2017 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

E est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(a,b)$ définie dans l'énoncé. La matrice $\mathcal{O}$ est un élément de E car $\mathcal{O} = M(0,0)$ et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E ,

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ (b-d) & -(a-c) & (a-c) \end{pmatrix}$$
$$= M(a-c\ ;\ b-d) \in E \ \ car\ \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Alors d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que $(E,+)$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E,

$$M(a,b) \top M(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$
$$= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ (ad+bc) & -(ac-bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$
$$= M(ac-bd\ ;\ ad+bc) \in E \quad (*)$$
$$car\ \ (ac-bd) \in \mathbb{R}\ \ et\ \ (ad+bc) \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\top$ est une loi de composition interne dans E.
C'est-à-dire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top)$

La Question : 3) a)

$$\varphi\ :\ (\mathbb{C}^*,\times) \mapsto (E^*,\top)$$
$$a+ib \mapsto M(a,b)$$

Soient $(a+ib)$ et $(c+id)$ deux nombres complexes non-nuls :

$$\varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big) = \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$$
$$= M(ac-bd\ ;\ ad+bc)$$
$$= M(a,b) \top M(c,d)\ ;\ selon\ (*)$$

Ainsi φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E^*,\top)$
En plus ; φ est une bijection car l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$ et c'est $(a+ib)$ avec $M(a,b)$ est un élément donné dans E^* . En d'autres termes :
$(\forall\ M(a,b) \in E)\ (\exists!\ x+iy \in \mathbb{C}^*)\ :\ \varphi(x+iy) = M(a,b)$.
Donc la bijectivité de φ nous assure l'écriture : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

La Question : 3) b)

Comme φ est un homomorphisme et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe ; alors $(\varphi(\mathbb{C}^*),\top)$ est un groupe aussi.
C'est-à-dire que $(E^*,\top)$ est un groupe.
$(1+0i)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{C}^*,\times)$
alors $M(1,0)$ sera l'élément neutre dans $(E^*,\top)$
Remarque 1) : l'homomorphisme des groupes conserve la structure algébrique des groupes.
Remarque 2) : φ est définie de $\mathbb{C}^*$ dans E^* mais pas dans E parce que l'élément $\mathcal{O} = M(0,0)$ n'est pas inversible dans $(E,\top)$.

$$\left| \begin{array}{l} M(0,0) \top M(x,y) = M(0,0) \neq M(1,0) \\ M(x,y) \top M(0,0) = M(0,0) \neq M(1,0) \end{array} \right.$$

La Question : 4) a)

Soient $M(a,b), M(c,d)$ et $M(e,f)$ trois éléments de E

$$\begin{aligned}
M(a,b) \top \big(M(c,d)+M(e,f)\big) &= M(a,b) \top M(c+e\,;d+f) \\
&= M\big(a(c+e)-b(d+f)\ ;\ a(d+f)+b(c+e)\big) \\
&= M(ac+ae-bd-bf\ ;\ ad+af+bc+be) \\
Or\ :\ M(a,b) \top M(c,d) &+ M(a,b) \top M(e,f) \\
&= M(ac-bd\ ;\ ad+bc)+M(ae-bf\ ;\ af+be) \\
&= M(ac-bd+ae-bf\ ;\ ad+bc+af+be)
\end{aligned}$$

Donc $\top$ est distributive par rapport à + à gauche.
La distributivité à droite est déduite via la commutativité de $\top$ dans E.
Finalement : $\top$ est distributive par rapport à + .

La Question : 4) b)

D'après les résultats trouvés ci-dessus, on écrit :

$$\begin{cases} (E,+)\ est\ 1\ groupe\ commutatif\ d'élément\ neutre\ M(0,0) \\ (E\backslash\{M(0,0)\}\,;\top)\ est\ un\ groupe \\ \top\ est\ distributive\ par\ rapport\ à\ + \end{cases}$$

Donc d'après la caractérisation des corps on en déduit que $(E,+,\top)$ est un corps. De plus $\top$ est commutative dans $\top$. Alors $(E,+,\top)$ est un corps commutatif .

