ROYAUME DU MAROC

2017 R

10

2ième BAC - SM
MAROC

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2017

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mercredi 05 juillet 2017

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord E est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à valeurs réelles, elle est non vide car : $I = M(1,0) \epsilon E$.
Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E et α un nombre réel.

$$\alpha\, M(a,b) + M(c,d) = \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & -3(\alpha b + d) \\ \alpha b + d & \alpha a + c \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a + c\, ;\, \alpha b + d)\ \epsilon\ E$$

Parce que $(\alpha a + c)$ et $(\alpha b + d)$ sont deux nombres réels. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\, , +\, ,\ \cdot)$

Soit $M(x,y)$ une matrice de E .

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x\, I + y\, J$$

Donc (I,J) est une famille génératrice de E.

Soient α et β deux nombres réels,

$$\alpha\, I + \beta\, J = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Et\ bien & \alpha = 0 \\ Et\ bien & \beta = 0 \end{cases}$$

Donc la famille (I,J) est libre. Alors c'est une base de E et on ait $\dim E$ est le nombre d'éléments de (I,J) et c'est 2 . $\boxed{\dim E = 2}$

La Question : 2) a)

On remarque au prime abord que E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac - 3bd & -3ad - 3bc \\ bc + ad & -3bd + ac \end{pmatrix}$$

$$= M(ac - 3bd\ ;\ ad + bc)\ \epsilon\ E$$

Car $(ac - 3bd)$ et $(ad + bc)$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\, ; \times)$.

La Question : 2) b)

Pour montrer que $(E\, , +\, ,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- × est une loi associative.
- × est distributive par rapport à + dans E.
- × admet un élément neutre.
- × est commutative sur E.

La première assertion résulte du fait que $(E\, , +\, ,\times)$ est un espace vectoriel.

Les assertions 2ème et 3ème résultent du fait que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\, ,\times)$ et que × est associative et distributive par rapport à + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La 4ème assertion est vérifiée car $I = M(1,0)$ est l'élément neutre pour la loi × dans E.

Pour la dernière assertion, c'est très simple, il suffirait de prendre deux matrices $M(a,b)$ et $M(c,d)$ et de voir est-ce bien : $M(a,b) \times M(c,d) = M(c,d) \times M(a,b)$

Je vous laisse le soin de réaliser ce petit calcul.

La Question : 3) a)

Soient (a,b) et (c,d) deux couples de $\mathbb{R}_*^2$:

$$\varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big) = \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$$

$$= M\left(ac-bd\ ;\ \frac{ad+bc}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\varphi(a+ib)\times\varphi(a+ib) = M\left(a\,;\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(c\,;\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= M\left(ac-3\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{d}{\sqrt{3}}\ ;\ a\cdot\frac{d}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot c\right)$$

$$= M\left(ac-bd\ ;\ \frac{ad+bc}{\sqrt{3}}\right)$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

Soit $M(a,b)\,\epsilon\,E^*$:

$$\varphi(x+iy) = M(a,b) \iff M\left(x\,;\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a,b)$$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ \dfrac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

C'est-à-dire que l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$. Ou encore :
$\forall\, M(a,b)\,\epsilon\,E^*\,;\ \exists!\, z = a+ib\sqrt{3}\,\epsilon\,\mathbb{C}^*\ :\ \varphi(z) = M(a,b)$

C-à-d que l'application φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

Finalement : φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

La Question : 3) b)

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe abélien et φ est un isomorphisme. Alors $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (E^*,\times)$ est un groupe abélien aussi.

La Question : 3) c)

$$J^{2017} = \big(M(0,1)\big)^{2017}$$

$$= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017}$$

$$= \big(\varphi(0+i\sqrt{3})\big)^{2017}$$

$$= \big(\varphi(i\sqrt{3})\big)^{2017}$$

$$= \varphi(i\sqrt{3})\times\varphi(i\sqrt{3})\times\ldots\ldots\times\varphi(i\sqrt{3})$$

$$= \varphi(i\sqrt{3}\times i\sqrt{3}\times\ldots\ldots\times i\sqrt{3})\ ;\ 2017\,fois$$

$$= \varphi\left(i^{2017}\times(\sqrt{3})^{2017}\right)$$

$$= \varphi\left(i\times\sqrt{3}\times\left((\sqrt{3})^2\right)^{1008}\right)$$

$$= \boxed{\varphi(i\sqrt{3}\cdot 3^{1008})}$$

$$(J^{2017})^{-1} = sym(J^{2017})$$

$$= sym\left(\varphi(i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008})\right)$$

$$= \varphi\left(sym(i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008})\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{-i}{\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$

$$= \varphi\left(0-\frac{i}{\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$

$$= M\left(0\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$

$$= \boxed{M\left(0\ ;\ \frac{-1}{3^{1009}}\right)}$$

Finalement : $$\boxed{(J^{2017})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3^{1008}} \\ \dfrac{-1}{3^{1009}} & 0 \end{pmatrix}}$$

