

# CHAPITRE I

## Champs électriques créés par des distributions de charges ponctuelles

### I Loi de Coulomb

#### I-1 Charges électriques

La nature présente 2 types de charges électriques que par commodité on note négatives et positives (On aurait pu les appeler vertes et rouges).

Les charges de même signe se repoussent.  
Les charges de signes contraires s'attirent.

#### I-2 Direction et sens des forces électriques.

Si deux charges de même signe (toutes deux positives ou toutes deux négatives) sont situées aux points A et B, la charge située en A est soumise à une force  $\mathbf{F}_{BA}$  dirigée selon le vecteur  $\mathbf{BA}$ . Cette force est notée avec les indices  $BA$  pour rappeler qu'elle s'applique sur la charge placée en A, et est due à la présence de la charge placée en B.

La charge située en B est soumise à une force  $\mathbf{F}_{AB}$  dirigée dans le sens du vecteur  $\mathbf{AB}$ . Les forces  $\mathbf{F}_{BA}$  et  $\mathbf{F}_{AB}$  sont égales et opposées.



Si les charges sont de signes contraires, la charge située en A est soumise à une force  $\mathbf{F}_{BA}$  dirigée de dans le sens du vecteur  $\mathbf{AB}$  alors que la charge située en B est soumise à une force  $\mathbf{F}_{AB}$  dirigée dans le sens du vecteur  $\mathbf{BA}$ .



De nouveau, les forces  $\mathbf{F}_{BA}$  et  $\mathbf{F}_{AB}$  sont égales et opposées.

Dans un cas comme dans l'autre, il faut bien noter que les forces sont radiales, c'est à-dire portées par l'axe qui joint les deux charges.

#### I-3 Intensité des forces électriques

Des expériences maintes fois répétées ont montré que les intensités des forces auxquelles sont soumises les charges situées en A et B sont:

-Inversement proportionnelles au carré de la distance  $r_{AB}$  séparant les charges (doubler la distance entre les charges conduit à une diminution des forces d'un facteur 4).

-Proportionnelles à deux grandeurs  $q_A$  et  $q_B$  qui quantifient les charges. On appelle ces grandeurs charges électriques.

#### I-4 Expression de la loi de Coulomb

Ces assertions, déduites d'un grand nombre d'expériences et de mesures, se synthétisent par une expression mathématique appelée loi de Coulomb:

$$\mathbf{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \mathbf{u}_{AB}$$

où:

$\mathbf{u}_{AB}$  est le vecteur unitaire (de norme 1) parallèle au vecteur  $\mathbf{AB}$ . Ce vecteur sert à indiquer la direction et le sens de la force  $\mathbf{F}_{AB}$ , sans en affecter l'intensité:

$$\mathbf{u}_{AB} = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}$$

$1/4\pi \epsilon_0$  est un coefficient de proportionnalité adapté aux unités. Dans le système international (SI), la force est exprimée en Newtons (N), la charge en Coulombs (C), les distances en mètre (m) et la quantité  $\epsilon_0$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9}$$

La constante  $\epsilon_0$  est appelée permittivité du vide.

#### 1-5 Le Coulomb

Le Coulomb est la quantité de charge électrique apportée par un courant électrique de 1 ampère en 1 seconde.

La valeur absolue de la charge élémentaire de l'électron  $e$  est égale à  $1.6 \cdot 10^{-19}$  C

*-A quelles forces sont soumises deux charges de  $10^{-6}$  Coulomb séparées de 1m, 1cm, 1mm?*

*-2 microbilles sont séparées de 1cm. Quelles charges identiques doivent-elles porter pour qu'elles soient soumises à une force de 1N?*

*-Considérons une bille de cuivre de 1mm de diamètre. Déterminer le nombre d'électrons contenus dans une telle bille électriquement neutre. Quelle fraction d'électrons faut-il retirer pour amener sa charge à  $10^{-6}$  Coulomb?*

*(le numéro atomique du cuivre est 29, sa masse atomique 63.5 et sa densité 8.93)*

#### I-6 Loi de gravitation

Vous avez déjà rencontré un exemple de force exercée à distance sur un corps (sans lien "matériel" tel qu'une corde reliant ce corps à l'extérieur).

C'est la force d'attraction universelle entre deux masses  $m_A$  et  $m_B$ . Elle est toujours attractive (il n'y a pas deux sortes de masses) et s'écrit:

$$\mathbf{F}_{AB} = - G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \mathbf{u}_{AB}$$

Une telle force est formellement équivalente à la loi de Coulomb avec ses deux caractéristiques fondamentales: elle est radiale et inversement proportionnelle au carré de la distance entre les corps.

Ici les charges sont remplacées par les masses et le coefficient de proportionnalité  $G$ , appelé constante d'attraction universelle, est égal à  $6.67 \cdot 10^{-11}$  SI.

Déterminer l'intensité de la force d'attraction universelle s'appliquant sur deux billes de cuivre de 1 mm de diamètre séparées de 1 cm.

Quelle quantité d'électrons faut-il déplacer d'une bille à l'autre pour créer une force électrique équivalente?

Le rayon de la première orbite de Bohr de l'atome d'hydrogène est de  $5.29 \cdot 10^{-2}$  nm. Comparer les intensités des forces électriques et gravitationnelles entre l'électron et le proton dont les masses sont respectivement  $0.91 \cdot 10^{-30}$  kg et  $1.672 \cdot 10^{-30}$  kg.

## II Composantes de la force

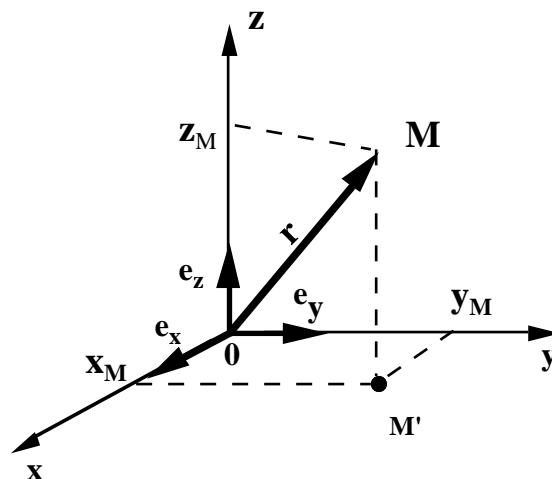
De temps à autre, nous ferons un petit détour mathématique. Voici le premier il concerne les composantes d'un vecteur dans un repère cartésien.

### II-1 Repère cartésien

C'est celui que vous connaissez et sur lequel vous avez travaillé à 2 dimensions.

Le repère est défini par un point origine 0 et trois axes (0x, 0y, 0z) perpendiculaires entre eux. Les vecteurs unitaires portés par les axes sont:  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .

(Bien noter la disposition relative des directions (0x, 0y, 0z). Telles qu'elles sont placées, elles définissent un trièdre direct. Dans un tel trièdre, un bonhomme transpercé des pieds à la tête par 0y, regardant la direction 0z, a la direction 0x à sa gauche. On peut noter aussi que 0x, 0y et 0z sont respectivement orientés selon les directions du pouce, de l'index et du majeur de la main droite.



Un point M de l'espace est repéré par les trois composantes du vecteur  $\mathbf{r}$  joignant 0 à M.  $\mathbf{r} = 0\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{r}(x_M, y_M, z_M) = x_M \mathbf{e}_x + y_M \mathbf{e}_y + z_M \mathbf{e}_z$$

M' est la projection de M dans le plan (x0y) les composantes  $x_M$  et  $y_M$  de  $\mathbf{r}$  sont les coordonnées du point M' dans ce plan.

La composante  $z_M$  est obtenue en traçant la parallèle à 0M' passant par M.

On dira indistinctement qu'un objet se trouve au point M ou en  $\mathbf{r}$ .

Les composantes du vecteur  $\mathbf{AB}$  joignant deux points A à B s'écrivent:

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$$

Les modules des vecteurs sont:

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \quad \text{ou} \quad r_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

En exprimant la distance entre A et B par les composantes du vecteur **AB**, l'expression de la force devient:

$$\mathbf{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \mathbf{u}_{AB}$$

## II-2) Expression des forces par leurs composantes

De même que le vecteur **AB** joignant le point A au point B, le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{AB}$  et les vecteurs forces peuvent être exprimés par leurs composantes:

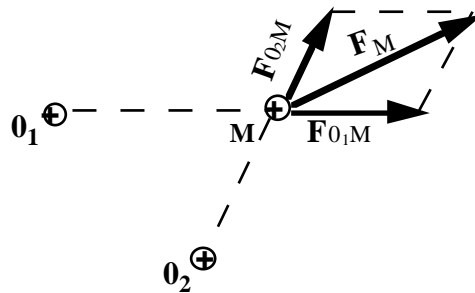
$$\mathbf{u}_{AB} = \begin{bmatrix} u_{AB\ x} \\ u_{AB\ y} \\ u_{AB\ z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} u_{AB\ x} \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} u_{AB\ y} \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} u_{AB\ z} \end{bmatrix}$$

Dans un repère cartésien, où l'unité de longueur est le centimètre, deux charges  $q_A = 10^{-7} \text{ C}$  et  $q_B = -2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  sont situées respectivement en A (2,-1,3) et B (-1,2,0). Déterminer les composantes de la force qui s'applique sur la charge située en A.

## III Principe de superposition

Considérons trois points de l'espace  $O_1$ ,  $O_2$  et M. Plaçons en M une charge q. Puis effectuons trois opérations successives:

i) Plaçons la charge  $q_1$  en  $O_1$ . En l'absence de charge en  $O_2$ , Il s'exerce sur la charge q située en M une force  $\mathbf{F}_{O_1M}$  dont le sens et l'intensité sont donnés par la loi de Coulomb.



ii) Retirons la charge  $q_1$  et plaçons en  $O_2$  la charge  $q_2$ . Il s'exerce sur la charge q située en M une force  $\mathbf{F}_{O_2M}$  donnée elle aussi par la loi de Coulomb.

iii) Tout en conservant la charge  $q_2$  en  $O_2$ , remplaçons la charge  $q_1$  en  $O_1$ . Il s'exerce sur M une force  $\mathbf{F}_M$ .

On observe alors que, en présence simultanée de  $q_1$  en  $O_1$  et de  $q_2$  en  $O_2$ , la force  $\mathbf{F}_M$  qui s'exerce sur q est la somme géométrique (vectorielle) des forces  $\mathbf{F}_{O_1M}$  et  $\mathbf{F}_{O_2M}$  qui exerçaient sur q lorsque les charges  $q_1$  ou  $q_2$  étaient seules présentes.

Cette observation se généralise à une distribution de charges  $q_1, q_2, q_3, \dots, \text{etc.}$

La force exercée sur une charge  $q$  située en  $M$ , par une distribution de charges  $q_1, q_2, q_3$  etc. situées en  $O_1, O_2, O_3$ , etc., est égale la somme des forces  $\mathbf{F}_{O_1M}, \mathbf{F}_{O_2M}, \mathbf{F}_{O_3M}$ , etc. qu'exercerait sur  $q$  chacune des charges, si elle était seule.

Cela se symbolise par une expression mathématique:

$$\mathbf{F}_M = \sum_i \mathbf{F}_{O_iM} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{r_{O_iM}^2} \mathbf{u}_{O_iM}$$

Cette règle est appelée principe de superposition.

Considérons 4 charges  $q_A, q_B, q_C, q$  situées dans un même plan muni d'un repère orthonormé. Ces charges sont placées respectivement en  $A(0,2)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $C(1,0)$  et  $M(2,2)$ . (les nombres entre parenthèses représentent les coordonnées exprimées en cm).

Déterminer par construction graphique la force  $F_M$  appliquée sur  $M$

a) si les 4 charges sont de  $+10^{-7}C$

b) si  $q = q_B = q_C = +10^{-7}C$   $q_A = -2 \cdot 10^{-7}C$

Déterminer dans chaque cas en quel point  $M'$  il faut placer une nouvelle charge  $q'$  pour que la résultante des forces s'appliquant sur  $M$  soit nulle.

#### IV Notion de champ électrique.

Reprenons la distribution de charges  $q_1, q_2, q_3$ , etc. situées aux points  $O_1, O_2, O_3$ , etc.. et penchons nous sur les valeurs des forces qui s'exercent sur différentes charges placées successivement en un point  $M$  de l'espace.

Si nous plaçons en  $M$  une charge  $q$ , il s'exerce en  $M$  une force:

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_{O_1M} + \mathbf{F}_{O_2M} + \mathbf{F}_{O_3M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_{O_1M}^2} \mathbf{u}_{O_1M} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{r_{O_2M}^2} \mathbf{u}_{O_2M} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q}{r_{O_3M}^2} \mathbf{u}_{O_3M}$$

ou encore:

$$\mathbf{F}_M = q \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{O_1M}^2} \mathbf{u}_{O_1M} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{O_2M}^2} \mathbf{u}_{O_2M} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{O_3M}^2} \mathbf{u}_{O_3M} \right)$$

$$\mathbf{F}_M = q \left( \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{O_iM}^2} \mathbf{u}_{O_iM} \right)$$

Sans modifier la distribution de charge  $q_1, q_2, q_3$  remplaçons la charge  $q$  située en  $M$  par une nouvelle charge  $q'$ . Une nouvelle force  $\mathbf{F}'_M$  s'applique en  $M$ :

$$\mathbf{F}_M = q' \left( \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{O_iM}^2} \mathbf{u}_{O_iM} \right)$$

Il apparaît que le remplacement de  $q$  par  $q'$  n'a pas modifié l'expression vectorielle entre parenthèses. Cette grandeur vectorielle  $\mathbf{E}_M$ , due aux charges extérieures, est indépendante de la charge que l'on place en  $M$

$\mathbf{E}_M$  est le champ électrique en  $M$  créé par les charges  $q_i$ .

$$\mathbf{E}_M = \sum_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0iM}^2} \mathbf{u}_{0iM}$$

Etant donné une distribution  $q_i$  de charges, considérées comme extérieures, il est donc toujours possible de définir, en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace, une grandeur vectorielle  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  appelée champ électrique.

Le champ électrique est tel que la force exercée sur une charge ponctuelle  $q$  placée en  $\mathbf{r}$  est:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

On peut déterminer le champ électrique au point  $\mathbf{r}$  en y plaçant une charge test unité de 1 Coulomb. Le champ électrique en ce point n'est alors autre que la force qui s'exerce sur une charge unité de +1 Coulomb.

L'unité de champ électrique est le volt par mètre (V/m). Un champ électrique de 1 V/m crée sur une charge de 1 C une force de 1 N.

A l'instar des forces électrostatiques, le champ électrique obéit au principe de superposition (Ces grandeurs ne sont séparées que par le coefficient de proportionnalité  $q$ ).

*Deux charges électriques A et B de même charge  $q=10^{-6}\text{C}$  sont placées en  $(-1,0)$  et  $(1,0)$ , l'unité est 2.5 cm. Déterminer et tracer sur papier millimétrique (avec une échelle adaptée) le champ électrique en un nombre raisonnable de points. Utiliser au mieux les symétries du problème.*

## V Notion de champ vectoriel

### V-1 Le champ électrique, une nouvelle grandeur physique

A la distribution de charges, qui étaient localisées en certains points  $0_1, 0_2$ , etc. de l'espace, nous avons fait correspondre un champ électrique vectoriel  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  défini en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace.

On peut alors distinguer deux manières de calculer la force qui s'exerce sur une charge  $q$  placée en M:

1<sup>re</sup> façon: On considère les charges électriques extérieures  $q_1, q_2$  etc ..placées en  $0_1, 0_2$  etc.

On écrit la loi de Coulomb et on fait usage du principe de superposition.

2<sup>ème</sup> façon; on considère le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  situé en M (dû bien sûr aux charges extérieures)

Et on écrit  $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ .

Si le résultat est équivalent, la deuxième méthode tend à faire oublier les charges extérieures et à ne retenir que la présence du champ électrique

Cette démarche conduit à substituer aux charges électriques extérieures une nouvelle grandeur physique: le champ électrique  $\mathbf{E}$ .

### V-2 Description d'un champ vectoriel

Connaître un champ électrique  $\mathbf{E}$ , c'est connaître le vecteur champ électrique en chaque point de l'espace, en direction, en sens et en intensité. Dans quelques cas simples, il est donné par une relation algébrique. Dans des cas plus complexes, il peut être calculé en des points de maillage suffisamment fin. Avec les moyens informatiques actuels, il est

très facile d'écrire un programme tel que, entrant les charges et leurs positions, l'ordinateur fournisse en chaque point M demandé une petite flèche dont le sens, la direction et la longueur renseignent sur le champ électrique en ce point.

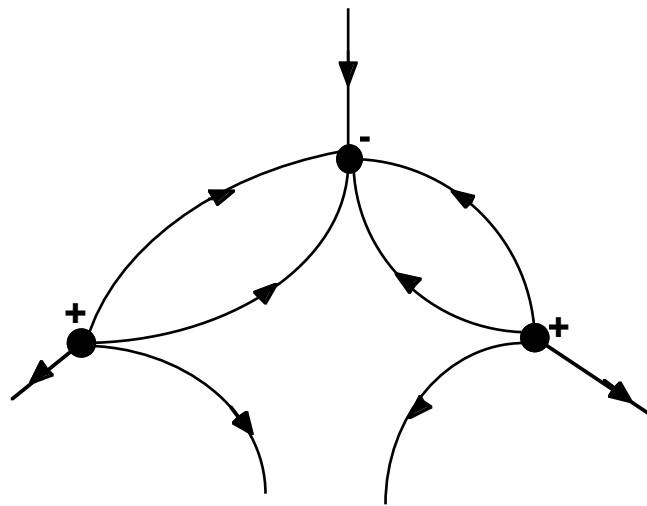
Pour avoir un aperçu visuel rapide du champ électrique, il suffit de tracer en des points uniformément distribués un ensemble de telles petites flèches. C'est ainsi qu'on visualise et ressent le mieux ce qu'est un champ électrique. C'est ce que vous avez fait dans l'exercice du paragraphe précédent.

(Une image vous renseigne sur une propriété physique dans sa globalité spatiale. N'hésitez pas à utiliser ce moyen de communication. Il vaut largement une formule déchiffrable par les seuls spécialistes).

### V 3 Les lignes de champ

Un champ de vecteurs tel que  $\mathbf{E}$  étant donné, une ligne de champ est par définition une courbe tangente en chaque point au vecteur champ défini en ce point. On y ajoute de petites flèches pour rappeler le sens du champ.

Les lignes de champ du champ électrique ne se coupent pas. Elles partent des charges positives (ou de l'infini) et aboutissent aux charges négatives (ou à l'infini).



### V-4 Lignes de champ d'un système formé d'une charge ponctuelle placée à l'origine

*Une charge  $q$  est placée en  $O$ , origine des coordonnées. Tracer les lignes de champ.*

## VI Le dipôle électrique

### VI-1) Définition

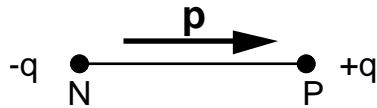
On appelle dipôle électrique un ensemble formé de deux charges  $-q$  (en N) et  $+q$  (en P) de mêmes valeurs absolues et de signes contraires.

L'ensemble formé des deux charges reste globalement neutre.

Le dipôle est défini par la charge  $q$  et par le vecteur  $\mathbf{NP}$  qui joint les deux charges.