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4(m+1+i)^2-8(m^2+m(1+i)+i) \\
&= 4(m^2+2m(1+i)+(1+i)^2)-8(m^2+m(1+i)+i) \\
&= 4m^2+8m(1+i)+4(2i)-8m^2-8m(1+i)-8i \\
&= -4m^2 \\
&= (2im)^2
\end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$z_1=\frac{2(m+1+i)+2im}{4}=\frac{(m+1)(i+1)}{2}$$

$$z_2=\frac{2(m+1+i)-2im}{4}=\frac{(m+i)(1-i)}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned}
i\,z_2+1 &= \frac{i(m+i)(1-i)}{2}+\frac{2}{2}=\frac{i(m-mi+i+1)+2}{2} \\
&= \frac{im+m-1+i+2}{2}=\frac{im+m+1+i}{2} \\
&= \frac{(m+1)(i+1)}{2}=z_1
\end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}
On\ a\ :\ \frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega} &= \frac{z_1-\omega}{z_2-\omega} \\
&= \left(\frac{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}\right) \\
&= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-(1+i)} \\
&= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-i(1-i)} \\
&= \frac{(1+i)(m)}{(1-i)(m)} \\
&= \frac{1+i}{1-i} \\
&= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{2i}{2}=i \\
&= e^{\frac{i\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega}=e^{\frac{i\pi}{2}}$.

c'est-à-dire : $\left(z_{M_1}-\omega\right)=e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z_{M_2}-\omega\right)$.
c-à-d que M_1 est l'image de M_2 via la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. ie :

$$\begin{aligned}
R_{\frac{\pi}{2}}(\Omega)\ :\ (\mathcal{P}) &\longmapsto (\mathcal{P}) \\
M_2(z_2) &\longmapsto M_1(z_1)
\end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned}
On\ a\ :\ \frac{z_{M_2}-m}{z_{M_1}-m} &= \frac{z_2-m}{z_1-m} \\
&= \left(\frac{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{2m}{2}}{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{2m}{2}}\right) \\
&= \frac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m} \\
&= \frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m} \\
&= \frac{-m-im+1+i}{im-m+1+i} \\
&= \frac{-m(1+i)+1(1+i)}{m(i-1)-i(i-1)} \\
&= \frac{(1+i)(-m+1)}{(i-1)(m-i)} \\
&= \left(\frac{-1-i}{i-1}\right)\left(\frac{m-1}{m-i}\right)=i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)
\end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

On part du fait que les points M, M_1 et M_2 sont colinéaires

$$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \overrightarrow{MM_2} = k \cdot \overrightarrow{MM_1}$$

$$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ (z_{M_2} - z_M) = k \cdot (z_{M_1} - z_M)$$

$$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M}\right) = k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(i\left(\frac{x+iy-1}{x+iy-i}\right)\right) = 0\ ;\ m = x+iy$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(\frac{ix-y-i}{x+i(y-1)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(\frac{(ix-y-i)(x-iy-i)}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\left(\frac{ix^2+xy-x-xy+iy^2-iy-ix-y+1}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-y-x = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = 0$$

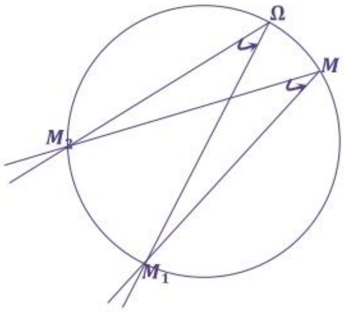
$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow |MI|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |MI|^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I = milieu[AB]$$

La Question : II) 2) c)



Les 4 points sont circulaires si : premièrement M n'appartient pas au cercle (Γ) et deuxièmement si $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_1}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}}\right)\ [\pi]$.