La Question : 4)

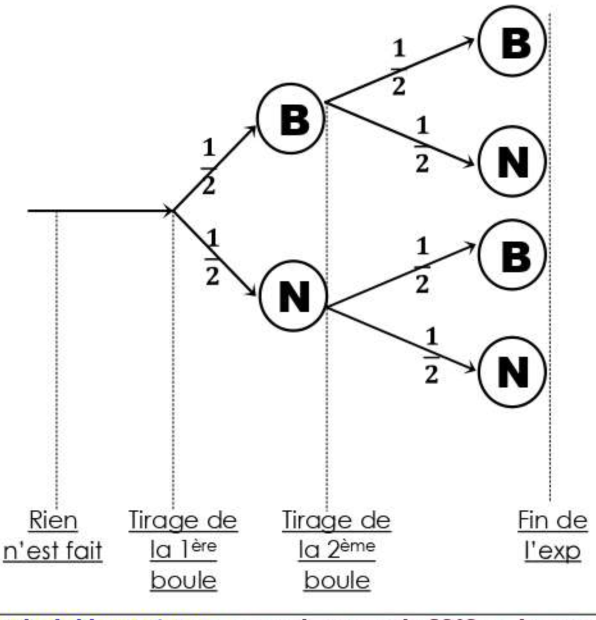
Pour montrer que $(E\,,+,\times)$ est un corps commutatif, on vérifie aisément les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien.
- $(E^*,\times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à +.
- $\times$ est commutatif sur E.

Je vous laisse encore le soin de la vérification car on les a déjà montrées.

Le Deuxième Exercice

L'arborescence ci-dessous résume l'expérience aléatoire en question :



La Question : 1)

$$p\binom{gain\ de}{20\ pts} = p(B\cap B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\binom{perte\ de}{20\ pts} = p(N\cap N) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\binom{Gain}{nul} = p(BN\ ou\ NB) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$p\binom{gain\ de}{100\ pts} = p\begin{pmatrix} gain\ de \\ 20\ pts \\ 5\ fois\end{pmatrix}$$

$$= C_5^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-5} = \frac{1}{1024}$$

La Question : 2) b)

$$p\binom{gain\ de}{40\ pts} = p\begin{pmatrix} gain\ de \\ 20\ pts \\ 2\ fois\end{pmatrix}$$

$$= C_5^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{270}{1024}$$

La Question : 3) a)

$$X(\Omega) = \{-20\,;0\,;\,+20\}$$

$$p(X=-20) = p(N\cap N) = \frac{1}{4}$$

$$p(X=0) = p(BN\ ou\ NB) = \frac{1}{2}$$

$$p(X=+20) = p(B\cap B) = \frac{1}{4}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'application P_X définie ainsi :

$$P_X\ :\ X(\Omega)\ \longmapsto\ [0{,}1]$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -20 & \longmapsto & 1/4 \\ 0 & \longmapsto & 1/2 \\ +20 & \longmapsto & 1/4 \end{array}}$$

La Question : 3) b)

$$E[X] = \sum_k k\cdot p(X=k)$$

$$= -20\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+20\times\frac{1}{4} = 0$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned} M = M' \quad &\Leftrightarrow\quad z' = z \\ &\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z \\ &\Leftrightarrow\quad z = \frac{1}{z} \\ &\Leftrightarrow\quad z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow\quad \begin{cases} oubien & z=1 \\ oubien & z=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

La Question : 2)

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}$$

$$= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$$

$$= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

$$= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

La Question : 3)

Rappel : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points qui se situent à égale distance des deux extrémités du segment.

$$On\ a\ :\ \frac{BM'}{AM'} = \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right| = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$$

$$\begin{aligned} M \in Médiatrice[AB] \quad &\Rightarrow\quad AM = BM \\ &\Rightarrow\quad \frac{BM}{AM} = 1 \\ &\Rightarrow\quad \left(\frac{BM}{AM}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow\quad \frac{BM'}{AM'} = 1 \\ &\Rightarrow\quad AM' = BM' \\ &\Rightarrow\quad M' \in Médiatrice[AB] \end{aligned}$$

La Question : 4)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow AMB \text{ est rectangle en } M$$
$$\Rightarrow (AM) \perp (BM)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_{M'} - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (BM') \parallel (AM')$$
$$\Rightarrow \boxed{M' \in (AB)}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, est continue comme étant quotient de deux fonctions continues sur l'intervalle $]0,+\infty[$ avec le dénominateur est $\neq 0$.