On appelle moment dipolaire le vecteur  $\mathbf{p} = q \mathbf{NP}$

Nous verrons en travaux dirigés que, dans la limite où la distance NP est suffisamment petite, le moment et la force exercés par un champ électrique extérieur sur un dipôle ne dépendent que de  $\mathbf{p}$  et sont indépendants des valeurs individuelles de  $q$  et de NP.

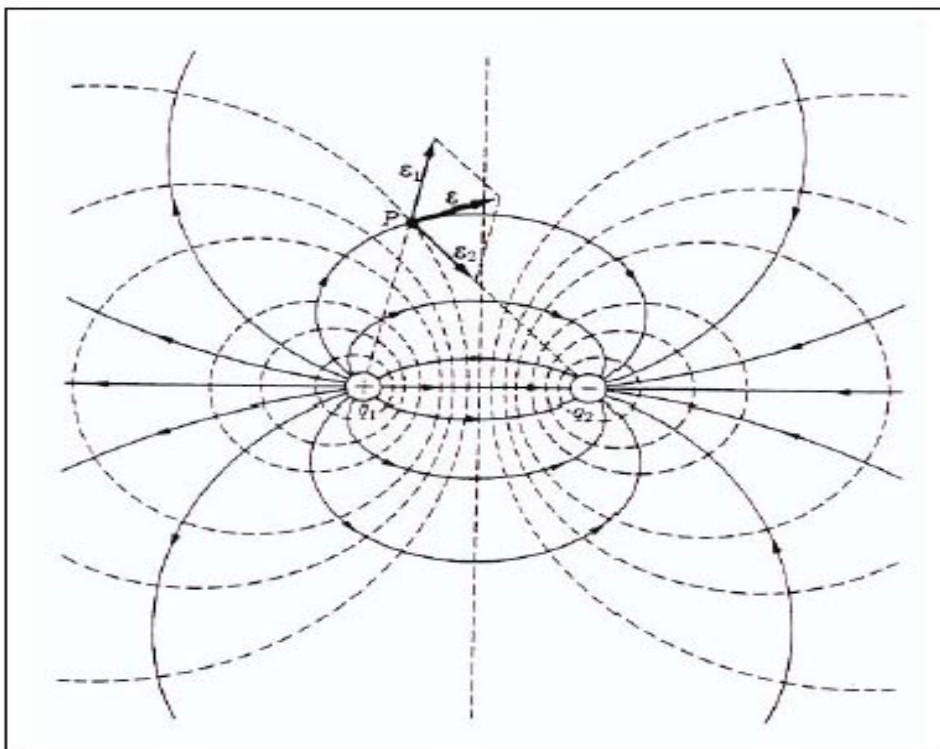


## VI-2) Importance du dipôle électrique dans les matériaux

Lorsque dans une molécule globalement neutre, les barycentres des charges positives et négatives ne se superposent pas, on peut considérer que la molécule forme un dipôle.

Une telle molécule induit en son voisinage un champ électrique caractéristique qui va lui permettre d'interagir avec les autres charges électriques et les autres dipôles du système.

Ex : molécule d'eau , d'acide chlorhydrique, d'ammoniac etc...



Voir aussi une animation montrant le champ créé par un dipôle électrique sur le site

<http://www.colorado.edu/physics/2000/applets/forcefield.html>



## CHAPITRE II

### Potentiel électrique créé par une distribution de charges ponctuelles

#### I Potentiel électrique

##### I-1 Introduction du champ scalaire potentiel électrique

Le champ électrique est un champ vectoriel, c'est-à-dire qu'il est caractérisé en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace par un vecteur  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  dont il faut connaître la direction, le sens et l'intensité. Dans un repère orthonormé, il est repéré par ses trois composantes scalaires  $E_x(\mathbf{r})$ ,  $E_y(\mathbf{r})$  et  $E_z(\mathbf{r})$ .

Nous avons vu en outre que pour déterminer le champ électrique total en un point de l'espace, il faut, en vertu du principe de superposition, faire la somme vectorielle de champs électriques élémentaires dus à chacune des charges.

Tout serait tellement plus facile si chaque point de l'espace était caractérisé non pas par un vecteur mais par un scalaire  $V(\mathbf{r})$ , et si à partir de ce scalaire on pouvait calculer simplement le champ électrique et la force exercée sur une charge  $q$  située en ce point.

Eh bien, ce champ scalaire existe, il s'appelle le potentiel électrique.

Dans un repère orthonormé cartésien, les composantes du champ électrique sont liées à ce potentiel électrique par trois relations:

$$\boxed{E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}}$$

##### I-2 Dérivées partielles

$V(\mathbf{r})$  signifie que  $V$  est une fonction de trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

$\partial V / \partial x$  est la dérivée partielle de  $V$  par rapport à  $x$ . Cette dérivée s'obtient en supposant, le temps du calcul, que  $y$  et  $z$  sont des constantes.

Tout cela, vous le retrouvez en thermodynamique et vous le notez:

$$E_x = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y,z}$$

avec  $y$  et  $z$  en indice, pour bien vous rappeler que lors de la dérivation,  $y$  et  $z$  sont à considérer comme des constantes.

Ici nous estimons qu'il n'y a pas d'ambiguïté, aussi, pour ne pas alourdir les formules, nous ne mentionnons pas les variables qui doivent être considérées comme des constantes lors de la dérivation.

*Soit la fonction  $f(x,y,z) = 2x^2y^2 - z^2x^2 + xy$ ; calculer les fonctions dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x,y$  puis  $z$ . Calculer ensuite les différentes dérivées partielles des premières dérivées partielles. Que constatez vous?*

### I-3 Potentiel électrique dû à une charge ponctuelle

Soit une charge électrique  $q_A$  placée au point A:  $\mathbf{r}_A(x_A, y_A, z_A)$ .

Montrons que le potentiel électrique en un point M:  $\mathbf{r}(x, y, z)$

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}}$$

conduit à l'expression du champ électrique donné par la loi de Coulomb.

La dérivation de  $V$  par rapport à  $x$ , changée de signe, s'écrit:

$$-\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{(x-x_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}} \right] \frac{1}{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}$$

où le terme entre crochet n'est autre que la composante selon  $x$  du vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{AM}$ .

La répétition du calcul sur  $y$  et  $z$  permet de montrer que les composantes de  $\mathbf{E}$  s'obtiennent à partir de la forme de potentiel donné ci dessus.

Si on appelle  $r$  la distance qui sépare le point M du point A, le potentiel électrique créé en M par la charge  $q_A$  placée en A est simplement:

$$V_M = \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

### I-4 ....à une constante près

En fait, le le potentiel électrique est déterminé à une constante près.

Il est bien évident que si vous ajoutez une constante quelconque à l'expression de  $V$ , le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , et donc les forces qui s'exerceront sur des charges placées en  $\mathbf{r}$ , sont inchangés (les dérivées d'une constante sont nulles).

Puisque en fin de compte les forces représentent les seules grandeurs accessibles à l'expérimentateur, il est bien égal d'ajouter ou de ne pas ajouter une constante au potentiel.

C'est tout de même plus simple de ne pas l'ajouter.

*Un système de charges  $q_i$  crée dans l'espace un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et un potentiel  $V(\mathbf{r})$ . A l'origine 0, les composantes du champ électrique sont, exprimées en volts par mètre:  $\mathbf{E}(0)=(-30, 20, 10)$  et le potentiel  $V(0)$  est de 8 volts. Estimer la valeur du potentiel en  $\mathbf{r}(2, -1, 0)$ . préciser les hypothèses de calcul.*

*Un système de charge  $q_i$  crée en chaque point de l'espace un champ  $V$ . (les distances étant exprimées en cm)  $V(-1, 0, 0) = 16V$ ,  $V(1, 0, 0) = 12V$ ,  $V(0, -1, 0) = -15V$ ,  $V(0, 1, 0) = -9V$ ,  $V(0, 0, -1) = -6V$ ,  $V(0, 0, 1) = 8V$ . Estimer le champ électrique à l'origine et au point  $\mathbf{r}(0.5, 0.5, 0.5)$*

## II principe de superposition

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le champ électrique créé par une distribution de charges était égal à la somme vectorielle des champs électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule.

De même, le potentiel électrique créé par une distribution de charges est égal à la somme algébrique des potentiels électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule.

Cette propriété découle de la propriété de dérivation d'une somme qui est simplement égale à la somme des dérivées.

Si le champ électrique total  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en un point  $\mathbf{r}$  est la somme vectorielle des champs  $\mathbf{E}_A(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{E}_B(\mathbf{r})$  créés par des charges placées en A et B:

$$E_x(\mathbf{r}) = E_{Ax}(\mathbf{r}) + E_{Bx}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V_A}{\partial x} - \frac{\partial V_B}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

où:  

$$V(\mathbf{r}) = V_A(\mathbf{r}) + V_B(\mathbf{r})$$

Restons cependant modestes. Nous avons présenté comme une avancée le passage du champ électrique au potentiel en disant: "cette fois-ci, nous n'aurons plus à ajouter des vecteurs; nous n'ajouterons que des scalaires". C'est vrai.

Mais ce serait un peu trop beau si un scalaire apportait la même information qu'un vecteur à trois composantes.

En effet, si la connaissance du champ électrique en un point  $\mathbf{r}$  nous permet de déterminer la force qui s'applique sur une charge  $q$  placée en ce point  $\mathbf{r}$  par la relation:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

La connaissance du potentiel en cet unique point  $\mathbf{r}$  ne permet pas à lui seul de déterminer la force qui s'applique sur la charge  $q$ . Il nous faut savoir aussi comment  $V$  varie au voisinage de ce point, puisque c'est des dérivées partielles de  $V$  que sont déduites les composantes de  $\mathbf{E}$  et finalement de  $\mathbf{F}$ .

### III-Topologie

#### III-1 Equipotentiellles

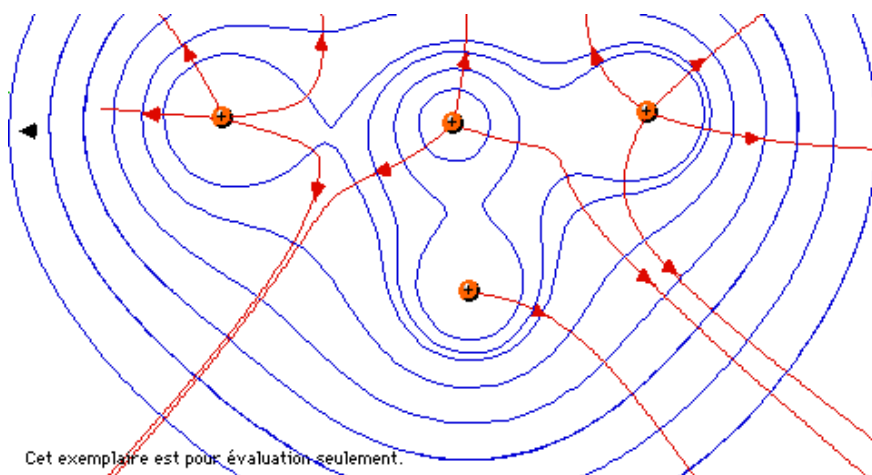
Si la topologie d'un champ vectoriel est donnée par les lignes de champ, la topologie d'un champ scalaire est donnée par des courbes de niveau. Dans le cas d'un potentiel électrique, les courbes de niveau s'appellent les équipotentiellles. Ce sont les courbes joignant les points de même potentiel.

*Une charge  $q=10^{-6} \text{ C}$  est placée à l'origine. Tracer quelques équipotentiellles. Comment se situent-elles par rapport aux lignes de champ?*

#### III-2 Propriétés des équipotentiellles.

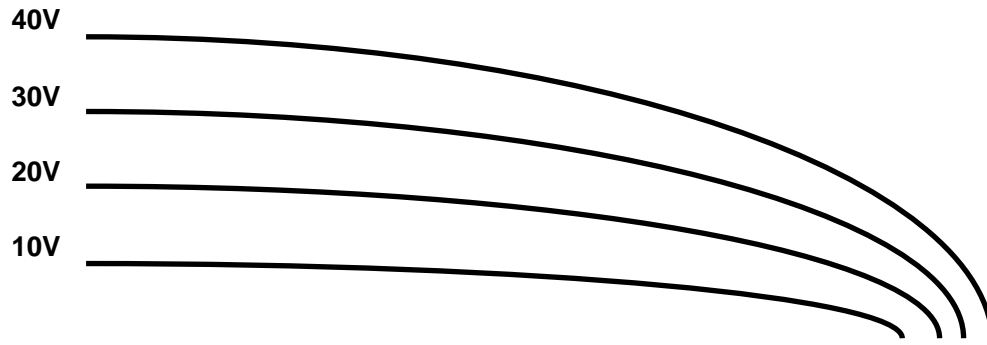
Les équipotentiellles sont des lignes fermées (se fermant éventuellement à l'infini).  
 Elles entourent les charges.  
 Elles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

#### III-3 Exemple d'un système de lignes de champ et d'équipotentiellles.



### III-4 Détermination graphique de champs électriques

*A partir des quelques équipotentiels du schéma ci-dessous, tracer à la même échelle les vecteurs champs électriques aux endroits indiqués par des points.*



### III-5 Analogie cartographique

Vous avez tous effectué des promenades en montagne avec des cartes présentant des lignes de niveau. Ces lignes rejoignent les points situés à la même altitude. Ce sont des lignes fermées entourant les sommets et les fonds. Elles sont strictement équivalentes aux équipotentiels.

Les lignes équivalentes aux lignes de champ ne sont pas représentées. Pour ce faire, il faut prendre en chaque point la perpendiculaire aux lignes de niveau. Les nouvelles lignes indiquent la direction de la pente au point considéré (sens d'écoulement de l'eau).

Plus les lignes de niveau sont serrées, plus la pente est importante. La pente locale est le pendant du champ électrique.



cartes empruntées à : <http://perso.wanadoo.fr/jmlt/orien2.htm>

## IV le gradient

### IV-1 Une diversité de démarches complémentaires

Dans votre métier, vous aurez à résoudre des problèmes pratiques et concrets.

C'est la démarche que nous avons pratiquée dans les exercices ci-dessus. Il y a peu de mathématique mais il faut avoir compris la physique du problème et faire preuve d'initiative. Nous disposons d'informations limitées en nombre ou sous forme graphique.

Il existe des démarches beaucoup plus mathématiques qu'il faut aussi savoir utiliser parce qu'elles représentent des moyens très puissants de résolution de problèmes (pourvu qu'ils soient bien posés). Les mathématiques conduiront à des solutions, qu'il faudra interpréter physiquement et dont il faudra s'assurer de la cohérence en examinant quelques cas limites. Il ne faut pas utiliser l'arsenal mathématique "tête baissée et a priori" mais il ne faut pas non plus y renoncer par crainte du calcul. Vous l'aurez compris: la fin de ce chapitre se dirige vers un développement plus mathématique des champs et potentiels électriques.

#### IV-2 Vecteur gradient

De façon générale, à partir d'un champ scalaire, il est possible de construire un champ vectoriel dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont données par les relations:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Un vecteur défini ainsi est appelé ( au signe près) un gradient:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V$$

Nous verrons plus tard que le gradient peut être considéré comme un être mathématique avec ses propriétés propres.

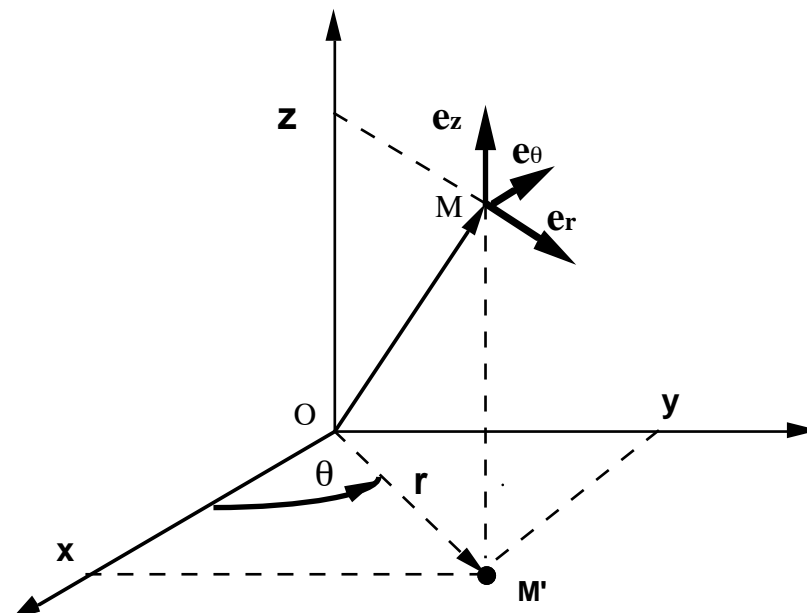
Dans le cadre de ce qu'on appelle l'analyse vectorielle, on sera appelé à manipuler cette grandeur (et quelques autres) en oubliant, comme pour tout vecteur, ses composantes dans un repère particulier.

Nous voulons ici donner simplement les composantes du gradient dans deux repères appelés cylindrique et sphérique.

#### V- Coordonnées cylindriques

##### V-1 Repérage d'un point en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, un point M de l'espace est repéré comme un point de cylindre (droit, à base circulaire) dont l'axe Oz est généralement confondu avec l'axe Oz du repère cartésien.



M (ou  $\mathbf{r}$ ) est repéré par le rayon  $r$  du cylindre sur lequel il s'appuie,  $z$  sa cote par rapport au plan de référence  $xOy$  et  $\theta$  l'angle ( $0x, OM'$ ) où  $M'$  est la projection de  $M$  sur le plan  $xOy$ .

La notation  $\mathbf{r}(r,\theta,z)$  vient se substituer à  $\mathbf{r}(x,y,z)$  du repère cartésien. Vous pouvez facilement vérifier que, pour un point donné, les composantes cartésiennes et cylindriques sont liées par:

$$x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad z = z$$

### V-2 Repérage d'un vecteur en coordonnées cylindriques

Nous nous posons la question de repérer un vecteur dont le point d'application est situé au point  $M$ ,  $\mathbf{r}(r,\theta,z)$

Pour cela nous attachons à  $M$  un repère orthonormé local. Nous l'appelons local par ce qu'il n'est pas le même pour tous les points  $M$  de l'espace.

Ce repère local est fait de 3 vecteurs unitaires de base orthogonaux :

$\mathbf{e}_r$  est un vecteur parallèle à  $OM'$

$\mathbf{e}_\theta$  est parallèle au vecteur tangent en  $M'$  au cercle de rayon  $OM'$  contenu dans le plan  $xOy$

$\mathbf{e}_z$  est parallèle à l'axe  $oz$

Dans ce repère, le vecteur champ électrique a 3 composantes:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$$

*Ecrire dans ce repère les composantes des vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  du repère cartésien.*

Noter qu'en coordonnées cartésiennes le même repère ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) est attaché à chaque point de l'espace.

### V-3 Gradient en coordonnées cylindriques

Lorsque le potentiel  $V(\mathbf{r})$  est exprimé à l'aide des trois variables  $(r,\theta,z)$  les composantes du champ électrique dans le repère cylindrique attaché au point  $M$  sont données par:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

## VI Coordonnées sphériques

### VI-1 Repérage d'un point en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un point  $M$  ( $\mathbf{r}$ ) est considéré comme point d'une sphère.