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M_1} - z_\Omega}{z_{M_2} - z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M}\right) [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M_1} - z_\Omega}{z_{M_2} - z_\Omega}\right) - \arg\left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left[\left(\frac{z_{M_1} - z_\Omega}{z_{M_2} - z_\Omega}\right) : \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M}\right)\right] \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega}\right) : \left(\frac{z_1 - m}{z_2 - m}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (i) : \left(\frac{i(m-1)}{m-i}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-i}{m-1}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}m\left(\frac{m-i}{m-1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}m\left(\frac{x+iy-i}{x+iy-1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}m\left(\frac{(x+iy-i)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$

$$\mathfrak{I}m\left(\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2-ix+i-y}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -y-x+1 = 0$$

$$\Rightarrow x+y = 1$$

$$\Rightarrow M \in (\Delta) : x+y = 1$$

Cherchons maintenant les points d'intersection entre (Γ) et (Δ) en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-x+1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ ou\ bien\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta) \cap (\Gamma) = \{\,(0,1)\ ;\ (1,0)\,\}$$

Finalement : l'ensemble $\tilde{E}$ des points M pour que Ω, M, M_1 et M_2 soient circulaires est la droite $(\Delta) : x+y = 1$ privée des points $(1,0)$ et $(0,1)$.
Autrement-dit : $\tilde{E} = (\Delta)\backslash\{(0,1)\ ;\ (1,0)\} = (\Delta)\backslash\{B;A\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On considère dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation suivante :
$\boxed{px + y^{p-1} = 2017}$. soit (x, y) une solution.
On a : $px + y^{p-1} - p = p(x-1) + y^{p-1}$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Rightarrow x \geq 1 \quad et \quad y > 0 \\ &\Rightarrow (x-1) \geq 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Rightarrow p(x-1) \geq 0 \quad et \quad y^{p-1} > 0 \quad car\ p \geq 5 \\ &\Rightarrow p(x-1) + y^{p-1} > 0 \\ &\Rightarrow px + y^{p-1} - p > 0 \\ &\Rightarrow px + y^{p-1} > p \\ &\Rightarrow 2017 > p\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Par l'absurde, on suppose que p divise y.
Alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*)$; $y = kp$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow px + (kp)^{p-1} = 2017 \\ &\Rightarrow px + k^{p-1}p^{p-1} = 2017 \\ &\Rightarrow px + (k^{p-1}p^{p-2}p) = 2017 \\ &\Rightarrow p(x + k^{p-1}p^{p-2}) = 2017 \\ &\Rightarrow p/2017\,;\ avec \begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ 5 \leq p < 2017 \end{cases} \\ &\Rightarrow p/2017\,;\ avec \begin{cases} p \neq 1 \\ p \neq 2017 \end{cases} \\ &\Rightarrow absurde \\ &\Rightarrow p \ ne\ divise\ pas\ \ y\end{aligned}$$

Remarque : on peut aisément montrer que $(x + k^{p-1}p^{p-2}) \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ et $k > 0$ et $p \geq 5$.

La Question : 1) c)

C'est le moment idéal pour faire appel au petit théorème de Fermat.

Rappel : $\begin{vmatrix} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On a : $p \wedge y = 1$, car p ne divise pas y donc $y \neq p$.
Donc d'après le petit théorème de Fermat , on écrit : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. Si $y = 1$ alors ça marche aussi.
On a $px + y^{p-1} = 2017$
c-à-d : $px + (y^{p-1} - 1) = 2016$.
comme $\begin{vmatrix} p/px \\ p/(y^{p-1}-1) \end{vmatrix}$ alors $p/(px + y^{p-1} - 1)$
D'où : $p/2016$

La Question : 1) d)

$$\begin{aligned}p/2016 &\Rightarrow p/(2^5 \times 3^2 \times 7) \\ &\Rightarrow p \in \{2\,;3\,;7\} \\ &\Rightarrow p \in \{7\}\ ;\ car\ p \geq 5 \\ &\Rightarrow p = 7\end{aligned}$$

