de la loi $*$ , on se restreint à une seule égalité.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} xu + yv \\ xv + yu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ xu + yv = x \\ Et\ bien\ \ xv + yu = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ x(u-1) + yv = 0 \\ Et\ bien\ \ xv + y(u-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x(u-1) + yv = xv + y(u-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(u-1) - y(u-1) + yv - xv = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)(u-1) - v(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)(u-v-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ \ x = y \\ ou\ bien\ \ u = v + 1 \end{cases}$$

On remplace $u$ par la quantité $(v+1)$ dans l'une des équations précédentes on obtient :

$$x(v+1) + yv = x \quad \Leftrightarrow \quad xv + x + yv = x$$

$$\Leftrightarrow \quad v(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ \ v = 0 \\ ou\ bien\ \ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien & \boxed{v=0} \\ ou\ bien & x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien & \boxed{v=0} \Rightarrow \boxed{u=1} \\ ou\ bien & x=-y \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la loi $*$ sur $v_2$.

## La Question : 2) d)

$(v_2,+,*)$ est bien-évidemment un anneau commutatif car les assertions suivantes sont vérifiées :

- $(v_2,+)$ est un groupe abélien.
- $*$ est associative sur $v_2$.
- $*$ est distributive par rapport à + sur $v_2$.
- $*$ est commutative sur $v_2$.

La première assertion est pratiquement vérifiable car + est une loi de composition interne dans $v_2$ qui est associative, commutative, admet un élément neutre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et que tout élément $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de $v_2$ admet un seul symétrique $\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$ dans $v_2$.

Pour la 2ème et la 4ème assertions, c'est déjà fait dans $\boxed{2}\boxed{a}$ $et$ $\boxed{2}\boxed{b}$.

Pour la 3ème assertion, on se donne trois éléments $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ dans $v_2$ :

$$\begin{aligned} On\ a\ :\ \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\left(\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c+e\\d+f\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a(c+e)+b(d+f)\\a(d+f)+b(c+e)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}ac+ae+bd+bf\\ad+af+bc+be\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Or\ :\ \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}ac+bd\\ad+bc\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ae+bf\\af+be\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}ac+ae+bd+bf\\ad+af+bc+be\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$C-\text{à}-d\ :\ \boxed{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\left(\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}}$$

Ou encore, On dira que $*$ est distributive par rapport à + à gauche. Même travail pour la distributivité à droite pour conclure finalement que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi +

## La Question : 3) a)

On remarque, au prime abord, que $E_{\vec{u}}$ est une partie non vide de $v_2$ .
car : si $\vec{x}\in E_{\vec{u}}$ $alors$ $\vec{x}=\lambda\vec{u}$ ; $\lambda\in\mathbb{R}$ .
Donc : $\vec{x}\in v_2$ car $(v_2,+,\cdot)$ est un esp vectoriel.

Soient $\vec{x}$ $et$ $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$ , Alors ils existent $\lambda$ $et$ $\theta$ $de$ $\mathbb{R}$ tels que : $\vec{x}=\lambda\vec{u}$ $et$ $\vec{y}=\theta\vec{u}$ .

On a : $\vec{x}-\vec{y}=\lambda\vec{u}-\theta\vec{u}=(\lambda-\theta)\vec{u}\in E_{\vec{u}}$ car $(\lambda-\theta)\in\mathbb{R}$

Ainsi : $\begin{cases} E_{\vec{u}}\subseteq v_2 \quad et \quad E_{\vec{u}}\neq\emptyset \\ \forall\,\vec{x},\vec{y}\in E_{\vec{u}} \ ;\ x+sym(\vec{y})\in E_{\vec{u}} \end{cases}$

Donc, d'après la caractérisation des sous-groupes, on conclut que $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe de $(v_2,+)$.