$M$  est repéré

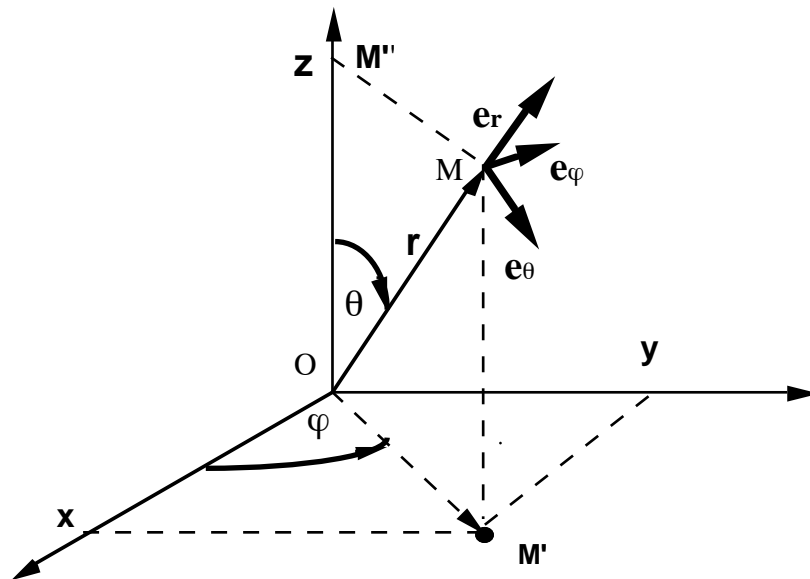
- par le rayon  $r$  de la sphère à laquelle il appartient
- L'angle  $\theta$  entre la direction  $\mathbf{0z}$  et la direction  $\mathbf{0M}$ .  
 $\theta = (\mathbf{0z}, \mathbf{0M})$

- l'angle  $\varphi$  entre la direction  $\mathbf{0x}$  et la direction  $\mathbf{OM'}$  où  $M'$  est la projection de  $M$  dans le plan  $xOy$ :

$$\varphi = (\mathbf{0x}, \mathbf{0M'})$$

*Un point  $M(\mathbf{r})$  étant donné, montrer que ses coordonnées cartésiennes s'écrivent en fonction des coordonnées sphériques; ainsi:*

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad z = r \cos\theta$$



En géographie, où on est amené à repérer un point sur la sphère terrestre, l'angle  $\theta$  indiquerait la latitude par rapport au pôle nord et l'angle  $\varphi$  longitude est par rapport au méridien de référence.

## VI-2 Repérage d'un vecteur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un vecteur  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  attaché au point  $\mathbf{r}$  est repéré par trois composantes ( $E_r, E_\theta, E_\varphi$ ) dans un repère orthonormé local ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ ):

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

$\mathbf{e}_r$  est parallèle à la direction  $\mathbf{0M}$

$\mathbf{e}_\theta$  est tangent en  $M$  au cercle de rayon  $r$  décrit dans le plan qui contient à la fois les directions  $\mathbf{0z}$ ,  $\mathbf{0M}$  et  $\mathbf{0M'}$

$\mathbf{e}_\varphi$  est tangent en  $M$  au cercle de centre  $M''$  et de rayon  $M''M$  contenu dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{0z}$ .

*Considérons les champs et potentiels électriques créés par une charge ponctuelle  $q$  placée à l'origine  $O$ . Exprimer  $V$  puis les composantes de  $\mathbf{E}$  en coordonnées sphériques.*

### VI-3 Gradient en coordonnées sphériques

Lorsque le potentiel  $V(\mathbf{r})$  est exprimé à l'aide des trois variables  $(r, \theta, \varphi)$  les composantes du champ électrique dans le repère sphérique attaché au point M sont données par:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Tout cela vous semble sans doute bien compliqué! Cela se clarifiera à l'usage.

*Pour vous rassurer, déduisez le champ électrique  $\mathbf{E}$  créé par une charge ponctuelle à partir de l'expression du potentiel  $V(r, \theta, \varphi)$  exprimé en coordonnées sphériques.*

### VII Le rotationnel du champ électrique

Considérons un champ de vecteur  $\mathbf{E}(x, y, z)$  et ses composantes  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  et  $E_z(x, y, z)$ .

On appelle rotationnel de  $\mathbf{E}$  le vecteur  $\text{rot}(\mathbf{E})$  dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Si le champ de vecteur  $\mathbf{E}$  dérive d'un potentiel scalaire  $V$  selon la relation  $\mathbf{E} = - \text{grad } V$ , alors  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V \Rightarrow \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

( $\mathbf{0}$  en caractère gras signifie vecteur nul)

Le rotationnel est un nouvel être mathématique de l'analyse vectorielle.

Retenons pour l'instant qu'un champ de vecteur dont le rotationnel n'est pas nul ne peut pas être un champ électrique. Dans ce cas en effet il ne dériverait pas d'un gradient.

### VIII Le "vecteur" nabla

Le "vecteur nabla" noté  $\nabla$  est largement utilisé dans les ouvrages anglo-saxons. Ce n'est pas un vrai vecteur mais seulement un vecteur symbolique, c'est-à-dire qu'on peut (moyennant quelques précautions) le manipuler comme un vecteur. Il s'écrit:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

et en coordonnées cartésiennes, ses composantes sont:



$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le rotationnel du vecteur **E** apparaît comme le produit vectoriel de nabla et de **E**:

$$\mathbf{rot\ E} = \nabla \wedge \mathbf{E}$$

Le gradient de V apparaît comme le produit de nabla et de V:

$$\mathbf{grad\ V} = \nabla V$$

Attention: l'utilisation de ce "vecteur" comporte quelques pièges!!



## CHAPITRE III

### Champs et potentiels créés

#### par des distributions de charges non ponctuelles

##### I- Introduction

Jusqu'ici, nous avons admis que les charges étaient ponctuelles, c'est-à-dire localisées en des points de dimension "infinitement petite".

Cela est correct lorsque l'on considère la charge de particules élémentaires telles que l'électron ou le proton.

Cela reste raisonnable lorsque les objets chargés sont de dimension petite comparée à la distance qui les sépare de l'observateur.

L'approximation devient médiocre lorsque au moins une des dimensions de l'objet portant la charge électrique devient significative devant la distance objet-observateur.

Elle devient totalement irréaliste lorsque cette dimension est plus grande que la distance objet-observateur.

Nous allons examiner les effets d'extension spatiale de l'objet portant la charge électrique en procédant en trois étapes:

i) La taille de l'objet est importante dans une seule des dimensions et reste faible dans les deux autres dimensions. L'objet est typiquement un fil, linéaire ou curviligne. Les charges sont distribuées suivant une ligne.

ii) L'objet est étendu suivant deux directions. C'est une feuille plane ou "ondulée". Les charges sont distribuées sur une surface.

iii) L'objet est étendu dans les trois directions. C'est un volume au sein duquel les charges sont continûment réparties.

##### II Répartition des charges sur un objet filiforme

###### II-1 Densité de charge linéique:

Considérons un fil AB, rectiligne ou curviligne, de longueur L portant une charge électrique Q uniformément répartie.

On appelle densité de charge linéique ou charge par unité de longueur la quantité  $\lambda = Q / L$

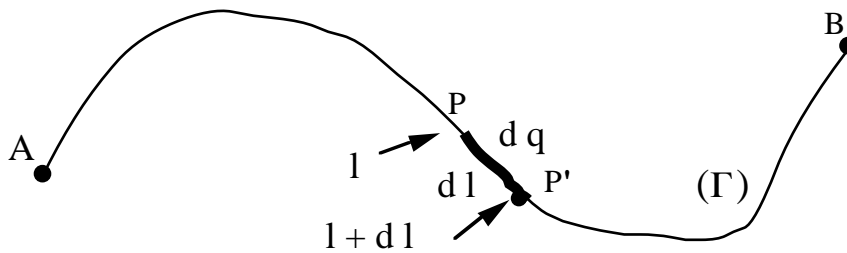
*Déterminer la charge linéique d'un fil de 4m chargé uniformément d'une charge de  $10^{-3}$  C.*

Dans le cas général, la charge n'est pas uniformément répartie et la densité de charge linéique varie de point en point.

Sur un tel fil, un point P est repéré par sa coordonnée curviligne l. Cette coordonnée l représente la distance que doit parcourir un mobile partant d'un point 0 choisi comme origine pour rejoindre le point P.

Soit un point P', voisin de P, de coordonnée curviligne l+dl

L'élément de fil PP' de longueur dl porte un élément de charge dq.



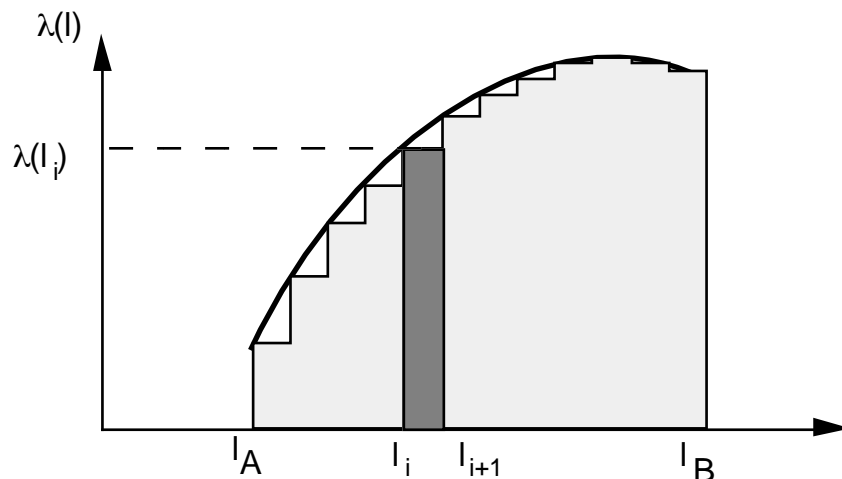
On appelle densité de charge linéique en  $l$  la limite lorsque  $P'$  se rapproche de  $P$  de la grandeur de  $dq/dl$

$$\lambda(l) = \lim_{dl \rightarrow 0} \left( \frac{dq}{dl} \right)$$

La densité de charge linéique s'exprime en Coulombs par mètre.

Il est bien clair que dans l'expression ci-dessus,  $dq$  et  $dl$  tendent vers 0 simultanément mais que le rapport des deux tend vers une limite finie.

Pour déterminer la charge totale connaissant  $\lambda(l)$ , découpons le fil en éléments de longueurs  $\Delta l_i$  situés entre les cotes  $l_i$  et  $l_{i+1}$ .



Affectons une densité de charge uniforme  $\lambda(l_i)$  à l'élément de fil compris entre  $l_i$  et  $l_{i+1}$ . L'élément de charge  $\Delta q_i$  portée par l'élément de longueur  $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$  est égal au produit  $\lambda(l_i) \Delta l_i$  c'est-à-dire à l'aire du rectangle grisé sombre.

La charge totale portée par le fil est alors égale à la somme des aires de tous les rectangles.

$$Q = \sum_i \Delta q_i = \sum_i \lambda(l_i) \Delta l_i$$

Cette valeur n'est qu'approximative puisqu'on a affecté la même densité de charge entre  $l_i$  et  $l_{i+1}$ . Elle devient plus proche de la réalité si on affine le pas de la découpe. Elle tend vers l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $\lambda(l)$  et les deux droites verticales élevées en A et B

Comme vous l'avez vu, cette aire est égale à l'intégrale de  $\lambda(l)$  entre  $l_A$  et  $l_B$ , abscisses curvilignes des points A et B.

$$Q = \int_{l_A}^{l_B} \lambda(l) dl = \int_A^B \lambda(l) dl$$

La deuxième notation signifie intégrale curviligne effectuée en suivant la ligne ( $\Gamma$ ).

## II-2 Exemple de charge portée par un fil

Considérons un fil de longueur  $L$  d'origine  $A$  de coordonnée curviligne  $l$ . Supposons que la densité de charge linéique de ce fil soit fonction de l'abscisse  $l$  et s'écrive  $\lambda(l) = 10^{-4} l$ .

Entre les points d'abscisse  $l$  et d'abscisse  $l + dl$ , l'élément de charge est

$$dq = \lambda(l) dl = 10^{-4} l dl.$$

La charge totale est donc:

$$Q = \int_0^L 10^{-4} l dl = 10^{-4} \left[ \frac{l^2}{2} \right]_0^L = 5 \cdot 10^{-3} L^2$$

La charge totale portée par un fil de longueur  $L$  est de  $10^{-6} C$ . Sachant que la répartition de charge est de la forme  $\lambda(l) = A l^2$ , déterminer le coefficient  $A$ .

## III Calcul du potentiel électrique créé par un fil chargé

### III-1 Approximation par discrétisation

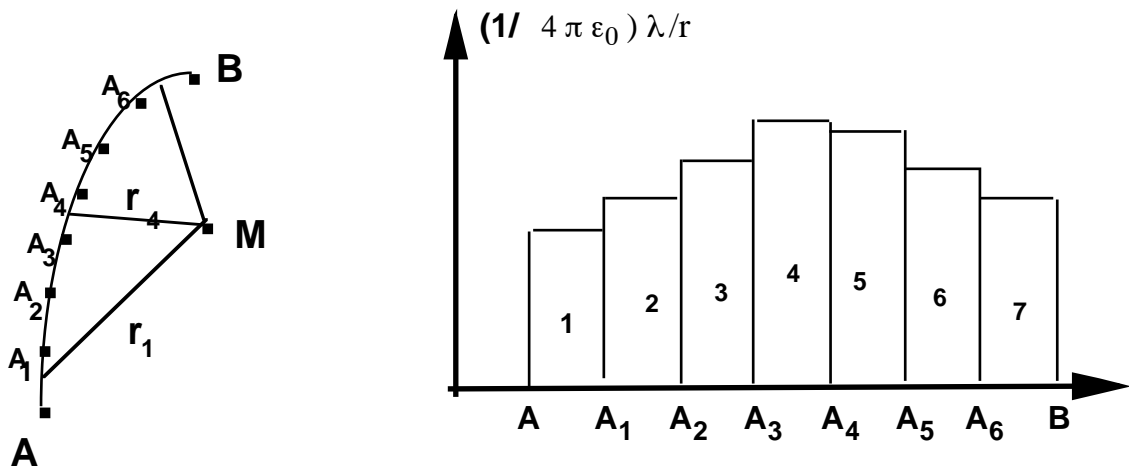
Considérons un fil curviligne  $AB$ . Ce fil est chargé avec une densité linéique  $\lambda(l)$ . Notre objectif est de calculer le potentiel créé par les charges portées par ce fil en un point quelconque  $M$  de l'espace.

Pour cela, divisons le fil  $AB$  en segments  $AA_1, A_1A_2, A_{i-1}A_i$ , etc. assez petits pour que l'on puisse considérer:

i) que tous les points appartenant au même segment élémentaire  $A_{i-1}A_i$  sont à la même distance  $r_i$  de  $M$ .

ii) que la densité de charge linéique  $\lambda_i$  dans l'intervalle  $A_{i-1}A_i$  est uniforme.

Dans ces conditions, la charge portée par le segment  $AA_1$  est  $l_1 \Delta l_1$ . La charge portée par le segment  $A_{i-1}A_i$  est  $l_i \Delta l_i$ .



L'élément de potentiel créé par le segment  $\Delta l_1 = AA_1$  est:

$$\Delta V_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda_1 \Delta l_1}{r_1}$$

Le potentiel créé par le segment  $\Delta l_i = A_{i-1}A_i$  est:

$$\Delta V_i = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda_i \Delta l_i}{r_i}$$

Traçons un diagramme faisant figurer en abscisse les distances  $\Delta l_i$ , et en ordonnée les grandeurs  $(1/4\pi \epsilon_0) \lambda_i/r_i$ , etc.

Le potentiel  $\Delta V_i$  peut être considéré comme l'aire du rectangle  $i$ , de largeur  $\Delta l_i$  et de hauteur  $(1/4\pi \epsilon_0) \lambda_i/r_i$ .

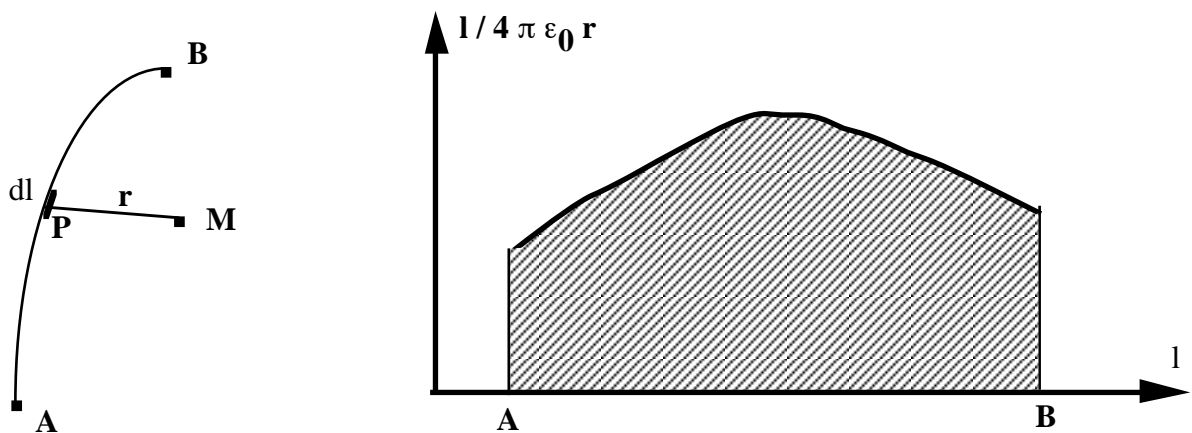
En vertu du principe de superposition, le potentiel total est la somme des aires de tous les rectangles soit:

$$V = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda_i \Delta l_i}{r_i}$$

### III-2 Limite continue

Le calcul ci-dessus ne constitue qu'une première approximation. Pour effectuer un calcul plus précis, il nous faut de nouveau affiner le maillage et faire tendre la courbe en escalier vers une courbe continue.

Le potentiel total est l'aire sous la courbe représentant  $(1/4\pi\epsilon_0)\lambda/r$  en fonction de  $l$



Soit:

$$V_M = \int_A^B \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda(l) dl}{r(l)}$$

L'intégration est alors plus ou moins facile à effectuer selon la forme de  $\lambda(l)$  et de  $r(l)$ .

On peut donc dire que l'élément de potentiel  $dV$  créé en  $M$  par la charge électrique  $dq = \lambda(l) dl$  localisée au voisinage du point  $P$  entre les abscisses curvilignes  $l$  et  $l+dl$  et située à la distance  $r(l)$  s'écrit:

$$dV = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda(l) dl}{r(l)}$$

et que le potentiel total est la somme (au sens de l'intégrale) des éléments  $dV$ .  
C'est un type de calcul infinitésimal que nous serons très souvent amenés à répéter en physique.

### III-3 Coordonnées du point source et de l'observateur

Lors du calcul d'un élément de potentiel, nous avons deux points à considérer: le point source P où se trouve l'élément de charge et le point M, où se situe l'observateur, et en lequel on cherche à calculer le potentiel V.

Chacun de ces points est décrit par ses propres coordonnées. Lorsqu'il y a confusion possible, nous noterons avec un  $\mathbf{r}'(x',y',z')$  les coordonnées du point source et  $\mathbf{r}(x,y,z)$  les coordonnées du point M.