La Question : 2)

On a d'après les résultats de la question 1) :
si (x, y) est solution de $px + y^{p-1} = 2017$, alors p=7.
Donc il est clair que si $p \neq 7$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^{2*}$.
L'équation devient : $7x + y^6 = 2017$; $(x, y) \in \mathbb{N}^{2*}$

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Rightarrow x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Rightarrow 7x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Rightarrow 0 < 2017 - 7x < 2017 \\ &\Rightarrow 0 < y^6 < 2017 \\ &\Rightarrow 0 < y < 2017^{\frac{1}{6}} \\ &\Rightarrow 0 < y < 3{,}55 \\ &\Rightarrow y \in \{1\,;2\,;3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 1 &\Rightarrow 7x + 1 = 2017 \\ &\Rightarrow x = \frac{2016}{7} = \boxed{288}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 2 &\Rightarrow 7x + 2^6 = 2017 \\ &\Rightarrow x = \frac{2017 - 2^6}{7} = \boxed{279}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 3 &\Rightarrow 7x + 3^6 = 2017 \\ &\Rightarrow x = \frac{2017 - 3^6}{7} = \boxed{184}\end{aligned}$$

Inversement : On vérifie aisément que les couples (288,1) , (279,2) et (184,3) vérifient-bien l'équation $7x + y^6 = 2017$. Finalement : l'ensemble des solutions de cet équation est défini explicitement par : $\mathcal{S} = \{\,(288{,}1)\,;\,(279{,}2)\,;\,(184{,}3)\,\}$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}}(1-t)e^t$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(e^t - te^t)$$
$$= 0^+ - 0^- = 0$$
$$= f(0)$$

Ainsi : f est continue en 0 à droite

La Question : I) 1) b)

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$
$$= \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}} -t(1-t)e^t$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t + t^2e^t)$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t) + \lim_{t\to-\infty} 4\left(\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}\right)^2$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t) + 4\lim_{\substack{\mu\to-\infty\\ \mu=\frac{t}{2}}}(\mu e^\mu)^2$$
$$= -0^- + 4(0^-)^2 = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$

La Question : I) 1) c)

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
alors $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$.
comme $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto e^x$
et aussi dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0$; $e^{\frac{-1}{x}} > 0$
Alors $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivables sur $]0,+\infty[$.
comme $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
et comme $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors le produit est dérivable aussi sur $]0,+\infty[$.
ainsi $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{-1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$$

La Question : I) 2) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$
$$= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=\frac{1}{x}}}(1+t)e^{-t}$$
$$= (1+0)e^0 = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 2) b)

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$ alors $\forall x>0$; $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

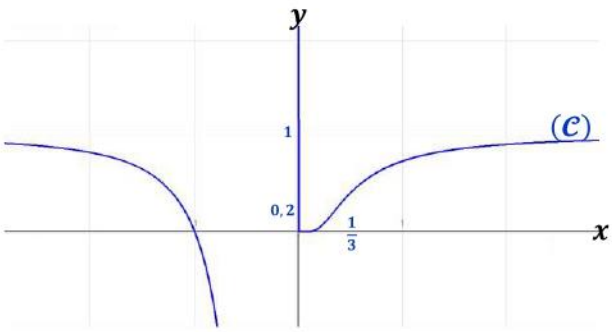
La Question : I) 3) a)

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}\right)' = \left(\frac{-3x^2}{x^6}\right)e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$= \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \iff \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right) = 0\ ;\ car\ e^{\frac{-1}{x}} > 0$$
$$\iff -3x^5 + x^4 = 0$$
$$\iff x^4(1-3x) = 0$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x = 0 \\ oubien\ (1-3x) = 0 \end{cases}$$
$$\iff (1-3x) = 0\ ;\ \ car\ x>0$$
$$\iff (1-3x) = 0\ ;\ \ car\ x>0$$
$$\iff x = \frac{1}{3}$$