## La Question : 3) b)

**Rappel** : $\boxed{\begin{array}{c|c|c} \mathcal{F}\ est\ un\ sev & \Leftrightarrow & (\forall\alpha\in\mathbb{R})(\forall\,x,y\in\mathcal{F}) : \\ de\ l'esp(E,+,\cdot) & & (\alpha x+y)\in\mathcal{F} \end{array}}$

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}\subseteq v_2$.

$$\alpha\,\vec{x}+\vec{y}=\alpha(\lambda_1\vec{u})+\lambda_2\,\vec{u}=\ (\alpha\lambda_1+\lambda_2)\vec{u}\ \in\ E_{\vec{u}}$$

Car $(\alpha\lambda_1+\lambda_2)$ est un nombre réel.

Ainsi : $(E_{\vec{u}},+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(v_2,+,\cdot)$. Et ceci d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels mentionnée au début.

## La Question : 3) c)

Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in v_2\backslash\{\vec{0}\}$.

Soient $\vec{x}=\lambda_1\vec{u}$ ; $\vec{y}=\lambda_2\vec{u}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

On a : $\vec{u}*\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_{\vec{u}}\ est\ stable\ pour\ * \quad &\Rightarrow \quad \vec{x}*\vec{y}\in E_{\vec{u}} \\ &\Rightarrow \quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \lambda_1\,\vec{u}*\lambda_2\,\vec{u}=\lambda\,\vec{u} \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 a\\\lambda_1 b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\lambda_2 a\\\lambda_2 b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2a^2+\lambda_1\lambda_2b^2\\\lambda_1\lambda_2ab+\lambda_1\lambda_2ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1\lambda_2\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1\lambda_2(\vec{u}*\vec{u})=\lambda\,\vec{u} \\ &\Rightarrow \quad \vec{u}*\vec{u}=\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2}\,\vec{u} \\ &\Rightarrow \quad \vec{u}*\vec{u}=\tilde{\lambda}\,\vec{u}\ ;\quad \tilde{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \\ &\Rightarrow \quad \vec{u}\quad et\quad \vec{u}*\vec{u}\quad sont\ liés \end{aligned}$$

**Inversement** : Si $\vec{u} * \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont liés,
Alors : $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ ; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\, \vec{u}$

$C-\text{à}-d$ : $\begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ 2ab \end{pmatrix} = \alpha\, \vec{u}$

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

$$\begin{aligned} On\ a\ : \quad \vec{x} * \vec{y} &= \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ 2ab \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2 \cdot \alpha\, \vec{u} \\ &= \ell\, \vec{u} \in E_{\vec{u}} \end{aligned}$$

Donc $E_{\vec{u}}$ est stable pour la loi $*$.

## La Question : 4) a)

Soit : $\varphi \ : \ (\mathbb{R}^*,\times) \longmapsto (E_{\vec{u}},*)$

$$x \longmapsto \frac{x}{\alpha}\, \vec{u}$$

$Avec$ : $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\, \vec{u}$

**Rappel** : d'après le calcul fait précédemment on a eu : $\boxed{\lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} = \lambda_1 \lambda_2\, (\vec{u} * \vec{u})}$

Soient $a$ et $b$ deux nombres réel non nuls.

$$\begin{aligned} \varphi(a) * \varphi(b) &= \left(\frac{a}{\alpha}\, \vec{u}\right) * \left(\frac{b}{\alpha}\, \vec{u}\right) \\ &= \left(\frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\alpha}\right) \vec{u} * \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha^2}\right) \vec{u} * \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha^2}\right) \cdot \alpha\, \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha}\right) \cdot \vec{u} \\ &= \varphi(a \times b) \end{aligned}$$

Donc : $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$

En plus, $\varphi$ est bijective car elle est injective et surjective :

**Injective** car : $\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow \frac{x}{\alpha}\, \vec{u} = \frac{y}{\alpha}\, \vec{u}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha}$$

$$\Longrightarrow x = y$$

**Surjective** car : $(\forall (\lambda \vec{u}) \in E_{\vec{u}})\ (\exists\, x = \lambda\alpha \in \mathbb{R}^*)$ ; $\varphi(x) = \lambda \vec{u}$

**Finalement** : $\varphi$ est un isomorphisme (homomorphisme bijectif) de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$.