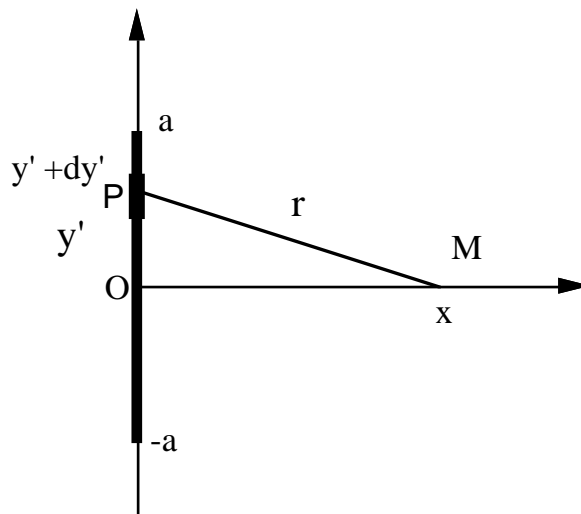
Pour calculer le potentiel, on devra intégrer sur les variable  $x',y',z'$  et on obtiendra une fonction  $V(x,y,z)$ . Le champ électrique en  $\mathbf{r}$  sera déduit du gradient de V, en dérivant par rapport à  $x,y,z$ .

Dans bien des cas, il n'y a pas de confusion possible, et nous ne prendrons pas la peine d'ajouter des '.

### III-4 Exemple de calcul de potentiel

Examinons le fil rectiligne de longueur  $L=2a$  uniformément chargé, centré en 0 et dirigé le long de l'axe  $Oy$ . Calculons le potentiel en un point M situé sur l'axe  $Ox$  à la distance  $x$  du fil.

Les coordonnées de P sont  $(x',y',z')$  et celles de M sont  $(x,y,z)$



Considérons un élément de longueur  $dy'$  compris entre  $y'$  et  $y'+dy'$ . La charge portée par cet élément est égale à  $\lambda dy'$ . La distance entre cet élément de longueur et le point M est égale à  $(x^2 + y'^2)^{1/2}$ .

La contribution  $dV$  de cet élément  $dy'$  au potentiel en M est donc:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy'}{\sqrt{y'^2 + x^2}}$$

et par intégration sur les  $y'$  entre  $-a$  et  $+a$ , nous avons:  
(Pour ce qui est de l'intégration, voyez un cours de mathématique ou consultez les tables)

$$V(x,0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dy'}{\sqrt{y'^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(y' + \sqrt{y'^2 + x^2}) \right]_{-a}^{+a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{-a + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

C'est un résultat exact.

De façon similaire, on peut calculer  $V(x,y)$  en tout point du plan  $xOy$  de la figure.

Le potentiel en un point  $(x,y,z)$  quelconque de l'espace se déduit de  $V(x,y)$  par rotation autour de l'axe  $Oy$ .

*Un fil rectiligne de longueur 10cm porte une charge de  $1\mu C$  uniformément répartie sur sa longueur. Représenter l'évolution du potentiel le long de l'axe  $ox$ .*

### III-5 Examen du comportement asymptotique

Il est toujours heureux, après un tel calcul, d'examiner si le comportement à grande distance, ou à petite distance, ou encore en des points particuliers de haute symétrie, sont physiquement raisonnables.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on s'attend à ce que l'expérimentateur placé à grande distance du fil (comparé à sa longueur  $2a$ ) ne se rende plus tout à fait compte de son extension spatiale et le voie comme une charge ponctuelle  $Q = 2a\lambda$  dont il serait à la distance de  $x$ . Ainsi on attend à grande distance un comportement du potentiel de la forme:

$$V(x,0) \approx \frac{2a\lambda}{4\pi\epsilon_0 x}$$

On retrouve effectivement ce comportement en écrivant:

$$\ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{-a + \sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \right)$$

En tenant compte du développement limité (pour  $\epsilon$  petit) du logarithme au voisinage de l'unité:

$$\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$$

où ici:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$$

et en tenant compte du fait que  $(x^2/a^2) \gg 1$

On obtient pour  $x \gg a$ :

$$V(x,0) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{x} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

Il est clair que nous avons négligé  $a$  devant  $x$  aux moments "opportuns".

Vous allez sans doute vous demander ce que sont ces moments opportuns.

Pour les déceler, il y a deux conditions:

- i) Il faut connaître les développements limités les plus courants,
- ii) Il faut pratiquer et faire un certain nombre de telles approximations.

Nous n'insisterons jamais assez pour vous inciter à examiner ce que deviennent des formules trouvées par de longs calculs, dans des cas particuliers simples ou dans des conditions extrêmes.



## IV Champ électrique créé par un fil

### IV-1 Champ électrique, dérivée du potentiel

Le calcul du champ électrique en un point  $\mathbf{r}$  à partir du potentiel électrique nécessite en principe la connaissance du potentiel au voisinage de ce point et cela dans toutes les directions (suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$ ). On utilise alors la relation:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V.$$

Toutefois, par des arguments de symétrie, la détermination du champ électrique en des points, le long de lignes ou sur des plans particuliers peut ne nécessiter qu'une connaissance partielle du potentiel.

C'est le cas dans l'exemple du fil uniformément chargé, si l'on veut déterminer le champ électrique en des points situés sur l'axe  $Ox$  ou plus généralement dans le plan  $xOz$ . Par symétrie, il est clair qu'en tout point  $M$  du plan bissecteur du fil, le champ électrique est dirigé dans la direction  $OM$ . Cela signifie que si  $M$  est sur l'axe  $Ox$ , le champ électrique n'a de composante ni suivant  $y$  ni suivant  $z$ . La seule composante du champ est donc:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

qui ne requiert que la connaissance de la variation de  $V$  en fonction de la variable  $x$ .

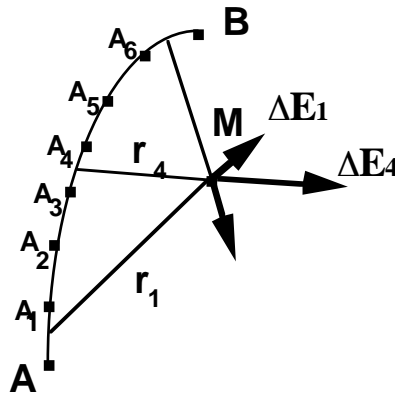
*Montrer que la composante  $E_x$  du champ électrique en un point de l'axe  $ox$  s'écrit:*

$$E_x(0,x) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

*Discuter son comportement à grande distance*

### IV-2 Formule générale du champ électrique créé par un fil

Reprenons la découpe du fil curviligne et déterminons le champ électrique  $\Delta \mathbf{E}_i$  créé par chaque élément de longueur  $\Delta l_i$  compris entre  $A_{i-1}$  et  $A_i$  et placé à la distance  $r_i$  du point  $M$ .



Chaque élément de fil  $A_{i-1}A_i$  crée en  $M$  un élément de champ qui est un vecteur:

$$\Delta \mathbf{E}_i = \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4 \pi \epsilon_0 r_i^2} \mathbf{u}_i$$

où  $\mathbf{u}_i$  est le vecteur unitaire joignant le milieu du segment de droite  $A_{i-1}A_i$  au point  $M$ .

Le champ électrique total  $\mathbf{E}$  est la somme vectorielle des champs élémentaires

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4 \pi \epsilon_0 r_i^2} \mathbf{u}_i$$

ce qui signifie que composante par composante: (nous écrivons ici la composante cartésienne x, nous pourrions le faire sur toute autre composante):

$$E_x = \sum_i \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4 \pi \epsilon_0 r_i^2} u_{i,x}$$

Par passage à la limite continue on obtient pour  $E_x$

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda(l) dl}{r^2(l)} u_x(l)$$

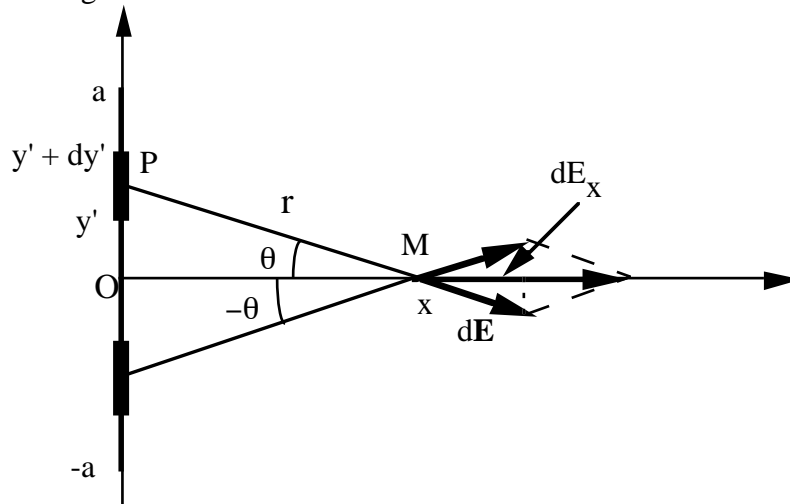
Le même calcul peut être répété pour les deux autres composantes: ce que nous récapitulons formellement par:

$$\mathbf{E}_M = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda(l) dl}{r^2(l)} \mathbf{u}(l)$$

Cette équation entre vecteur est formelle en ce sens qu'on ne peut pas intégrer directement. Il faut faire la somme vectorielle des éléments de champ électrique. Cette relation ne fait que synthétiser trois intégrales scalaires définissant chacune les composantes du champ électrique.

#### IV- 3 Exemple de calcul

Reprenons le calcul du champ électrique  $\mathbf{E}(x,0)$  créé par un fil de longueur  $2a$ , uniformément chargé.



L'élément de fil de longueur  $dy'$  compris entre  $y'$  et  $y'+dy'$ , situé à la distance  $(x^2+y'^2)^{1/2}$  de M, porte une charge  $\lambda dy'$ . La composante  $u_x$  du vecteur unitaire est :

$$u_x = \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

Il vient:

$$E_x(x,0) = \frac{\lambda x}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{(x^2 + y'^2)^{3/2}} dy'$$

Soit:

$$E_x(x,0) = \frac{\lambda x}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{y'}{x^2 \sqrt{x^2 + y'^2}} \right]_{y'=-a}^{y'=+a}$$

Soit encore en tenant compte de  $Q=2al$ :

$$E_x(x,0) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

*Reprendre plusieurs fois et en détail l'ensemble du calcul. Il a valeur d'exemple.*

On peut voir aussi sur la figure ci-dessus que des éléments de fil symétriques par rapport à l'axe  $Ox$  produisent des éléments de champ dont la résultante est orientée suivant  $Ox$ . Cela justifie qu'en tout point  $M$  du plan bissecteur du fil, le champ électrique est dirigé suivant  $OM$ .

Montrer par le calcul que  $E_y(x,0)$  est nul.

## **V Charge surfacique**

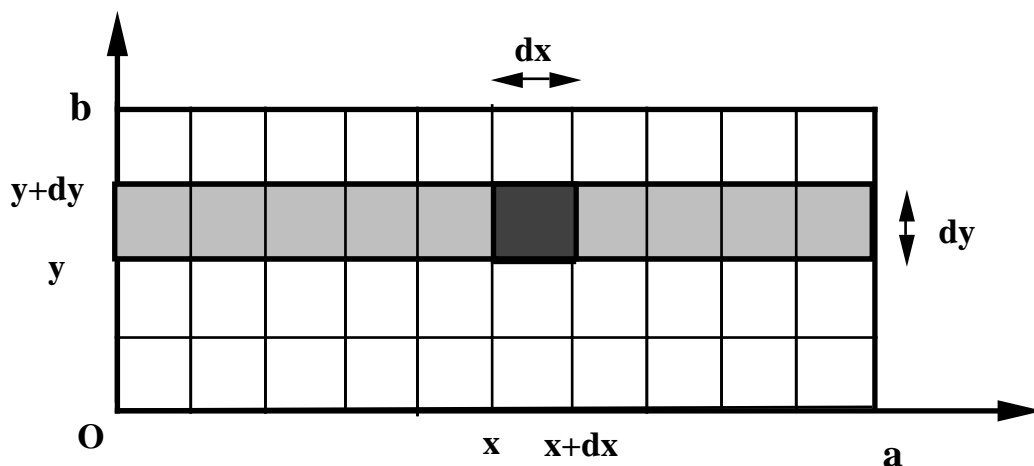
### **V-1 Densité de charge surfacique**

Considérons une surface  $S$  (non nécessairement plane) portant une charge  $Q$  uniformément répartie. On appelle densité de charge surfacique la quantité  $\sigma = Q/S$ .

Tout comme le fil, la surface peut ne pas être chargée uniformément. Dans ce cas il faut préciser la charge surfacique en chaque point de la surface, à l'aide d'un repère adapté à la forme de la surface.

Si la surface est plane, on choisira un repère cartésien ou polaire. Si la surface est en forme de calotte sphérique, on penchera plutôt pour un repère sphérique. Si la surface est gauche..., ce sera beaucoup plus complexe et il faudra se tourner vers des méthodes numériques.

### **V-2 Densité de charge surfacique en coordonnées cartésiennes**



Le repère cartésien est particulièrement bien adapté lorsque la surface est rectangulaire et plane.

Dans le repère (xOy), un élément de surface, dont l'abscisse est compris entre x et x+dx, et l'ordonnée entre y et y+dy, présente un élément d'aire  $dS = dx dy$  (en gris foncé sur la figure ci-avant) et porte un élément de charge  $d^2q(x,y) = \sigma(x,y) dx dy$ .  
( Pour les notations, voir la note sur les infiniments petits au paragraphe suivant).

Le calcul de la charge totale de la plaque peut alors s'effectuer en deux étapes :

i) Détermination de l'élément de charge dq portée par un élément rectangulaire de longueur a et de largeur dy (élément en gris clair) compris entre y et y+dy. Cet élément de charge est une fonction de la variable y et s'obtient en faisant la somme des éléments de charge dq selon x (dans ce calcul y est une constante).

$$dq(y) = \int_{x=0}^{x=a} dq(x,y) = \int_{x=0}^{x=a} [\sigma(x,y) dy] dx = dy \int_{x=0}^{x=a} \sigma(x,y) dx = \lambda(y) dy$$

Il s'agit d'un calcul tout à fait équivalent à celui de la charge d'un fil rectiligne de longueur a, portant la charge linéique  $\sigma(x,y) dy$ .

Nous avons sorti dy de l'intégration car il ne dépend pas de x.

$dq(y)$  prend la forme  $t(y) dy$  et représente l'élément de charge apporté par les tranches dont l'ordonnée est comprise entre y et y+dy.

ii) Sommation des contribution de charge dq apportée par chaque tranche dy:

$$Q = \int_{y=0}^{y=b} dq(y) = \int_{y=0}^{y=b} t(y) dy$$

Nous avons intégré sur x puis intégré sur y. Nous aurions pu faire l'inverse, c'est-à-dire intégrer sur les y puis sur les x. Nous aurions alors fait la somme de contributions de bandes verticales d'épaisseur dx.

Bien sûr, le résultat est indépendant de l'ordre d'intégration et l'on note:

$$Q = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \sigma(x,y) dx dy = \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \sigma(x,y) dx dy$$

Ceci est appelé intégrale double.

### V-3 Note sur les infiniments petits

- dx ou dy sont des infiniment petits du premier ordre.
- une expression renfermant le produit de deux infiniment petits du premier ordre est un infiniment petit du deuxième ordre; elle se note en principe  $d^2S = dx dy$  ou  $d^2q = \sigma(x,y) dx dy$ .

- une expression renfermant le produit de trois infiniment petits du premier ordre est un infiniment petit du troisième ordre. Par exemple, l'élément de volume  $d^3\tau = dx dy dz$ .

L'exposant (2 ou 3) indiquant l'ordre de l'infiniment petit est généralement omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et l'on note souvent dS pour  $d^2S$  ou dτ pour  $d^3\tau$ .)

### V-3 Exemple de charge portée par une surface rectangulaire

Considérons une surface rectangulaire dont les abscisses sont situées entre x = a et x = b et les ordonnées entre y = c et y = d. Supposons que cette surface soit chargée

avec une densité surfacique  $\sigma(x,y)$  fonction de  $x$  et de  $y$ ,  $\sigma(x,y) = A (x^2+y^2)$ .  
 Déterminons la charge totale de la plaque.

Procédons comme ci-avant et intégrons tout d'abord suivant les  $x$ :

$$\begin{aligned} dq(y) &= dy \int_{x=a}^{x=b} A(x^2+y^2) dx = dy \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=a}^{x=b} \\ &= dy \left[ \frac{b^3 - a^3}{3} + y^2 (b-a) \right] \end{aligned}$$

C'est la charge apportée par le rectangle gris clair situé entre  $y$  et  $y+dy$ .  
 Par intégration sur les  $y$ , on obtient la charge totale soit:

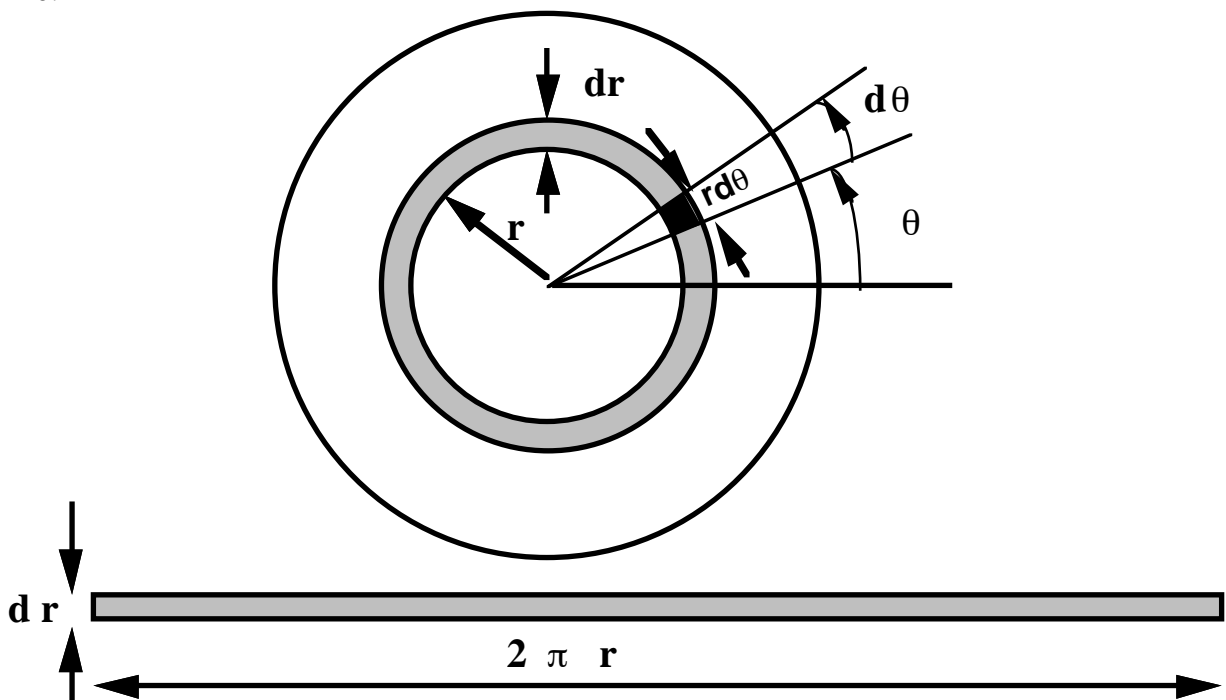
$$Q = \int_{y=c}^{y=d} \left[ \frac{b^3 - a^3}{3} + y^2 (b-a) \right] dy$$

Terminer le calcul de  $Q$

#### V-4 Densité de charges surfaciques en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont les coordonnées naturelles d'objets circulaires. Un point  $M$  est repéré par la distance  $r = OM$  qui la sépare du centre  $O$  et l'angle orienté  $\theta$  que fait la direction **OM** avec l'axe des  $x$ .