Donc le point $\left(\frac{1}{3}\,;0{,}2\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

La Question : I) 3) b)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.
alors f admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en a telle que :

$$\left|\begin{array}{l} \forall x \in I \;;\; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;\;;\;\; \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I \;;\; \varphi'(x) = f(x) \end{array}\right.$$

Dans cet exercice, f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ telle que $\left|\begin{array}{l} \forall x \in]0,+\infty[\;;\; \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \end{array}\right.$
et φ est dérivable sur $]0,+\infty[$; $\varphi'(x) = f(x)$.
Donc F est continue sur $]0,+\infty[$.

La Question : II) 2) a)

$$\int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt = \int_x^1 \left(\underbrace{1}_{u'(t)}\right)\cdot\left(\underbrace{e^{\frac{-1}{t}}}_{v(t)}\right) dt$$

$$= \left[t \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 t\cdot\left(\frac{-1}{t}\right)' \cdot e^{\frac{-1}{t}}\,dt$$

$$= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(t\cdot\frac{1}{t^2}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

$$= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

La Question : II) 2) b)

$$\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right) e^{\frac{-1}{t}} dt = \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

$$= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

$$= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad x > 0$$

La Question : II) 2) c)

il suffit de remarquer que :

$$\left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' = 1\cdot e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)'\cdot x = e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2}\cdot x\cdot e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= f(x)$$

$$Donc \;:\; \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{x+1}\,f(x)\right)' dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{x+1}\,f(x)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^2}{1+1}\,f(1)\right) - \left(\frac{0^2}{0+1}\,f(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} f(1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1}$$

La Question : II) 3)

$$\mathcal{A} = \int_0^2 |f(t)|\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt$$

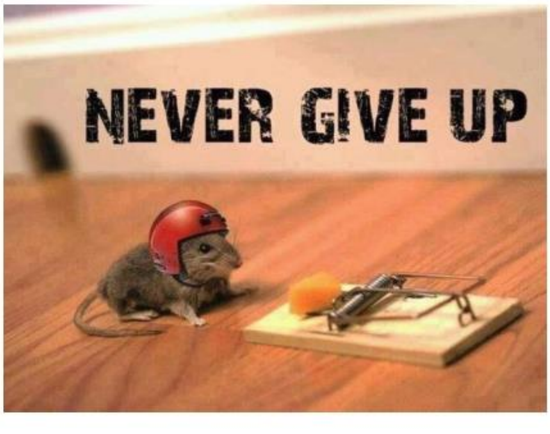
$$= \int_0^1 f(t)\,dt - \int_2^1 f(t)\,dt$$

$$= e^{-1} - \left(e^{-1} - 2\,e^{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) (2\,cm) \times (2\,cm)$$

$$= \left(8\,e^{\frac{-1}{2}}\right) cm^2$$



La Question : II) 4) a)

La fonction f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \epsilon\,]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ qui s'annule en 1 définie comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

on obtient : $\left| \begin{array}{l} \varphi \ est \ continue \ sur \ [n\,,n+2] \\ \varphi \ est \ dérivable \ sur \ ]n\,,n+2[\end{array} \right.$.

Ainsi d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ sur $[n\,,n+2]$ on écrit :

$\forall n \geq 0 \ ; \ \exists v_n \,\epsilon\,]n\,,n+2[\ ; \ \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n)}{(n+2)-n} = \varphi'(v_n)$

c-à-d : $F(n) - F(n+2) = 2f(v_n)$.

c-à-d : $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

Finalement :

$\forall n \geq 0 \ ; \ \exists v_n \,\epsilon\,]n\,,n+2[\ ; \ u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

La Question : II) 4) b)