## La Question : 4) b)

Pour montrer que $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E_{\vec{u}},+)$ est un groupe abélien.
- $\left(E_{\vec{u}} \backslash \{\vec{0}\}\,;*\right)$ est un groupe.
- $*$ est distributive par rapport à $+$ .
- $*$ est commutative sur $E_{\vec{u}}$.

Pour la première assertion, c'est déjà fait, exactement dans la question $\boxed{3}\boxed{a}$ : $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe de $(v_2,+)$.

Pour la 2ème assertion, On sait très bien que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe, Alors $\varphi(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe aussi. Car $\varphi$ est un isomorphisme.
Et on ait : $\varphi(\mathbb{R}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{R}^*),*) = \left(E_{\vec{u}} \backslash \{\vec{0}\}\,;*\right)$.

Pour la distributivité de $*$ par rapport à $+$ c'est déjà fait aussi.

Pour la 4ème assertion c'est déjà fait.

**La conclusion** : $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif et cela d'après la caractérisation des corps vue dans le cours ☺

# Le Quatrième Exercice

## La Première partie

## La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} g(x) &= \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \left(1 + x^2 + 2x(1+x)\ln(1+x)\right) \\ &= 2 + 2 \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} x(1+x)\ln(1+x) \\ &= 2 + 2 \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} (t-1)\cdot t\ln t \\ &= 2 + 2 \lim_{t\to 0^+} (t-1) \times \lim_{t\to 0^+} (t\ln t) \\ &\longrightarrow\ 2 + 2 \times (-1) \times 0 \\ &\longrightarrow\ \boxed{2} \end{aligned}$$

## La Question : I) 1) b)

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

$x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ .
$x \longmapsto 2x(1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto (1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors g est dérivable sur $I = ]-1,+\infty[$.

Soit $x \in I$, $g'(x) = 2x - 2(x(1+x)\ln(1+x))'$

$$= 2x - 2\left((1+x)\ln(1+x) + x\ln(1+x) + \frac{x(1+x)}{1+x}\right)$$

$$= 2x - 2\big((1+2x)\ln(1+x) + x\big)$$

$$= -2(1+2x)\ln(1+x)$$

## La Question : I) 2) a)

D'après ce beau tableau, On remarque que $g$ est une fonction continue et est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ . Donc $g$ est une bijection de l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty,1]$.

Ainsi : $(\forall\, y \in ]-\infty,1]\,),(\exists!\, x \in [0,+\infty[\,) \;:\; g(x) = y$

C-à-d : $(pour\ 0 \in ]-\infty,1]\,),(\exists!\, \alpha \in [0,+\infty[\,) \;:\; g(x) = 0$

## La Question : I) 2) b)

On a : $g(1) = 1 + 1^2 - 2\times 2\ln 2 \approx -0{,}77 < 0$.
Ainsi : $g(1) < 0$.
D'où : $g(1) < g(\alpha)$.
C-à-d : $\boxed{1 > \alpha}$ car $g$ *est decroissante et bijective*.

## La Question : I) 2) c)

$$x \in ]-1,\alpha[ \;\Rightarrow\; x < \alpha$$
$$\Rightarrow\; g(x) > g(\alpha) \;;\; car\ g \searrow [0,+\infty[$$
$$\Rightarrow\; \boxed{g(x) > 0} \;;\; car\ g(\alpha) = 0$$

$$x \in ]\alpha,+\infty[ \;\Rightarrow\; x > \alpha$$
$$\Rightarrow\; g(x) < g(\alpha) \;;\; car\ g \searrow [0,+\infty[$$
$$\Rightarrow\; \boxed{g(x) < 0} \;;\; car\ g(\alpha) = 0$$

## La Deuxième partie

## La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \left(\lim_{x\to(-1)^+} \ln(1+x)\right) \times \left(\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 0^+} \ln t\right) \times \left(\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\to (-\infty) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\infty}$$

Donc l'axe $\boxed{x = -1}$ est une asymptote verticale à la courbe $(C)$.

## La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \times \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x+1}} \frac{\ln t}{t}\right) \times \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$$

$$\to 0^+ \times 0^+ \to \boxed{0^+}$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $(C)$ au voisinage de $+\infty$

## La Question : II) 2) a)

Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables : La première est la fonction $x \mapsto \ln x$ dérivable sur $]0,+\infty[$ . La deuxième est $x \mapsto 1+x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ .

Et comme $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \;:\; 1+x^2 \neq 0$ .
Alors : $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme étant un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.
Soit : $x \in I = ]-1,+\infty[$ ;

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{(1+x^2)(\ln(1+x))' - (1+x^2)'\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}}$$

## La Question : II) 2) b)

On a : $(\forall\, x \in I)$ ; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

Remarquons, au prime abord, que la quantité $(1+x^2)^2$ est toujours positive. Donc le signe de $f'(x)$ sur $I$ dépend des signes des quantités $(1+x)$ et $g(x)$ . Le tableau suivant résume le signe de $f'(x)$ .

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\boxed{-\infty}$ | $\nearrow$ | $\boxed{\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}}$ | $\searrow$ | $\boxed{0^+}$ |

## La Question : II) 2) c)

$$g(\alpha)=0 \iff 1+\alpha^2-2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)=0$$

$$\iff \ln(1+\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)}$$

$$\iff \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$

$$\iff \boxed{f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}}$$

$$x\,\epsilon\, I \implies \begin{cases} oubien & x\leq\alpha \\ oubien & x\geq\alpha \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} oubien & f(x)\leq f(\alpha) \;\; car\; f \nearrow \; ]-1,\alpha] \\ oubien & f(x)\leq f(\alpha) \;\; car\; f \searrow \; [\alpha,+\infty[ \end{cases}$$

$$\implies f(x)\leq f(\alpha) \quad ; \quad \forall\, x\,\epsilon\, I$$

$$\implies \boxed{f(x)\leq\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \quad ; \quad \forall\, x\,\epsilon\, I}$$

## La Question : II) 3) a)

Soit $(T)$ la tangente à $(C)$ au point d'abscisse 0.

$$(T) : \; y=(x-0)f'(0)+f(0)$$

$$\iff \boxed{(T) : \; y=x}$$

## La Question : II) 3) b)

Soient $x$ et $t$ deux nombres réels tels que $x>t>0$

$$t\geq 0 \iff t+1\geq 1$$

$$\iff \frac{1}{t+1}\leq 1 \quad ; \quad t\neq -1$$

$$\implies \int_0^x\left(\frac{1}{t+1}\right)dt\leq\int_0^x 1\;dt$$

$$\implies [\,\ln|1+t|\,]_0^x\leq[t]_0^x$$

$$\implies \ln|1+x|-0\leq x-0$$

$$\implies \boxed{\ln(1+x)\leq x}$$

## La Question : II) 3) c)

$$x\geq 0 \implies x^2\geq 0$$

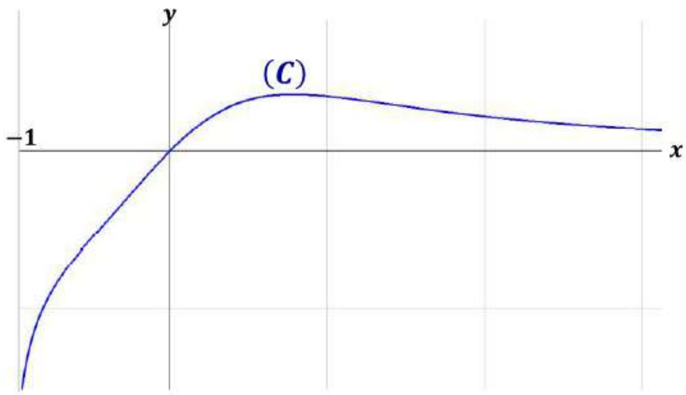
$$\implies x^2+1\geq 1$$

$$\implies \frac{1}{x^2+1}\leq 1 \quad ; \; passage\ à\ l'inverse$$

$$\implies \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\leq x \quad ; \; d'après \boxed{3}\boxed{b}$$

$$\implies \boxed{\forall\, x\geq 0 \quad ; \quad f(x)\leq x}$$

## La Question : II) 3) d)




## La Troisième partie

## La Question : III) 1) a)

■ $\boxed{J=\int_0^1 f(x)\,dx}$

On pose $\boxed{t=\dfrac{1-x}{1+x}}$ Alors $\boxed{x=\dfrac{1-t}{1+t}}$ ; $\Big|$ facile à démontrer