Les coordonnées polaires sont équivalentes aux coordonnées cylindriques à la cote  $z=0$ .



Une surface élémentaire du deuxième ordre est représentée en noir sur le dessin ci-dessus. Dans la limite de  $dr$  et de  $d\theta$  petits, cette surface est un petit rectangle de cotés  $dr$  et  $r d\theta$ .

L'élément de surface  $d^2S$  s'écrit:

$$d^2S = r dr d\theta$$

Si l'on fait l'intégrale (somme) de cette expression sur tous les angles  $\theta$  compris entre 0 et  $2\pi$ , on obtient un nouvel élément de surface représenté en gris. Ce nouvel élément de surface ( maintenant infiniment petit du premier ordre) s'écrit:

$$dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r dr d\theta = r dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = r dr \left[ \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi r dr$$

$dS$  est bien l'aire d'un rectangle de largeur  $dr$  et de longueur  $2\pi r =$  périmètre du cercle de rayon  $r$ . On obtient ce petit rectangle en déroulant l'aire hachurée.

Vous allez dire que dérouler une couronne de cercle n'a jamais donné un rectangle. Cela tend vers un rectangle dans la limite des  $dr$  petits, c'est-à-dire dans la limite où nous travaillons.

D'ailleurs nous pouvons nous convaincre du bien-fondé de la méthode en terminant le calcul de l'aire  $S$  du cercle. Il reste à faire pour cela la somme de couronnes de rayons  $r$ , c'est à dire intégrer  $dS$  sur la variable  $r$  entre 0 et  $R$ :

$$S = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi r dr = \pi R^2$$

ce qui est bien l'aire du cercle de rayon  $R$ .

En coordonnées polaires, la densité surfacique  $\sigma(r,\theta)$  est une fonction de  $r$  et de  $\theta$ . Dans certains cas particuliers, elle n'est fonction que de  $\theta$ . Dans des cas plus particuliers encore, elle ne dépend d'aucune de ces variables et est uniforme.

Par un raisonnement tout à fait similaire à celui que nous avons suivi pour les coordonnées rectangulaires, nous avons:

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} \sigma(r,\theta) r dr = \int_{r=0}^{r=R} r dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sigma(r,\theta) d\theta$$

On peut intégrer dans l'ordre que l'on veut. Ce n'est pas très compliqué, il faut juste un peu de pratique.

#### V-5 Exemple de charge portée par un disque

Considérons un cercle de rayon  $R$  chargé avec une densité de charge  $\sigma(r,\theta) = A r \cos^2\theta$ . Ce n'est pas une densité de charge très habituelle. Elle est d'autant plus grande que l'on s'éloigne du centre  $O$  du cercle et que l'on se rapproche de l'axe  $Ox$ . Disons qu'elle est inventée pour illustrer le calcul de  $\sigma$ .

*Représenter un cercle et y porter des charges dont la densité varie en  $r \cos^2\theta$*

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} A r^2 \cos^2\theta dr = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} A \frac{R^3}{3} \cos^2\theta d\theta = A \frac{\pi R^3}{3}$$

*Faire en détail le calcul ci-dessus. Les tables donnent:*

$$\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}$$

*Reprendre le calcul en intégrant d'abord sur  $\theta$ .*

## VI Potentiel électrique créé par une surface

### VI-1 Expression générale

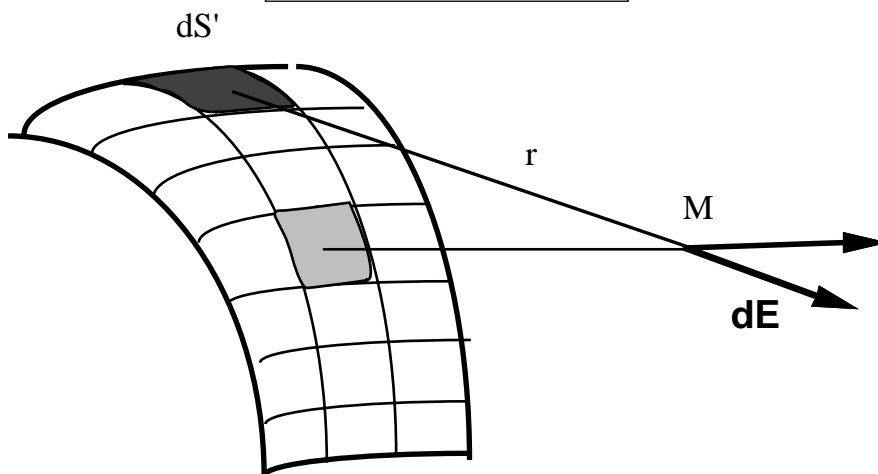
Un élément de surface  $dS'$  portant une charge  $d^2q = \sigma dS'$  placé à la distance  $r$  du point  $M$  produit en ce point une contribution au potentiel:

$$d^2 V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\sigma dS'}{r}$$

nous avons représenté deux éléments  $dS'$ .

Le potentiel total créé en  $M$  est la somme de toutes les contributions élémentaires et s'écrit formellement:

$$V_M = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS'}{r}$$



où les deux signes intégral signifient qu'il faut faire une intégrale double. Il s'agit d'un calcul souvent difficile puisque les éléments de surface ne sont pas en général sur un même plan.

Il faut paramétrer l'élément de surface (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de variables), exprimer  $r$  et  $\sigma$  en fonction de ces paramètres puis intégrer sur ces paramètres.

### VI-2 Expression du potentiel créé par un rectangle chargé

Considérons le rectangle ABCD placé dans le plan  $(yOz)$ , chargé avec une densité de charge surfacique dont la valeur dépend des paramètres naturels du problème  $y'$  et  $z'$  (ici  $x'=0$ )

Un élément de surface  $dS' = dy' dz'$  localisé au point  $(y', z')$  porte une charge élémentaire  $dq = \sigma(y', z') dy' dz'$ . Cet élément de surface est placé à une distance  $r(y', z')$  d'un point  $M(x, y, z)$  dont on veut connaître le potentiel.  $r$  s'exprime en fonction de  $y$  et  $z$  selon la relation:

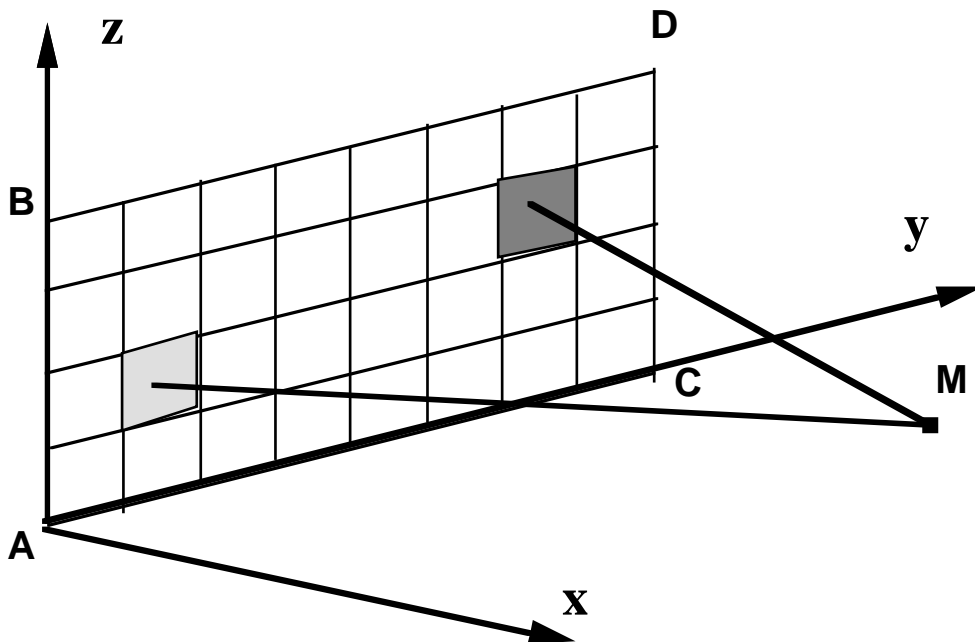
$$r(y', z') = \sqrt{(x)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

L'élément de potentiel en  $x, y, z$  s'écrit:

$$dV = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\sigma(y', z') dy' dz'}{\sqrt{x_M^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

et le potentiel total en  $M$ :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{y'=y_A}^{y'=y_C} \int_{z'=z_A}^{z'=z_B} \frac{\sigma(y', z') dy' dz'}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$



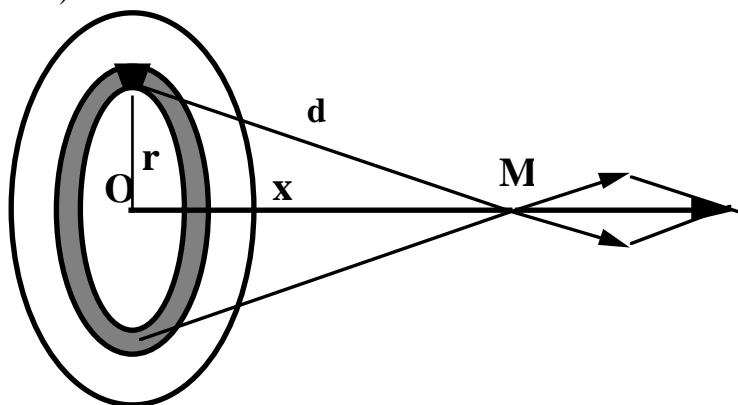
Le calcul peut être plus ou moins complexe mais il est en principe faisable.

### VI-3 Potentiel créé par un disque en un point son l'axe

Les coordonnées naturelles d'un disque chargé sont les coordonnées polaires. Un élément de surface du disque  $r dr d\theta$  placé en  $(r, \theta)$  (élément en noir) porte une charge  $d^2q = \sigma(r, \theta) r dr d\theta$ . Il est placé à la distance  $d = (r^2 + x^2)^{1/2}$  du point M. Sa contribution au potentiel est donc:

$$d^2 V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\sigma(r, \theta) r dr d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(Nous notons  $d$  la distance entre l'élément de charge et le point M (au lieu de l'habituel  $r$ ) pour éviter toute confusion avec le rayon  $r$  de la couronne élémentaire choisie sur l'objet circulaire)





Reste à intégrer en  $\theta$  (entre 0 et  $2\pi$ ) pour avoir la contribution au potentiel due à la couronne en gris de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ . Puis en  $r$  (entre 0 et  $R$ ) pour avoir la contribution de toutes les couronnes, c'est-à-dire la contribution totale.

#### VI-4 Potentiel créé par un disque uniformément chargé, en un point de son l'axe

Si le disque est uniformément chargé,  $\sigma(r,\theta) = \sigma_0$ :

$$V = \frac{\sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{2\pi \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(on peut intégrer directement en  $q$  avec comme résultat  $2\pi$  lorsque  $\sigma$  ne dépend que de la variable  $r$ )

En utilisant la relation

$$\int \frac{u du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

on arrive très facilement à :

$$V = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - |x|)$$

*Faire le calcul en détail, c'est un cas classique.*

### VII Champ électrique créé par une surface

#### VII-1 Calcul à partir du potentiel

Vous pouvez reprendre mot à mot le paragraphe consacré au calcul du champ électrique créé par un fil à partir du potentiel. Ici aussi, nous tirerons au maximum avantage des symétries du problème.

*Calculer le champ électrique créé en un point  $M$  de l'axe d'un disque uniformément chargé.*

#### VII-2 Expression formelle

De façon tout à fait similaire à ce que nous avons fait pour le calcul direct du champ électrique créé par un fil chargé, nous pouvons écrire formellement le champ électrique créé par une surface chargée.

Chaque élément de surface  $dS'$ , de charge surfacique  $\sigma$ , placé à la distance  $r$  de  $M$  et dont la direction le joignant à  $M$  est repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , apporte une contribution  $d^2\mathbf{E}$  au champ électrique:

$$d^2\mathbf{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\sigma dS'}{r^2} \mathbf{u}$$

Le champ électrique total s'écrit:

$$\mathbf{E}_M = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS'}{r^2} \mathbf{u}$$

Le champ électrique total est la somme sur toute la surface  $S$  des champs électriques élémentaires créés par les éléments de surface  $dS'$  portant des charges  $d^2q = \sigma dS'$

Cette relation se décompose en trois nouvelles relations valables pour chacune des composantes:

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS'}{r^2} u_x$$

Comme précédemment pour le potentiel, il est possible d'effectuer le calcul de  $E_x$  en paramétrant  $\sigma$ ,  $r$ ,  $u_x$  et  $dS'$  à l'aide de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou sphériques.

*Calculer par méthode directe le champ produit en un point M de l'axe d'un disque chargé uniformément.*

## **VIII Densité de charge volumique**

### **VIII-1 Distribution de charge volumique**

Si un solide de volume  $\tau'$  porte une charge  $Q$  uniformément répartie, la densité de charge volumique est  $\rho = Q / \tau'$ .

*Quelle est la densité de charges volumiques dans une sphère de  $1\text{cm}^3$  uniformément chargée portant  $10^{-6}\text{C}$ ?*

Dans le cas général, la charge n'est pas uniforme et la densité volumique  $\rho(\mathbf{r}')$  dépend du point  $\mathbf{r}'$  que l'on considère. L'élément de charge dans le volume  $d\tau'$  localisé autour du point  $\mathbf{r}'$  est  $d^3q = \rho(\mathbf{r}') d\tau'$ .

### **VIII-2 Distribution de charges volumiques en coordonnées cartésienne**

En coordonnées cartésiennes, un élément de volume s'écrit:

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

La densité de charge  $\rho(x',y',z')$  est fonction de  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$ .

L'élément de charge contenu dans un volume  $d\tau'$  entourant le point  $\mathbf{r}'$  est:

$$d^3q = \rho(x',y',z') dx' dy' dz'$$

La charge totale  $Q$  est une intégrale triple sur les trois variables, prises dans l'ordre que l'on veut. Elle s'écrit:

$$Q = \iiint_{\tau'} \rho(x',y',z') dx' dy' dz'$$

$\tau'$  figurant en bas du signe intégral signifie que l'intégration porte sur tout le volume du solide.

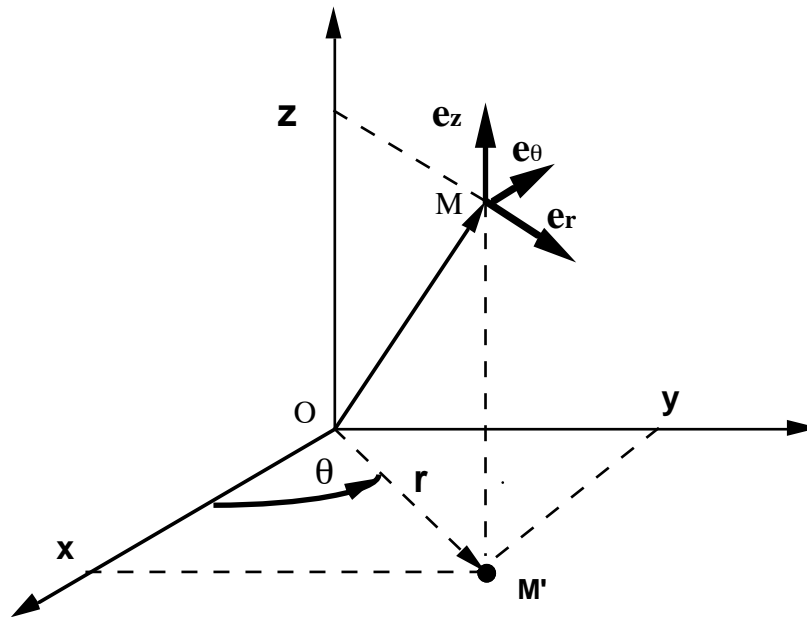
*Déterminer la charge électrique portée par un cube de côté  $a$  centré à l'origine des axes et dont la densité de charge volumique s'écrit  $\rho(x',y',z') = A(x'^2 + y'^2 + z'^2)$*

### **VIII-3 Distribution de charges volumiques en coordonnées cylindriques.**

Comme leur nom l'indique, les coordonnées cylindriques sont particulièrement bien adaptées à un solide cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

Dans un tel repère, l'élément de volume s'écrit  $dr dq dz$ . Ce n'est pas immédiat à voir ni à représenter. Pour bien vous en persuader, il n'y a pas de secret, il faut représenter plusieurs fois vous-mêmes cet élément de volume.

Reprenons le trièdre en coordonnées cylindriques:  
L'élément de volume  $d\tau$  est un parallélépipède dont les axes sont selon  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$ .



Passer de  $r$  à  $r+dr$  (à  $\theta$  et  $z$  constants) déplace le point  $M$  de  $dr$  le long de  $\mathbf{e}_r$ .  $dr$  est le premier côté du parallélépipède élémentaire.

Passer de  $\theta$  à  $\theta+d\theta$  déplace le point  $M$  le long de  $\mathbf{e}_\theta$ . Le déplacement est de  $r d\theta$ .  $r d\theta$  représente le second côté du parallélépipède élémentaire.

Passer de  $z$  à  $z+dz$  déplace  $M$  de  $dz$  le long de  $\mathbf{e}_z$ .  $dz$  représente le troisième côté.

L'élément de volume  $d\tau$  est donc  $d\tau = r dr d\theta dz$ .

Reste à intégrer selon les trois coordonnées, dans l'ordre que l'on veut. L'ordre le plus naturel consiste à intégrer tout d'abord selon  $\theta$  de  $0$  à  $2\pi$ , ce qui génère un volume sous forme de couronne de rayon  $r$  (et donc de périmètre  $2\pi r$ ) d'épaisseur  $dr$  et de hauteur  $dz$ . La deuxième intégration porte, selon  $r$ , de  $0$  à  $R$ . Cette intégration génère un disque de rayon  $R$  et de hauteur  $dz$ . La troisième intégration selon  $dz$  génère le cylindre dans son entier.

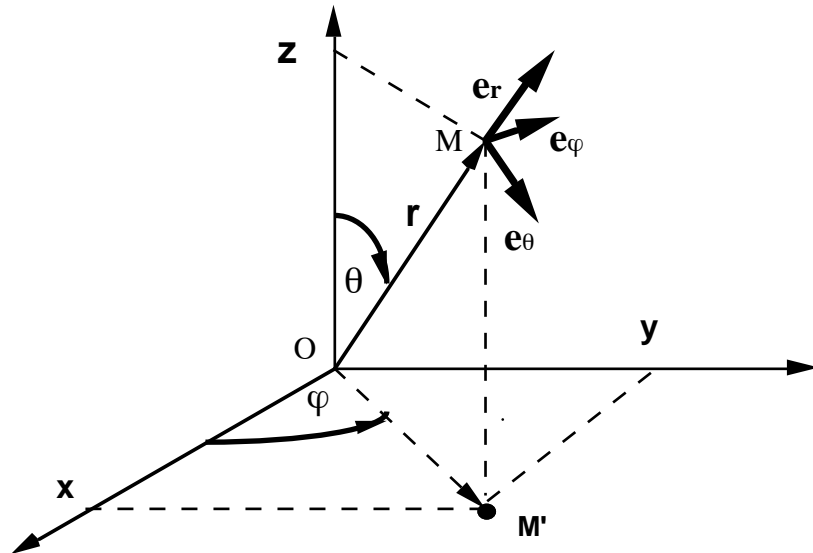
La charge totale est donc:

$$Q = \iiint_{\tau} \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

*Déterminer la charge portée par un cylindre de hauteur  $H$  de rayon  $R$ , d'axe de révolution  $Oz$ , posé sur le plan  $xOy$  et dont la densité de charge est  $\rho(r, \theta, z) = A r$*

#### VIII-4 Distribution de charges volumiques en coordonnées sphériques

Les coordonnées naturelles d'un corps apparaissant sous forme de sphère sont les coordonnées sphériques. Les coordonnées sont  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . L'élément de volume est  $d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ . Plus encore ici, vous ne serez convaincus que si vous-mêmes, vous dessinez l'élément de volume  $d\tau$  et les volumes engendrés par les intégrations successives.