On a prouvé, dans la première partie , la croissance de la fonction f sur $]0,+\infty[$. soit $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow \ \exists\, v_n \,\epsilon\,]n\,,n+2[\ ; \ u_n = f(v_n)$$

$$n < v_n < n+2 \ \Rightarrow \ f(n) < f(v_n) < f(n+2) \ car\, f \nearrow$$

$$\Rightarrow \ 2f(n) < 2f(v_n) < 2f(n+2)$$

$$\Rightarrow \ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$$

La Question : II) 4) c)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \\ \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow}\, 2} < u_n < \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow}\, 2}$$

$$Finalement \ : \ \lim_{n\infty}(u_n) = 2$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Soit ψ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. il est clair que ψ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$car \ x > y \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \ \frac{-1}{x} > \frac{-1}{y}$$

$$\Rightarrow \ e^{\frac{-1}{x}} > e^{\frac{-1}{y}}$$

$$\Rightarrow \ \psi(x) > \psi(y)$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\psi(\,]0,+\infty[\,)$.

$$\psi(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to 0^+}\psi(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\psi(x)\right[=]0,1[$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$.

$$\begin{array}{rccl} \psi \ : &]0,+\infty[& \mapsto &]0,1[\\ & x & \mapsto & \psi(x) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall\, y \,\epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[\,) \ : \ \psi(x) = y$$

$$ou \ \ (\forall\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[\,), (\exists!\ y \,\epsilon\,]0,1[\,) \ : \ \psi(x) = y$$

$$joliment \ \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\,), (\exists!\ \beta_n \,\epsilon\,]0,1[\,) \ : \ \psi(n) = \beta_n$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\,), (\exists!\ \beta_n \,\epsilon\,]0,1[\,) \ : \ e^{\frac{-1}{n}} = \beta_n \quad (*)$$

La fonction f est aussi une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$ car elle est continue et elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rccl} f \ : &]0,+\infty[& \mapsto &]0,1[\\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$$c-\text{à}-d: \ \ (\forall\, y \,\epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\ x \,\epsilon\,]0,+\infty[\,) \ : \ y = f(x)$$

$$(pour\ \beta_n \,\epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\ \alpha_n \,\epsilon\,]0,+\infty[\,) \ : \ \beta_n = f(\alpha_n)\ (**)$$

De $(*)\ et\ (**)$ on conclut :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*), (\exists!\ \alpha_n > 0) \ : \ f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$$

La Question : III) 1) b)

Soit $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$ c-à-d $n \geq 1$

$$n+1 > n \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ ; \ passage\ \text{à}\ l'inverse$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n} \ ; \ passage\ \text{à}\ l'opposé$$

$$\Leftrightarrow \ e^{\frac{-1}{n+1}} > e^{\frac{-1}{n}} \ ; \ Exp\ est\ \nearrow et\ bijection$$

$$\Leftrightarrow \ f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n) \ ; \ d'après\ 1)a)$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha_{n+1} > \alpha_n \ ; \ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

$$\Leftrightarrow \ (\alpha_n)_{n\geq 1}\ \ est\ une\ suite\ \nearrow$$

La Question : III) 1) c)

$$f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}} \iff \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}} = e^{\frac{-1}{n}}$$
$$\iff \ln\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right) = \ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) + \ln\left(e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right) = \ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) - \frac{1}{\alpha_n} = \frac{-1}{n}$$

La Question : III) 2) a)

D'une part, On a :

$$\left(\frac{1}{1+t}\right) - (1-t) = \frac{1-(1^2-t^2)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$$

(pour $t \geq 0$) ; $t^2 \geq 0$ et $(1+t) > 0$

Donc : $\dfrac{t^2}{1+t} \geq 0$ D'où : $\left(\dfrac{1}{1+t}\right) - (1-t) \geq 0$

c-à-d : $\left(\dfrac{1}{1+t}\right) \geq (1-t) \rightsquigarrow (1)$

$$(1-t+t^2) - \left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{(1+t)(1-t+t^2)-1}{1+t}$$
$$= \frac{t^3}{1+t}$$