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \iff t=1 \\ x=1 \iff t=0 \end{array}\right.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(1-t)'(1+t)-(1+t)'(1-t)}{(1+t)^2}=\frac{-2}{(1+t)^2}$$

Alors : $\boxed{dx=\dfrac{-2}{(1+t)^2}\,dt}$

$$f(x)=f\left(\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{\ln\left(1+\dfrac{1-t}{1+t}\right)}{1+\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{\ln\left(\dfrac{2}{1+t}\right)}{\dfrac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}}$$

$$=\frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)}\times\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$$

Ainsi : $\boxed{f(x)=\dfrac{(1+t)^2}{2(1+t^2)}\times\ln\left(\dfrac{2}{1+t}\right)}$

■ $J=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$=\int_1^0 \frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)}\times\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)\times\frac{-2}{(1+t)^2}\,dt$$

$$=-\int_1^0 \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)\times\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$=\int_0^1 (\ln(2)-\ln(1+t))\times\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\ln 2}{1+t^2}\right)dt-\int_0^1\left(\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\ln 2\cdot[Arctan\,t]_0^1-J$$

$$=\ln 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-J$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{4}-J$$

*Ainsi* : $J=\frac{\pi\ln 2}{4}-J$

*C − à − d* : $J+J=\frac{\pi\ln 2}{4}$

*Ou encore* : $2J=\frac{\pi\ln 2}{4}$

*Finalement* : $\boxed{J=\frac{\pi\ln 2}{8}}$

## La Question : III) 1) b)

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine demandé dans cette question se calcule ainsi :

$$\mathcal{A}=\int_0^1 |f(x)-x|\,dx\quad\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$=\int_0^1 (x-f(x))\,dx$$

*Car* : $\boxed{\forall\,x\geq 0\ ;\ f(x)\leq x}$

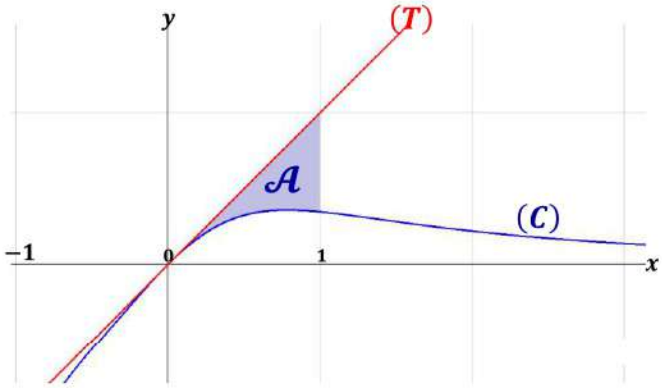
$$\mathcal{A}=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\frac{\pi\ \ln 2}{8}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi\ \ln 2}{8}\quad\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi\ \ln 2}{8}\right)(4\,cm^2)$$

$$=\boxed{\left(2-\frac{\pi\ln 2}{2}\right)cm^2}$$




## La Question : III) 2)

$$K=\int_0^1 \underbrace{(Arctan\,x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{1+x}\right)}_{v'(x)}dx$$

$$=[Arctan\,x\cdot\ln(1+x)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(1+x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$=\boxed{\frac{\pi\ln 2}{8}}$$

## La Question : III) 3)

On pose : $\theta=\tan x$ ; $\left|\begin{array}{l} x=0 \iff \theta=0\\ x=\pi/4 \iff \theta=1\end{array}\right.$

$$\frac{d\theta}{dx}=(\tan x)'=1+tan^2x=1+\theta^2$$

*Alors* : $\boxed{dx=\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)d\theta}$

*D'où* : $L=\int_0^1\ln(1+\theta)\cdot\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)d\theta$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1+\theta)}{1+\theta^2}d\theta=J$$

$$=\boxed{\frac{\pi\ln 2}{8}}$$