L'élément de volume  $d\tau$  est le parallélépipède rectangle dont les côtés sont selon  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ .

Passer de  $r$  à  $r+dr$  déplace le point M de  $dr$  le long de l'axe  $\mathbf{e}_r$ .  $dr$  est le premier côté du parallélépipède.

Passer de  $\theta$  à  $\theta+d\theta$  déplace M de  $r d\theta$  dans la direction de  $\mathbf{e}_\theta$ .  $r d\theta$  est le second côté du parallélépipède.

Passer de  $\varphi$  à  $\varphi+d\varphi$  déplace les points M' et M dans la direction  $\mathbf{e}_\varphi$  de  $OM' d\varphi$ . Or  $OM' = r \sin\theta$ . Le déplacement dans la direction de  $\mathbf{e}_\varphi$  est donc  $r \sin\theta d\varphi$ .

L'élément de volume est :

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

L'élément de charge porté par le volume  $d\tau$  situé au voisinage du point de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  s'écrit :

$$d^3q = \rho(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

Et la charge totale s'écrit:

$$Q = \iiint_{\tau} \rho(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

Si on intègre successivement selon  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $r$ , ce qui est la façon naturelle de procéder:

L'intégration selon  $\varphi$  (de 0 à  $2\pi$ ) engendre une couronne d'axe Oz, située à la cote  $r \cos\theta$ , de rayon  $r \sin\theta$  et dont les deux autres dimensions sont  $r d\theta$  et  $dr$ .

L'intégration selon  $\theta$ , engendre une couronne sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

L'intégration selon  $r$  (de 0 à R) engendre la sphère tout entière.

*Représenter les surfaces engendrées successives.*

*Déterminer par intégrations successives la charge portée par une sphère de rayon R chargée uniformément avec la densité volumique  $\rho_0$ .*

## **IX Potentiel et champ créés par un volume chargé.**

### **IX-1 Potentiel électrique**

L'élément de volume  $d\tau'$  entourant le point  $\mathbf{r}'$  et portant l'élément de charge  $\rho(\mathbf{r}') d\tau'$  crée au point M situé en  $\mathbf{r}$  un élément de potentiel  $d^3V$ :

$$d^3V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Le potentiel total en M est la somme de ces contributions soit:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Comme précédemment, il faut paramétrer chacune des grandeurs et intégrer sur les paramètres. Ce peut être compliqué!!

### **IX-2 Champ électrique**

Il peut être déduit du potentiel par dérivation à l'aide de la relation  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ .  
Alternativement, on peut déterminer l'élément de champ  $d\mathbf{E}$  créé en M par la relation:

$$d^3\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \mathbf{u}$$

où le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  est porté par la direction joignant l'élément de volume portant la charge  $dq$  au point M.

Soit en intégrant sur le volume:

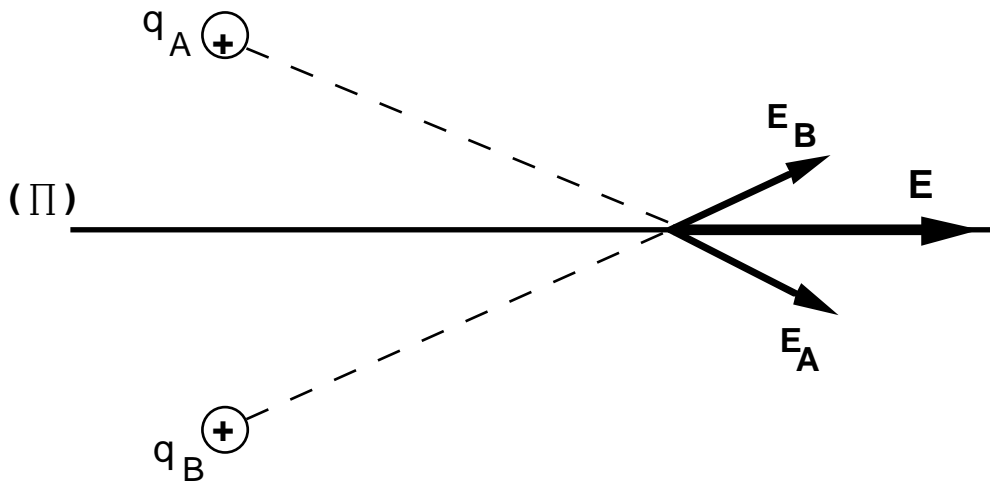
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \mathbf{u}$$

relation valable composante par composante.

## **X Symétries de distribution de charges et champ électrique**

Dans bien des situations, et nous en avons rencontré, des considérations de symétrie permettent de simplifier considérablement les calculs.

La règle de symétrie la plus courante est celle-ci: le champ électrique en un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges est un vecteur dont la direction est contenue dans ce plan.



Il est clair sur le schéma ci-dessus que deux charges  $q_A$  et  $q_B$  égales et symétriques par rapport au plan  $(\Pi)$  produisent des champs électriques  $E_A$  et  $E_B$  symétriques par rapport à ce plan. Leur résultante est située dans le plan de symétrie. En répétant le raisonnement sur toutes les charges symétriques deux à deux, on trouve bien sûr une résultante totale de champ électrique contenue dans le plan.

Si un point est situé à l'intersection de deux plans de symétrie de la distribution de charge, alors le champ électrique est dirigé suivant la droite d'intersection des deux plans.

Si un point est situé à l'intersection de trois plans de symétrie, le champ électrique en ce point est nul.

### **X Ce qu'il faut savoir**

Ce chapitre est long et sans doute difficile.

Il vous faudra un certain temps pour bien voir dans l'espace les éléments de volume, et les formes engendrées par les différentes intégrations.

Mais vous devez arriver à manipuler ces méthodes d'intégration, non seulement parce qu'elles apparaissent en électricité, mais parce que vous les rencontrerez dans différentes autres matières telles que la mécanique.

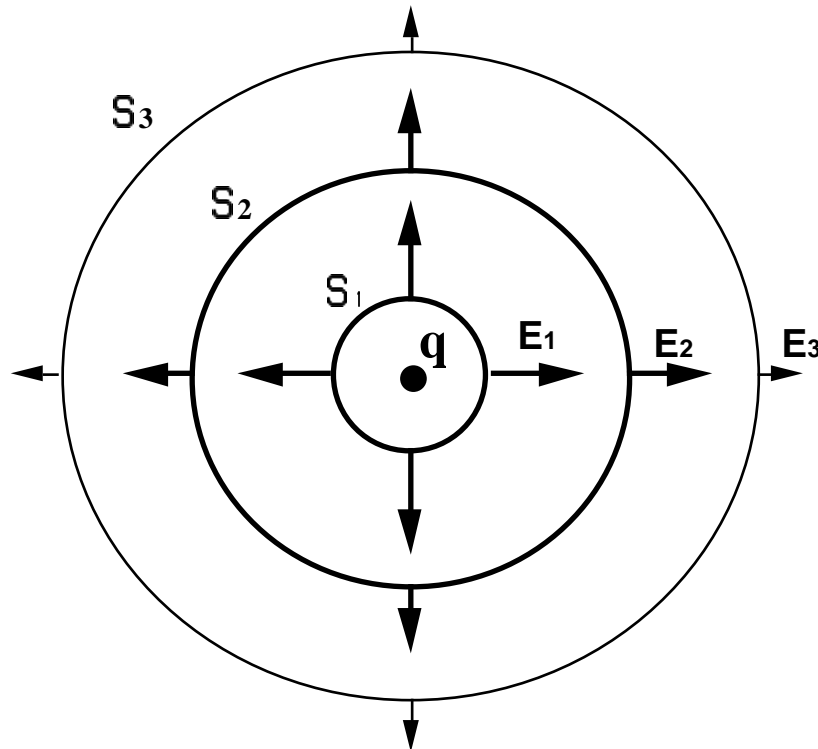
## CHAPITRE IV

### Flux du champ électrique et théorème de Gauss

#### I) Enoncé du théorème de Gauss

##### I-1 Cas particulier du théorème de Gauss

Considérons une charge  $q$  placée en  $O$ . Traçons trois sphères  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  concentriques de centre  $O$  de rayon  $r_1, r_2$  et  $r_3$ .



En tout point de la sphère  $\mathcal{S}_1$ , le champ électrique  $E_1$  est dirigé perpendiculairement à la surface de la sphère. Son intensité est donnée par la loi de Coulomb:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2}$$

On vérifie aisément que le produit de la surface  $S_1 = 4\pi r_1^2$  de la sphère  $\mathcal{S}_1$  par le champ électrique  $E_1 = E(r_1)$  est égal à la constante  $q/\epsilon_0$  et ne dépend pas de  $r_1$ . Le même raisonnement peut être reproduit sur les sphères  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$ .

Le produit du champ électrique créé en un point  $M$  par une charge ponctuelle placée en  $O$ , et de la surface de la sphère de rayon  $OM$ , est une constante  $q/\epsilon_0$ , indépendante du point  $M$  considéré.

Ceci est un cas particulier d'un théorème plus général qu'on appelle théorème de Gauss.

La raison de la constance de ce produit tient de toute évidence au fait que la surface de la sphère croît comme  $OM^2$  alors que le champ électrique en un point de cette sphère décroît comme  $1/OM^2$ .

## I-2 Enoncé général du théorème de Gauss

Dans toute sa généralité, le théorème de Gauss s'énonce ainsi:

Le flux total du champ électrique sortant d'une surface imaginaire fermée est égal à la somme des charges intérieures divisée par  $\epsilon_0$ .

Ce théorème doit vous laisser un peu perplexes.

En relisant le paragraphe précédent, vous devez penser que le flux était le produit de la surface de la sphère imaginaire par le champ électrique en chaque point de cette surface. C'est vrai dans le cas particulier considéré.

Vous vous dites peut-être encore que, pour que cet énoncé soit valable aussi bien pour les charges négatives que pour les charges positives, le signe du flux doit changer avec celui de la charge. Pour cette raison, on décide que le flux est positif lorsque le champ électrique est dirigé vers l'extérieur de la sphère et qu'il est négatif si le champ électrique est dirigé vers l'intérieur. C'est une convention.

En fait, ce théorème ne parle pas de sphère; il ne parle que de surface fermée. Il ne précise pas la position de la charge, il ne dit pas non plus si la charge est ponctuelle, étendue ou même s'il y a plusieurs charges. Il ne parle que de charges intérieures à la surface fermée.

Il ne fait nullement allusion aux charges extérieures à la surface fermée.

Ce théorème sépare les charges en deux groupes: celles qui sont intérieures à la surface fermée et celles qui lui sont extérieures.

Tout cela mérite précision. C'est l'objet de ce chapitre

## I-3 Modèle

Nous allons montrer la validité du théorème de Gauss en raisonnant sur un système physique imagé que nous appellerons du "tireur fou" et qui possède bien des aspects du champ électrique.

Le système physique à partir duquel nous allons raisonner n'est toutefois pas un champ électrique et il ne présente donc pas toutes ses caractéristiques. Pour cette raison, il faudra rester prudent.

Mais sur les aspects qui nous intéressent, les choses sont plus "matérielles" et donc plus faciles à appréhender.

En fait nous avons hésité à développer cette image de "tireur fou" parce qu'une telle image risque toujours de compliquer les choses plutôt que de les simplifier.

Nous n'y avons finalement pas renoncé pour deux raisons:

i) Il vous faut apprendre à aborder des problèmes par transposition. Dans votre vie professionnelle, vous serez amenés à transférer des modes de raisonnement et des résultats d'un sujet à l'autre ou d'un problème à l'autre. La comparaison que nous allons développer est un apprentissage au décloisonnement.

ii) Le modèle que nous allons mettre en oeuvre fait apparaître les choses sous un aspect de bilan. Dans votre formation d'ingénieur matériaux, vous aurez souvent à effectuer de tels bilans.

Alors tentons cette comparaison. Avec un peu de recul, vous nous direz si nous avons compliqué les choses ou si nous avons aidé à comprendre le théorème de Gauss. Au vu de vos appréciations, nous rectifierons (pour les prochaines années) notre façon de présenter ce problème géométriquement délicat.



## II La charge électrique et le tireur fou

### II-1 Le modèle du tireur fou

Imaginons qu'une charge électrique placée à l'origine 0 soit émettrice de projectiles.

Disons que c'est un tireur fou qui mitraille sans discernement dans toutes les directions de l'espace et émet un nombre  $Q_T$  de projectiles par seconde.

*Un tireur fou émet 100 000 projectiles par seconde. Combien de projectiles un homme "parallélépipédique" de 1.8 m de hauteur, 0.4 m de largeur et 0.25 m d'épaisseur, placé à 100m ( puis à 1000m) recevra-t-il (en moyenne) de projectiles par seconde?*

### II-2 Loi de "Coulomb" du tireur fou

Il est clair que le tireur placé à l'origine affecte chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace par le nombre de projectiles qu'on peut y recevoir par seconde.

Chaque point  $M(\mathbf{r})$  de l'espace peut être caractérisé par le nombre de projectiles  $E_{TF}(\mathbf{r})$  qu'une surface unité test  $s_0=1\text{m}^2$  placée en ce point, bien perpendiculairement au faisceau de projectiles, reçoit par seconde (la surface test est toujours placée perpendiculairement au sens de déplacement des projectiles).

Si le tireur fou émet isotropiquement  $Q_{TF}$  projectiles par seconde, le nombre  $E_{TF}$  de projectiles reçus par la surface test placée en  $\mathbf{r}$  est égal à  $Q_{TF} s_0/4\pi r^2$ :

$$E_{TF} = \frac{s_0}{4\pi r^2} Q_{TF}$$

$s_0/4\pi r^2$  est la fraction de surface de la sphère de rayon  $r$  couverte par la surface test.

Cette relation n'est pas sans rappeler la formule du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

Poussons encore un peu la comparaison. Remplaçons  $s_0$  par  $t_0=1/s_0$  et faisons de  $E_{TF}$  un vecteur qui, outre le nombre de projectiles reçus par seconde sur la surface test, indique le sens de déplacement des projectiles.

Pour cela, introduisons le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  dont le sens est le sens de déplacement des projectiles.  $E_{TF}$  s'écrit:

$$\mathbf{E}_{TF} = \frac{1}{4\pi t_0} \frac{Q_{TF}}{r^2} \mathbf{u}$$

Ce vecteur ressemble alors comme un frère au vecteur champ électrique. Il possède ses deux caractéristiques essentielles: il est radial et décroît en  $1/r^2$ .

Ainsi, même s'ils n'ont pas la même signification physique, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le vecteur  $\mathbf{E}_{TF}$  sont mathématiquement identiques: les propriétés mathématiques de l'un seront les propriétés mathématiques de l'autre. C'est ce que nous allons mettre à profit.

## III Théorème de Gauss du tireur fou

### III-1 Définition du flux de projectiles

Considérons un élément de surface  $dS$  appartenant à une surface imaginaire fermée  $S$ . Nous définissons l'élément de flux  $d^2\phi_{TF}$  de  $\mathbf{E}_{TF}$  à travers  $dS$  comme le nombre de projectiles que reçoit cette surface pendant 1 seconde.

$dS$  n'est pas la surface test et n'est donc pas nécessairement placée perpendiculairement à la direction de déplacement des projectiles.

Le nombre de projectiles reçus va donc dépendre de la position de l'élément de surface  $dS$  mais aussi de son orientation.

Si l'élément de surface  $dS$  est parfaitement perpendiculaire à la trajectoire des projectiles:

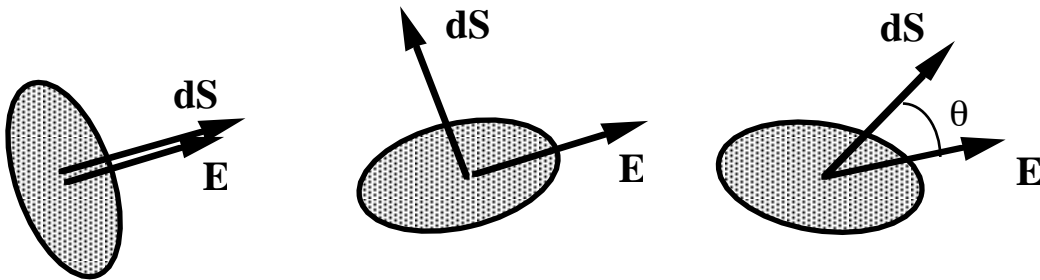
$$d\phi_{TF} = E_{TF} dS$$

Si au contraire l'élément de surface  $dS$  se présente de profil, il ne reçoit aucun projectile et  $d\phi_{TF} = 0$  ( $d\phi_{TF}$  est un infiniment petit du second ordre).

Il paraît clair que la grandeur à prendre en compte n'est pas l'élément de surface  $dS$  mais sa projection sur le plan perpendiculaire au faisceau de projectile. L'élément de flux est alors:

$$d\phi_{TF} = E_{TF} dS \cos\theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre un vecteur perpendiculaire à  $dS$  et la direction des projectiles.



*Dans quelle situation géométrique le flux de  $E$  est-il le plus élevé.*

Cette relation peut en fait s'écrire comme un produit scalaire. Pour cela, définissons un élément de surface  $dS$  comme un vecteur dont l'intensité est égale à l'élément d'aire  $dS$ , et le sens celui de la normale sortante par rapport à la surface fermée sur laquelle s'appuie l'élément de surface  $dS$ . Il vient alors:

$$d\phi = E_{TF} \cdot dS$$

Par intégration, le flux à travers la surface fermée est la somme de tous les élément de flux obtenus lorsque  $dS$  parcourt toute la surface soit:

$$\phi = \iint E_{TF} dS$$

### III-2 Flux de projectiles dus à des tireurs fous

Si il y a 3 tireurs fous, chacun fournit son propre  $E_{TF}$  ( $E_{TF1}$ ,  $E_{TF2}$ ,  $E_{TF3}$ ) et le flux total à travers une surface  $dS$  n'est autre que la somme des flux individuels.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

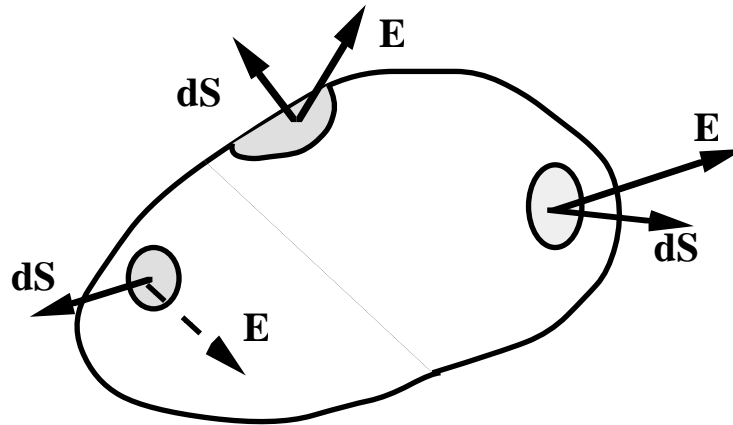
Il est évident que le nombre de projectiles reçus par seconde par  $dS$  est la somme des projectiles provenant de chacun des tireurs.