(pour $t \geq 0$) ; $t^3 \geq 0$ et $(1+t) > 0$

Donc : $\dfrac{t^3}{1+t} \geq 0$

D'où : $(1-t+t^2) - \left(\dfrac{1}{1+t}\right) \geq 0$

Ainsi : $(1-t+t^2) \geq \left(\dfrac{1}{1+t}\right) \rightsquigarrow (2)$

$$(1)\ et\ (2) \iff \boxed{1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2}\ (\forall t \geq 0)$$

La Question : III) 2) b)

Soit $x \geq 0$, $\quad (1-x) \leq \left(\dfrac{1}{1+x}\right) \leq (1-x+x^2)$

$$\iff -x \leq \left(\frac{1}{1+x}\right) - 1 \leq -x+x^2$$
$$\iff \int(-1)\,dx \leq \int\left(\frac{1}{1+x}-1\right)dx \leq \int(-x+x^2)\,dx$$

Car la continuité est vérifiée.

$$\iff \frac{-x^2}{2} \leq -x + \ln|1+x| \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
$$\iff \frac{-x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

La Question : III) 3) a)

$$e^{\frac{3}{4}} \geq 2 \iff e^1 \cdot e^{\frac{-1}{4}} \geq 2$$
$$\iff e^{\frac{-1}{4}} \geq 2\,e^{-1}$$
$$\iff f(\alpha_4) \geq f(1)\ ;\ car \left| \begin{array}{l} f(\alpha_4) = e^{\frac{-1}{4}} \\ f(1) = 2\,e^{-1} \end{array} \right.$$
$$\iff \alpha_4 \geq 1\ ;\ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

On considère la proposition suivante :

$$P(n)\ :\ \alpha_n \geq 1$$

Pour $n = 4$, on a $\alpha_4 \geq 1$. Donc $P(n)$ est vérifiée.
Soit $n \geq 4$ et on suppose que $\alpha_n \geq 1$.
Comme $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante ,
Alors $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \geq 1$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.
Ainsi : $\left| \begin{array}{l} P(4)\ est\ vraie \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)\ ;\ \forall n \geq 4 \end{array} \right.$.
D'où : $\forall n \geq 4$: $\alpha_n \geq 1$.

La Question : III) 3) b)

On a d'après la question 1)c) :

$$\frac{-1}{\alpha_n} + \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{-1}{n}$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{n} \rightsquigarrow (\star)$$

D'autre part : $\alpha_n \geq 1 \iff \dfrac{1}{\alpha_n} \geq 1 > 0$

$$\iff \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2 \leq -\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$\leq \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^3$$

Et ceci d'après 2)b) :

$$\iff \frac{-1}{2\alpha_n^2} \leq \frac{-1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{n} \leq \frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3}\ ;\ selon\ (\star)$$
$$\iff \frac{-1}{2\alpha_n^2} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3}$$
$$\iff -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3}\right) \leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{n}\right) \leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}\right)$$
$$\iff 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\,\alpha_n}{n} \leq 1$$

La Question : III) 3) c)

$$\alpha_n \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha_n} \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{-2}{3\alpha_n} \geq \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow\; \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq 1 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\; \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \quad ;\; d'après\ 3)b)$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow\; \frac{n}{6} \leq \alpha_n^2 \leq \frac{n}{2} \;;\; car\ n \geq 4 > 0$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} +\infty} \leq \alpha_n$$

$$\Rightarrow\; \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$

La Question : III) 3) d)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$

$$\Rightarrow\; \lim_{n\infty}\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) = 1 - \frac{2}{3(+\infty)} = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \mathbf{1}} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq \underbrace{1}_{\xrightarrow{n\infty} \mathbf{1}}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{n\infty}\left(\frac{2\alpha_n^2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\infty}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\infty}\sqrt{\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\infty}\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$$