Étudions maintenant la continuité à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{Arctan\, x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{Arctan\, x - Arctan\, 0}{x-0}\right)$$
$$= (Arctan\, x)'_{/x=0}$$
$$= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{/x=0}$$
$$= \frac{1}{1+0^2} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

Finalement : f est continue sur I.

La Question : I) 2) a)

■ $t \in [0,x] \Rightarrow 0 \le t \le x$

$$\Rightarrow 0 \le t^2 \le x^2 \quad ; \ passage\ au\ carré$$
$$\Rightarrow 1 \le t^2+1 \le x^2+1 \quad ; \ Ajout\ de\ 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{t^2+1} \le 1 \quad ; \ passage\ à\ l'inverse$$

La Question : I) 2) b)

■ $\dfrac{1}{x^2+1} \le \dfrac{1}{t^2+1} \le 1$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dt \le \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt \le \int_0^x 1\, dt$$

Introduction de $\int_0^x dt$ car $0 < x$ et la continuité est vérifiée.

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{x^2+1}\right]_0^x \le [Arctan\, t]_0^x \le [t]_0^x$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{x^2+1} \le Arctan\, x \le x}$$

La Question : I) 2) c)

■ $\dfrac{x}{x^2+1} \le Arctan\, x \le x$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le \frac{Arctan\, x}{x} \le 1 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} - 1 \le \frac{Arctan\, x}{x} - 1 \le 0 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \frac{-x}{x^2+1} \le \frac{\frac{Arctan\, x}{x} - 1}{x} \le 0 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)}_{\xrightarrow{x \to 0^+} \boxed{0}} \le \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \le \underbrace{0}_{\xrightarrow{x \to 0^+} \boxed{0}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ et \quad f'_d(0) = 0 \end{array} \right.$$

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = \left(\frac{Arctan\, x}{x}\right)'$$

$$= \frac{x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - Arctan\, x}{x^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{Arctan\, x}{x^2}}$$

La Question : I) 3) b)

$$Signe(f'(x)) \equiv Signe\left(\frac{x}{1+x^2} - Arctan\, x\right) \equiv (-)$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, x \in\,]0,+\infty[\;\; ; \;\; f'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f \;\; est \;\; \searrow \;\; sur \;\;]0,+\infty[$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soient x et t deux éléments de $]0,+\infty[$.

■ $$\frac{t}{t^2+1} \leq Arctan\, t \leq t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{Arctan\, t}{t} \leq 1 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x \left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt \leq \int_0^x \left(\frac{Arctan\, t}{t}\right) dt \leq \int_0^x 1\, dt$$

$$\Rightarrow \quad [Arctan\, t]_0^x \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq [t]_0^x$$

$$\Rightarrow \quad Arctan\, x \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Arctan\, x}{x} \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \leq 1 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad ; \quad x > 0$$

Pour $x = 0$ On remarque que : $1 \leq 1 \leq 1$
C-à-d : $\boxed{f(0) \leq g(0) \leq 1}$ valable aussi.

Finalement : $\boxed{\forall\, x \in [0,+\infty[\;\; ; \;\; f(x) \leq g(x) \leq 1}$

La Question : II) 1) b)

■ $f(x) \leq g(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) - 1 \leq g(x) - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_d'(0) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} g \;\; est \;\; dérivable \;\; à \;\; droite \;\; en \;\; 0 \\ g_d'(0) = 0 \end{array} \right.$$

La Question : II) 2) a)

Rappel :

$$\left.\begin{array}{r} f \; cont \; sur \; I \\ a \in I \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \exists!\, primitive \;\; \varphi \;\; sur \;\; I \\ \forall\, x \in I \;\; ; \;\; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \\ \varphi(a) = 0 \\ \forall\, x \in I \;\; ; \;\; \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

On a f est continue sur $[0,+\infty[$ et $0 \in [0,+\infty[$
Donc $\exists!$ primitive φ sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \geq 0 \;\; ; \;\; \varphi(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad et \quad \varphi(0) = 0 \\ \forall\, x \geq 0 \;\; : \;\; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