On peut définir  $E_{TF} = E_{TF1} + E_{TF2} + E_{TF3}$

$$d\phi = E_{TF} \cdot dS = E_{TF1} \cdot dS + E_{TF2} \cdot dS + E_{TF3} \cdot dS = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$$

C'est le théorème de superposition du tireur fou.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, certains éléments de flux peuvent être positifs alors que d'autres sont négatifs. Tout dépend de la position des tireurs à l'intérieur et à l'extérieur de la surface fermée.



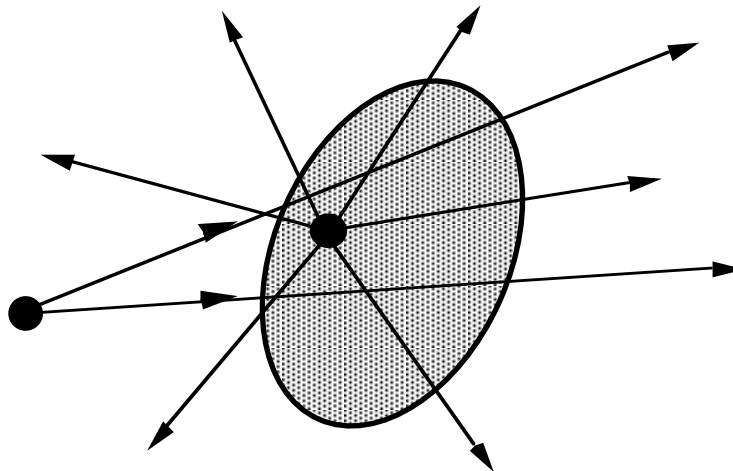
### III-3 Equation bilan

Le flux total  $\phi$  est égal au nombre de projectiles qui quittent le volume délimité par la surface totale  $S$  pendant 1 seconde.

Il est bien clair que ce nombre est égal au nombre de projectiles émis depuis l'ensemble des points sources intérieurs à la surface.

En régime stationnaire, le nombre de projectiles émis pendant 1 seconde à l'intérieur du volume  $V$  délimité par la surface  $S$  doit être égal au nombre de projectiles qui quittent ce volume et donc franchissent la surface  $S$  dans le sens sortant.

S'il y a en outre des tireurs extérieurs, les projectiles qu'ils émettent ne font que passer. En 1 seconde, ils sont autant à pénétrer dans le volume qu'à en sortir. Le flux dû à ces projectiles tirés de l'extérieur est localement positif, localement négatif mais globalement nul.



Si la distribution des tireurs fous n'est pas très simple, l'expression des éléments de flux  $\mathbf{E}_{\text{TF}} \cdot d\mathbf{S}$  doit être assez inextricable. Mais le bilan global doit être inchangé et la somme sur toute la surface fermée des  $\mathbf{E}_{\text{TF}} \cdot d\mathbf{S}$  est égale à  $Q_{\text{TF},i}/t_0$ , où  $Q_{\text{TF},i}$  est le nombre de projectiles émis par seconde à l'intérieur de la surface fermée.

### III-4 Résultat mathématique:

Oublions l'image des tireurs fous et la notion de déplacement qui est associée aux projectiles qu'ils émettent. Et ne retenons que l'aspect mathématique.

Nous avons montré par des arguments physiques que, si à un point source  $O$ , on faisait correspondre en chaque point de l'espace  $M$  un vecteur radial  $\mathbf{E}_{\text{TF}}(\mathbf{r})$  dont l'intensité décroissait comme l'inverse du carré de la distance  $OM$ , alors le flux de ce

vecteur à travers une surface imaginaire fermée de forme quelconque entourant 0 était une constante.

Les flux étant des grandeurs scalaires, le flux total créé par une distribution de points sources  $0_i$  est égale à la somme des flux dus à chacun des points sources.

Appliquons ce résultat à l'être mathématique qu'est le champ électrique  $\mathbf{E}$  et qui possède les mêmes propriétés mathématiques que  $\mathbf{E}_{TF}$ .

On pourrait aussi l'appliquer au champ de gravitation

*Formuler le théorème de Gauss du champ de gravitation.*

#### **IV Théorème de Gauss du champ électrique**

##### **IV-1) Flux du champ électrique**

Si dans la notion flux on ressent communément une idée de mouvement, c'est sans doute parce que l'on parle du flux et du reflux de l'eau. C'est aussi parce que les flux que l'on introduit en physique sont souvent ceux de vecteurs auxquels sont associées des déplacements d'objets ou de fluides comme dans l'image du tireur fou.

En fait le flux est une définition mathématique n'impliquant a priori aucun mouvement.

Etant donné un champ de vecteur  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et un élément de surface orienté  $d\mathbf{S}$  placé en  $\mathbf{r}$ , un élément de flux  $d\phi$  est défini par:

$$d\phi = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Le flux total à travers une surface fermée est égal à la somme de ces éléments de flux.

Le champ électrique est un champ de vecteur et, comme tel, des éléments de flux lui sont associés.

Mais, vous voyez, nous sommes incorrigibles puisque, pour nous convaincre des propriétés du flux du champ électrique nous avons fait appel au champ de vecteur  $\mathbf{E}_{TF}$  auquel est associée l'idée de mouvement.

##### **IV-2 Théorème de Gauss**

Le flux total du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à la somme des charges intérieures divisée par  $\epsilon_0$ . C'est une simple transposition de théorème de Gauss du tireur fou.

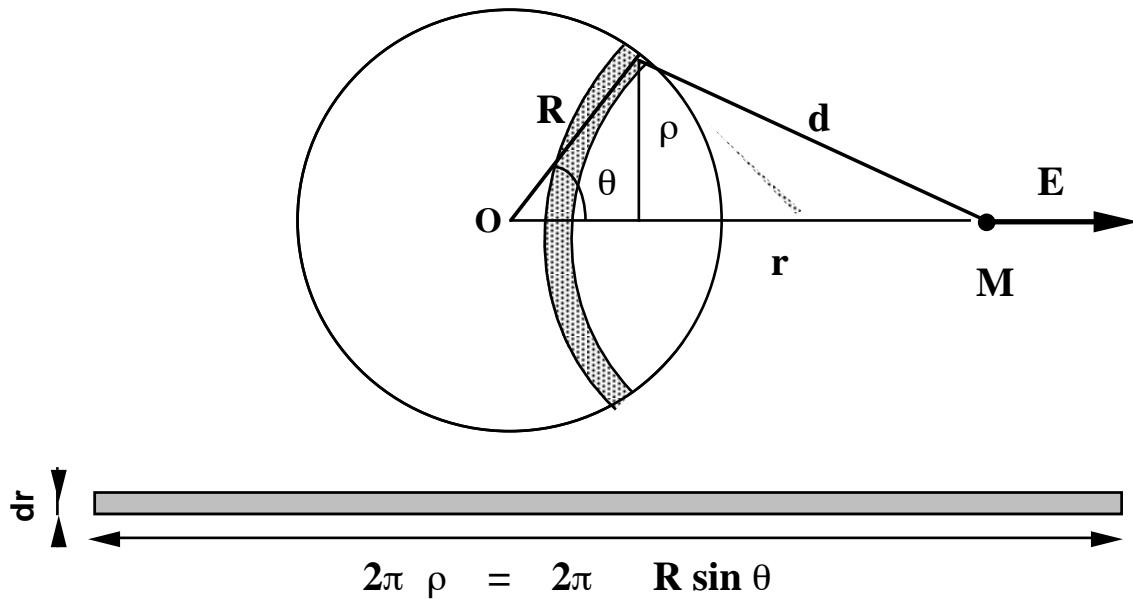
Nous espérons que ce théorème vous laisse moins perplexes. Si vous n'êtes pas vraiment convaincu par notre démarche, consultez le livre de R. Feynmann, ou le cours de Berkeley: vous y trouverez des approches complémentaires.

Nous allons maintenant nous tourner vers l'utilisation de ce théorème.

#### **V Application à certains calculs de champ électrique**

##### **V-1 Calcul direct du champ électrique créé par une sphère chargée uniformément en surface**

Considérons une sphère de rayon  $R$ , centrée en 0, chargée en surface avec une densité de charge uniforme  $\sigma$  et essayons de déterminer le champ électrique qu'elle crée en un point  $\mathbf{r}$  de l'espace.



Sur la figure ci-dessus, l'ensemble des points de la sphère situés à la distance  $d$  du point  $M$  décrit un cercle de rayon  $\rho = R \sin \theta$ .

L'ensemble des points d'une couronne de sphère, d'aire  $2\pi R \sin \theta R d\theta$  ( $R d\theta$  est la largeur de la couronne), porte un élément charge:

$$dq = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

Ces points sont situés à la distance  $d$  de  $M$  telle que:

$$d^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta$$

Une telle couronne contribue au potentiel  $V$  par l'élément  $dV$ :

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Le potentiel total est la somme (intégrale) sur les  $\theta$  de 0 à  $\pi$  de l'expression ci-dessus:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Le champ électrique est dirigé suivant la direction  $Ox$  et s'obtient par dérivation du potentiel ainsi calculé.

Par symétrie de rotation, le champ électrique peut être déterminé en un point quelconque de l'espace.

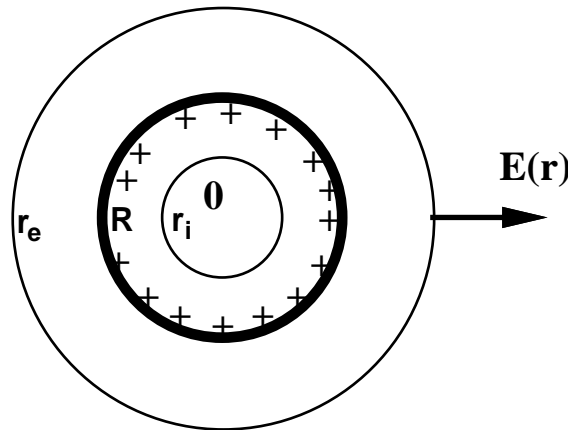
Ce calcul est faisable. On peut imaginer qu'il vous effraie.

## V-2 Application du théorème de Gauss

En fait, ce champ électrique peut être calculé simplement par application du théorème de Gauss.

Nous avons tracé sur la figure ci-après trois sphères, de rayon  $R$ ,  $r_i$  et  $r_e$ .

La sphère de rayon  $R$  est la sphère physique, chargée en surface avec la densité de charge  $\sigma$ .



Les sphères  $r_i$  et  $r_e$  sont deux sphères imaginaires appelées aussi sphère de Gauss qui sont des surfaces fermées sur lesquelles on va appliquer le théorème de Gauss. Les indices i et e viennent rappeler qu'elles sont respectivement intérieures et extérieures à la sphère chargée.

Remarquons maintenant que, par symétrie, le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en tout point distant de  $r$  du point 0 ( $r$  plus grand ou plus petit que  $R$ ) est radial et ne dépend que de  $r$ .

Son flux  $\phi$  à travers une sphère de Gauss de rayon  $r$  s'écrit donc simplement  $\phi = 4\pi r^2 E(r)$ . Il est égal à  $Q_i/\epsilon_0$  où  $Q_i$  est la charge intérieure à la sphère de rayon  $r$ .

Deux cas se présentent:

i)  $r = r_i < R$

Il n'y a pas de charges intérieures à la surface de Gauss,  $Q_i=0$  et donc  $E(r_i)=0$ .

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère chargée uniformément en surface est nul.

ii)  $r = r_e > R$

La charge totale  $Q_i = \sigma 4\pi R^2$  se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon  $r_e$ . Le théorème nous dit que:

$$\phi = 4\pi r_e^2 E(r_e) = \frac{4\pi \sigma R^2}{\epsilon_0}$$

Soit:

$$E(r_e) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r_e^2}$$

Le champ électrique à l'extérieur de la sphère est identique à celui qui serait créé par une charge ponctuelle  $Q_i$  placée au centre de celle-ci.

Si nous étions allés jusqu'au bout du calcul du paragraphe précédent, c'est ce que nous aurions trouvé, ... mais à quel prix !!

*Tracer le profil du champ électrique  $E(r)$  en fonction de  $r$ . Quelle discontinuité subit-il lors du franchissement de la surface de la sphère?*

### V-3 Conditions d'applications du théorème de Gauss

Il faut bien voir que si le théorème de Gauss est d'une grande généralité, il n'est utilisable en pratique que si le système présente un degré de symétrie élevé. C'est parce que le champ électrique était toujours normal à la surface de la sphère de rayon  $r$  et qu'il était a priori d'intensité constante que l'expression du flux fut particulièrement simple et utilisable.

Dans la pratique, il faut pouvoir définir une surface de Gauss fermée sur laquelle le champ électrique est constant et radial, ou non constant mais tangentiel.

#### V-4 Champ électrique créé par un fil infini chargé uniformément

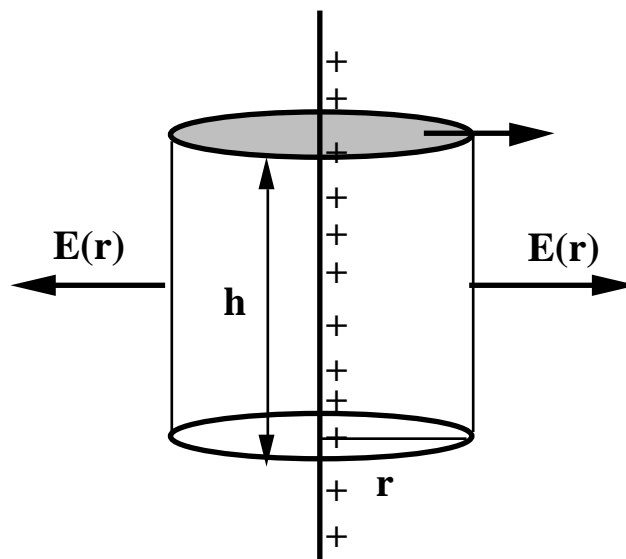
Un calcul direct peut être effectué comme au chapitre précédent mais utilisons plutôt le théorème de Gauss.

Par symétrie, le champ électrique en tout point  $r$  est radial et orthogonal à l'axe du fil.

Considérons la surface de Gauss constituée d'un tronc cylindrique droit de rayon  $r$  de hauteur  $h$ , et des deux disques de rayon  $r$  couvrant ses extrémités.

A cette surface fermée appliquons le théorème de Gauss.

La charge intérieure à cette surface est égale à  $Q_i = \lambda h$ .



Le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la surface fermée peut être décomposé en trois contributions:

Le flux de  $\mathbf{E}$  à travers le disque supérieur, le flux de  $\mathbf{E}$  à travers le disque inférieur et le flux de  $\mathbf{E}$  à travers le tronc cylindrique.

Les flux de  $\mathbf{E}$  à travers les disques sont nuls car le champ électrique leur est tangent.

Le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la surface du tronc de cylindre est simplement égal à  $2\pi r h E(r)$ . ( $E(r)$  est constamment perpendiculaire à la surface.

Le théorème de Gauss s'écrit:

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

soit:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Le champ électrique créé par un fil infini, uniformément chargé, décroît en  $1/r$ .

### V-5 Quand peut-on considérer un fil comme infini?

Un fil sera considéré comme infini si la distance  $r$  entre l'observateur (placé suffisamment loin des extrémités du fil) et le fil est beaucoup plus petite que la longueur du fil, c'est-à-dire lorsque  $r \ll a$ .

Dans le chapitre précédent (paragraphe IV-3) nous avons montré que le champ électrique radial en un point du plan bissecteur du fil uniformément chargé était radial et s'écrivait (vous remplacerez aisément les notations dans leur contexte):

$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

La limite  $r \ll a$  s'obtient en négligeant  $r^2$  devant  $a^2$  dans la racine carrée. Soit:

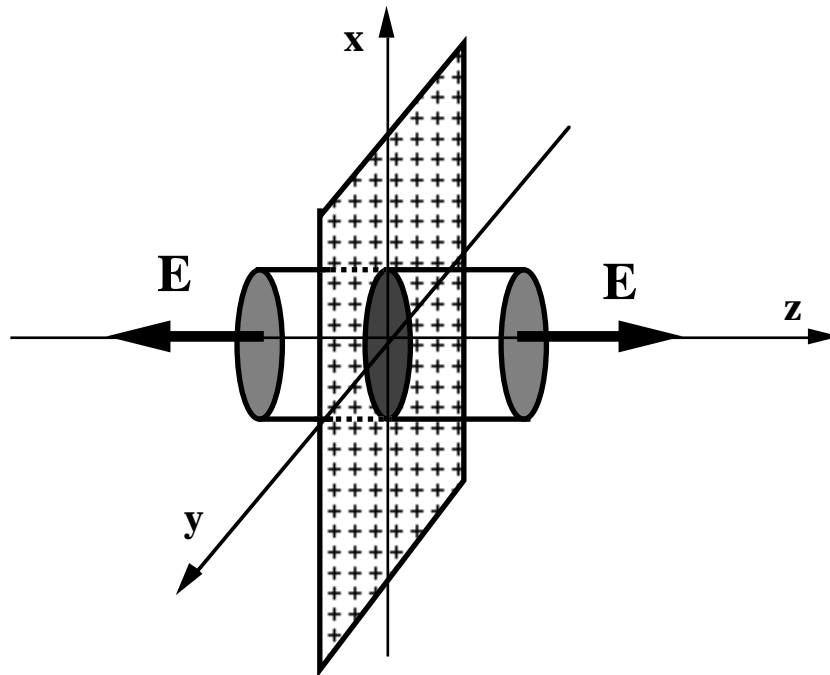
$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \frac{1}{a} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

ce qui est exactement l'expression trouvée par le théorème de Gauss.

## **VI) Franchissement d'une surface chargée**

### VI-1 Champ créé par un plan infini chargé uniformément

Considérons le plan  $xOy$  chargé uniformément avec la densité de charge  $\sigma$ . Déterminons le champ électrique créé à la distance  $z$  de ce plan.



Par symétrie, le champ électrique est dirigé suivant  $Oz$ , vers les  $z$  positifs ou négatifs selon que l'on se trouve à droite ou à gauche du plan chargé.

Considérons la surface de Gauss fermée constituée d'un cylindre d'axe  $z/z$  fermé par les deux disques hachurés de surface  $S$  placés de part et d'autre du plan chargé aux cotes  $+z$  et  $-z$ .

Le champ électrique est tangent au cylindre et perpendiculaire aux deux disques hachurés.

Le flux de  $E$  à travers la surface fermée se compose du flux à travers le cylindre, du flux à travers le disque de droite et du flux à travers le disque de gauche.



Le flux à travers le cylindre est manifestement nul puisque le champ électrique est tangentiel à ce cylindre.

Le flux à travers le disque de droite est  $S E(z)$ . Il est positif puisque dirigé suivant la normale sortante.

Le flux à travers le disque de gauche est  $S E(-z) = S E(z)$ . Il est aussi positif puisque à la fois le champ et la normale sortante ont changé de sens.