On a : $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \dfrac{1}{x}\,\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$

Les fonctions $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc g est dérivable aussi.

$$\forall\, x > 0 \quad ; \quad g'(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)'$$

$$= \frac{x\,\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\, f(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}(g(x)) \;\; = \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$$

La Question : II) 3)

$$x>0 \implies f(x)\le g(x) \;;\; selon\ \boxed{II}\,\boxed{1}\,\boxed{a}$$
$$\implies \big(f(x)-g(x)\big)\le 0$$
$$\implies \frac{1}{x}\big(f(x)-g(x)\big)\le 0$$
$$\implies g'(x)\le 0$$
$$\implies g\ est \searrow sur\ ]0,+\infty[$$

La Question : II) 4) a)

Soient $x>1$ et $1\le t\le x$.

$$0<Arctan\,t<\frac{\pi}{2} \implies 0<\frac{Arctan\,t}{t}<\frac{\pi}{2t}$$
$$\implies 0<\int_1^x\left(\frac{Arctan\,t}{t}\right)dt<\frac{\pi}{2}[\ln|t|]_1^x$$
$$\implies 0<\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi\ln x}{2}$$
$$\implies 0<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$\implies \underbrace{0}_{\substack{x\to+\infty\\ \boxed{0}}}<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\underbrace{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \boxed{0}}}$$
$$\implies \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0}$$

$$0\le t\le 1 \implies f(1)\le f(t)\le f(0) \;;\; car\ \ f\searrow$$
$$\implies \frac{\pi}{4}\le f(t)\le 1$$
$$\implies \frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$$
$$\implies \frac{\pi}{4x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$$
$$\implies \underbrace{\boxed{\frac{\pi}{4x}}}_{\substack{x\to+\infty\\ \boxed{0}}}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\substack{x\to+\infty\\ \boxed{0}}}$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\right)=0$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\right)$$
$$=0+0=\boxed{0}$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

La fonction $\varphi(x)=g(x)-x$ est continue sur $[0,1]$.

$$\left|\begin{array}{l}\varphi(0)=g(0)-0=1>0\\ \varphi(1)=g(1)-1=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt-1<0\end{array}\right.$$

Ainsi : $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

Donc d'après le **TVI** : $\exists\,\alpha\in[0,1]$; $\varphi(\alpha)=0$

Ou encore : $\exists\,\alpha\in[0,1]$; $g(\alpha)=\alpha$

α est unique car φ est strictement décroissante sur $[0,1]$. c'est très facile à démontrer.

La Question : III) 2) a)

$$soit\ x\in[0,+\infty[\implies \frac{x}{x^2+1}\le Arctan\,x\le x$$
$$\implies \frac{1}{x^2+1}\le\frac{Arctan\,x}{x}\le 1$$
$$\implies -1\le\frac{-Arctan\,x}{x}\le\frac{-1}{x^2+1}$$
$$\implies 0\le 1-\frac{Arctan\,x}{x}\le 1-\frac{1}{x^2+1}$$
$$\implies 0\le 1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$

La Question : III) 2) b)

■ $$0\le 1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$
$$\implies -1\le -f(x)\le\frac{-1}{x^2+1}$$
$$\implies \frac{1}{x^2+1}\le f(x)\le 1$$
$$\implies \int_0^x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dt\le\int_0^x f(x)\,dt\le\int_0^x 1\,dt$$
$$\implies Arctan\,x\le\int_0^x f(x)\,dt\le x$$
$$\implies f(x)\le\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dt\le 1$$
$$\implies f(x)\le g(x)\le 1$$
$$\implies 0\le g(x)-f(x)\le\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{g(x)-f(x)}{x} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{g(x)-f(x)}{x}\right) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \quad car \ (x-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$$

La Question : III) 3) a)

g est une fonction continue et dérivable sur $[\alpha \,;\, u_n]$ donc, d'après le TAF, On conclut que :

$$\left(\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = g'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha|$$

La Question : III) 3) b)

Soit $(P_n)\ :\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

Pour $n=0$. D'où (P_0) est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et tel que (P_n) soit vraie.

$$(P_n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad (P_{n+1})\ est\ vraie$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (P_0)\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|}$$

- $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow{n\infty} \boxed{0}} \leq (u_n-\alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow{n\infty} \boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)\ converge\ vers\ \alpha$$