L'égalité entre  $E(z)$  et  $E(-z)$  est due à la symétrie.

Le flux total à travers la surface fermée est donc:

$$\phi = 2 S E(z)$$

La charge  $Q_i$  à l'intérieure de cette surface fermée est celle portée par le disque central de la figure précédente, soit:

$$Q_i = S \sigma_0$$

L'application du théorème de Gauss donne:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

Le champ  $E(z)$  est indépendant de la cote  $z$ .

Toutes les positions situées à distance finie d'un plan infini sont équivalentes.

## VI-2 Discontinuité du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée

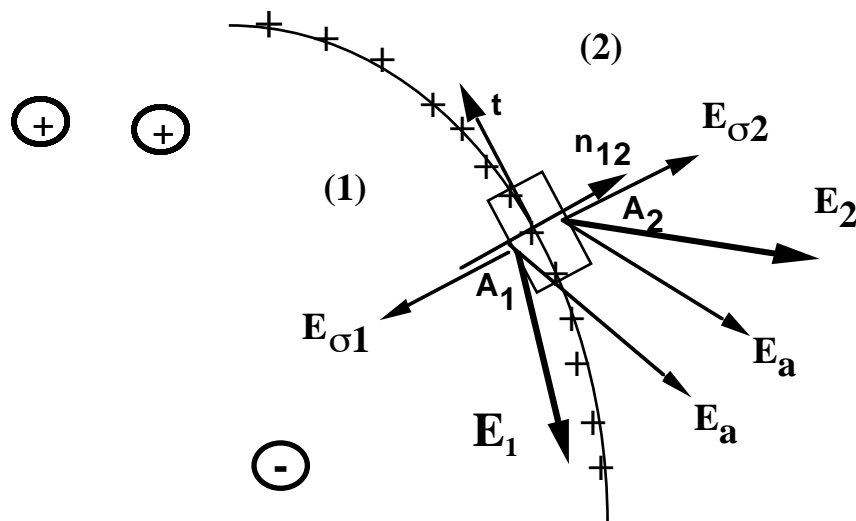
Nous allons utiliser le résultat ci-dessus pour déterminer la modification du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée. Nous voulons connaître la différence de champ électrique entre deux points  $A_1$  et  $A_2$  infiniment proches situés de part et d'autre de cette surface.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur deux arguments:

- Un élément rectangulaire de plan, de longueur  $a$  et de largeur  $b$  finies, peut être considéré comme infini si la distance  $d$  séparant l'observateur du plan chargé est suffisamment petite. ( $d \ll a$  et  $b$ )

- Une surface quelconque de rayon de courbure  $r_c$ , peut localement être considérée comme plane par un observateur qui se trouve à une distance  $d \ll r_c$  (c'est la vision que l'on a de la terre à proximité du sol).

Cela signifie qu'un élément de surface quelconque portant localement une densité de charge  $\sigma$  crée en son voisinage immédiat ( $d \ll r_c$ ) un champ électrique  $\sigma/2\epsilon_0$  normal à la surface.



En présence d'autres charges, les champs électriques totaux  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  en des points  $A_1$  et  $A_2$  très proches de la surface est alors la somme de deux composantes:

-Le champ  $\mathbf{E}_\sigma$  dû aux charges de surface ( $\sigma/2\epsilon_0$ ).

-Le champ  $\mathbf{E}_a$  dû aux autres charges situées très loin comparée à la distance qui sépare les points  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_{\sigma 1} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_{\sigma 2}$$

Le franchissement de la surface n'affecte pas  $\mathbf{E}_a$  qui est créé par des charges "éloignées". La distance infime qui sépare deux points situés de part et d'autre de la surface ne conduit à aucune modification de  $\mathbf{E}_a$ . C'est pour cela que le même  $\mathbf{E}_a$  apparaît dans  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

Au vu du paragraphe précédent, les champs  $\mathbf{E}_\sigma$  sont égaux, opposés et perpendiculaires à la surface (et n'ont pas de composante tangentielle suivant  $\mathbf{t}$ ). Il est assez évident que si on définit  $\mathbf{n}_{12}$  le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et dirigé dans le sens du milieu (1) vers le milieu (2), on a la relation algébrique  $(\mathbf{E}_{\sigma 2} - \mathbf{E}_{\sigma 1}) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Et donc puisque seule la composante  $\mathbf{E}_\sigma$  est différente:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il s'en suit que lors de la traversée d'une surface chargée:

- La composante tangentielle du champ électrique total est continue  $E_{t1} = E_{t2}$
- la composante normale subit une discontinuité  $E_{n2} - E_{n1} = \sigma/\epsilon_0$

$$\text{avec } E_{t1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} \quad E_{t2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} \quad E_{n1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \quad E_{n2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}$$

## **VII) Forme locale du théorème de Gauss**

### VII-1 Equation globale et forme locale

Le théorème de Gauss, tel que nous l'avons présenté, est apparu sous une forme globale. Le flux à travers une surface fermée est reliée à la quantité de charges intérieures à ce volume indépendamment du détail de leur distribution .

Une équation locale relie deux grandeurs en un point  $\mathbf{r}$ .

$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$  est une équation locale en ce sens que le champ en  $\mathbf{r}$  est lié à la dérivée du potentiel en ce même point  $\mathbf{r}$ .

Il existe une forme locale du théorème de Gauss. Elle s'écrit:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Elle relie, en chaque point de l'espace, la somme des trois dérivées partielles écrites ci-dessus à la densité de charge volumique en ce même point.

(Les charges surfaciques et ponctuelles doivent être traitées à part.)

Un vecteur  $\mathbf{E}$  étant donné, on a pris l'habitude de noter:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit alors:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La divergence (div) d'un vecteur est un scalaire. Cet être mathématique vient rejoindre le gradient et le rotationnel dans ce que l'on appelle l'analyse vectorielle.

Dans le vide,  $\rho = 0$  et  $\text{div } \mathbf{E} = 0$

Comme le gradient et le rotationnel, la divergence présente une expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

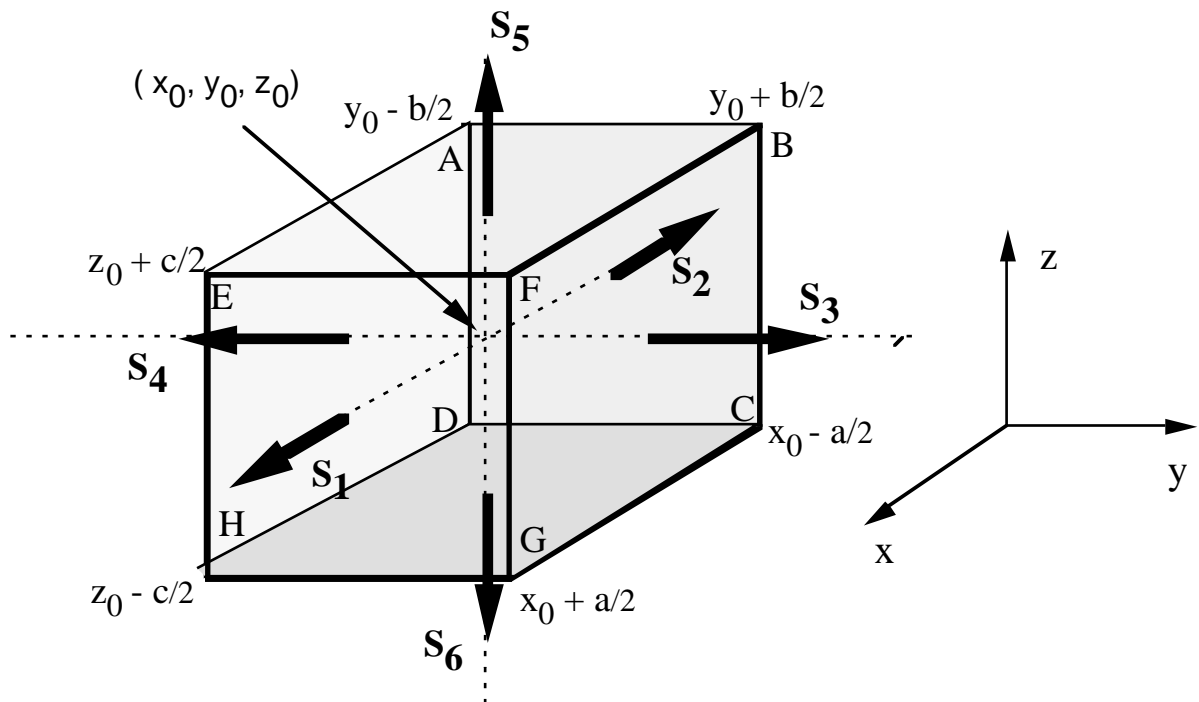
### VII-2 Bilan sur un volume élémentaire

Considérons un petit parallélépipède rectangle centré en un point d'abscisse  $x_0, y_0, z_0$  et de côtés  $a, b$  et  $c$ .

Les deux faces perpendiculaires à la direction  $Ox$  sont situées en  $x = x_0 - a/2$  et  $x = x_0 + a/2$ . Les côtés de ces faces sont  $b$  (parallèlement à  $Oy$ ) et  $c$  (parallèlement à  $Oz$ ). L'aire de ces deux faces est égale au produit  $bc$ .

*Reproduire le même raisonnement pour les autres faces.*

L'ensemble des 6 rectangles (tels que ABCD) forme une surface fermée entourant le volume  $V = abc$  du parallélépipède rectangle.



Les vecteurs  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$  représentant les surfaces des rectangles sont orientés vers l'extérieur du volume et s'écrivent:

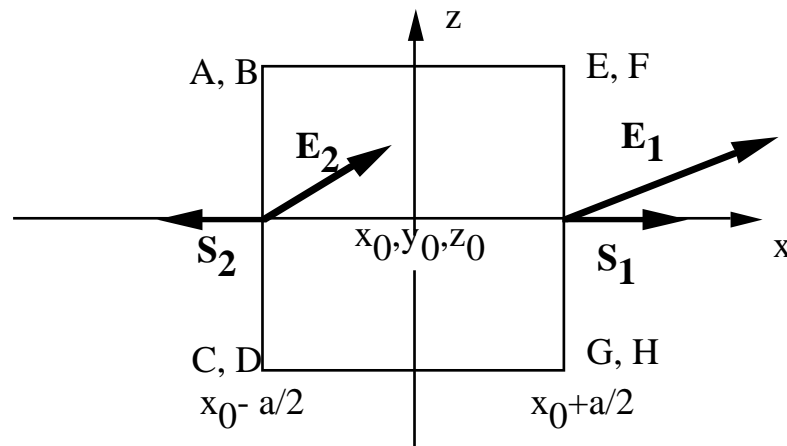
$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -bc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ac \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ab \end{bmatrix}$$

Le flux total de  $\mathbf{E}$  à travers la surface parallélépipédique fermée s'écrit:

$$\phi = (\mathbf{E}_1 \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{S}_2) + (\mathbf{E}_3 \mathbf{S}_3 + \mathbf{E}_4 \mathbf{S}_4) + (\mathbf{E}_5 \mathbf{S}_5 + \mathbf{E}_6 \mathbf{S}_6) = \phi_{12} + \phi_{34} + \phi_{56}$$

Déterminons  $\phi_{12}$ , c'est-à-dire la somme des flux du champ électrique à travers les surfaces  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ . Pour cela, faisons figurer ces deux surfaces de profil.

$\mathbf{E}_1$  est le champ électrique  $\mathbf{E}$  en  $x_0 + a/2$ .  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(x_0 + a/2, y_0, z_0)$



Puisque  $bc$  est l'aire du rectangle  $ABCD$ , et au vu de l'orientation de  $\mathbf{S}_1$  qui n'a de composante que suivant l'axe  $0x$ , le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la surface  $\mathbf{S}_1$  s'écrit:  $(-bc) E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0)$ . Nous avons donc:

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= (bc) E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) + (-bc) E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0) \\ &= (bc) [E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) - E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0)] \end{aligned}$$

Puisque  $a$  est très petit et tend vers 0, on peut faire un développement limité autour de  $x_0, y_0, z_0$ :

$$\begin{aligned} E_x(x_0 + a/2, y_0, z_0) &= E_x(x_0, y_0, z_0) + \left( \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) \left( \frac{+a}{2} \right) \\ E_x(x_0 - a/2, y_0, z_0) &= E_x(x_0, y_0, z_0) + \left( \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) \left( \frac{-a}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où:

$$\phi_{12} = a b c \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

où le produit  $abc$  n'est autre que le volume  $V$  du parallélépipède rectangle.

Les flux  $\phi_{34}$  et  $\phi_{56}$  peuvent être calculés de la même façon, ce qui conduit à:

$$\phi = V \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

où les dérivées partielles sont à prendre en  $(x_0, y_0, z_0)$

La charge à l'intérieur du volume est la densité locale de charge  $\rho(x_0, y_0, z_0)$  multipliée par le volume du parallélépipède:  $Q_i = \rho V$ .

L'application du théorème de Gauss donne:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

C'est la forme locale de ce théorème que nous annonçons au paragraphe précédent:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

### **VIII Equation de Poisson**

La combinaison de la forme locale du théorème de Gauss  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  et de la relation  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$  conduit à l'équation de Poisson.

En effet:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = - \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

entraîne:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

ce qui est l'équation de poisson. Elle se synthétise en:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

où:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Est un nouvel être d'analyse vectorielle appelé laplacien scalaire.

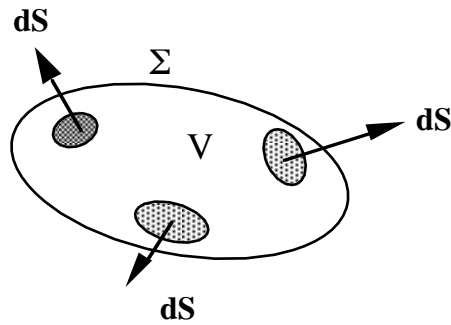
### **IX Relation de Green-Ostrogradsky**

#### **IX-1 Enoncé général**

Nous avons montré ci-dessus que le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la surface (orientée normale sortante) qui délimite un petit cube est égale à la divergence de  $\mathbf{E}$  multipliée par le volume de ce cube.

Ceci se généralise à toute surface fermée et à tout vecteur  $\mathbf{U}$ .

Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vecteur,  $\Sigma$  une surface fermée dont les éléments de surface  $dS$  sont orientés dans le sens de la normale sortante,  $V$  le volume délimité par la surface fermée.



On a de façon générale:

$$\iiint_{\Sigma} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{U} \, d\tau$$

### VIII-2 Exemple

L'application de ce théorème sur un volume quelconque et pour un champ de vecteur non trivial est très vite compliquée.

Nous nous contenterons de le vérifier sur un champ radial de composante:

$$a_x = x \quad a_y = y \quad a_z = z$$

et pour un volume délimité par une sphère de rayon R centrée à l'origine.

$\mathbf{a}$  est un vecteur radial de norme r.  $\text{div } \mathbf{a}$  vaut 3 en tout point de l'espace. Le flux de  $\mathbf{a}$  à travers la sphère de rayon R est donc:

L'intégrale de la divergence de  $\mathbf{a}$  dans la sphère est:

$$R \times 4 \pi R^2 = 4 \pi R^3$$

$$3 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \pi R^3$$

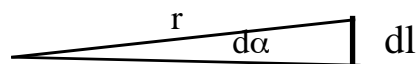
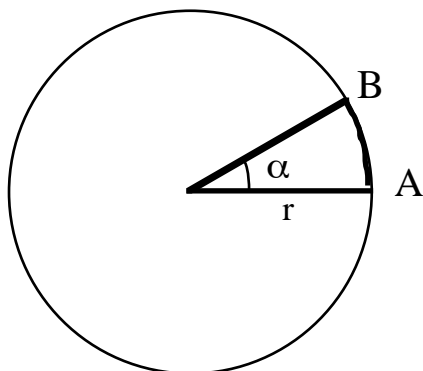
### X Notion d'angle solide

#### X-1 Angle du plan

Considérons le centre O d'un cercle de rayon r.

Soit un arc de cercle de longueur AB. (AB est l'arc, qu'il ne faut pas confondre avec la corde)

La mesure de l'angle  $\alpha$  est en radian:  $\alpha = AB/r$



L'angle  $\alpha$  peut être défini à partir d'un cercle de rayon  $2r$ . Dans ce cas, l'arc intercepté est de longueur double et la mesure de  $\alpha$  est inchangée. L'angle  $\alpha$  est une entité en soi indépendante du cercle qui a servi à en déterminer la mesure.

Vous pouvez découper dans le plan d'une feuille de papier un angle  $\alpha$ . Vous visez une région du plan en plaçant votre oeil au sommet de l'angle et en regardant la région délimitée par les deux demi-droites qui définissent l'angle.

La fraction des directions que vous voyez, rapportée à  $2\pi$ , est la valeur de l'angle.

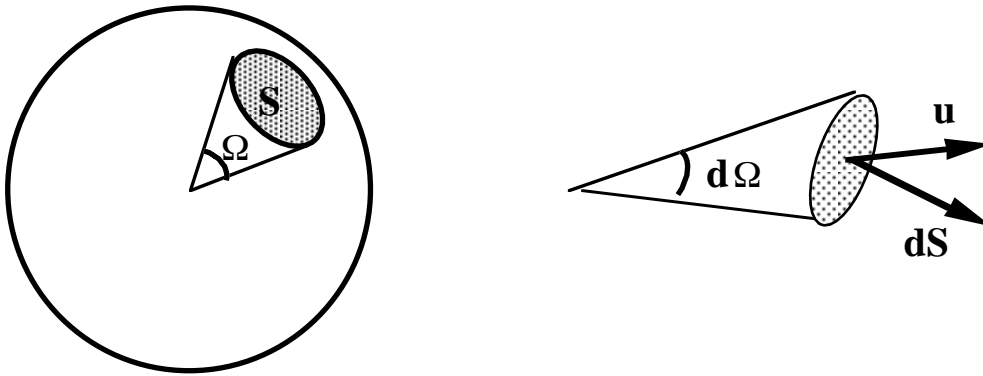
Un élément d'angle  $d\alpha$  est simplement défini par  $dl/r$

La somme des éléments d'angle qui permettent de viser le plan tout entier est  $2\pi$ .

### X-2 Angle solide

Prenez maintenant une feuille de papier et enroulez-la en formant un cône.

Si vous visez par le petit trou placé à la pointe de ce cône, vous avez une vision d'une fraction des directions de l'espace un peu comme avec l'angle vous aviez une vision d'une portion du plan.



Vous pouvez déformer ce cône en appuyant sur ses côtés et vous avez une vision d'une fraction différente de l'espace.

La fraction des directions de l'espace que vous apercevez, rapportée à  $4\pi$  est ce que l'on appelle l'angle solide.

Pour déterminer la valeur d'un angle solide  $\Omega$ , traçons une sphère de centre 0 et de rayon  $r$ . La surface du cercle interceptée par le cône est  $S$ . La division de  $S$  par  $r^2$  est la valeur de l'angle solide  $\Omega$ .

L'angle solide est sans dimension. On dit qu'il est en stéradian. Le stéradian vient se substituer au radian de l'angle d'un plan.

La valeur maximale de l'angle solide est  $4\pi$ .

L'angle solide  $d\Omega$  sous lequel un élément de surface  $dS$  est vu depuis le point 0 est :

$$d\Omega = \frac{\mathbf{dS} \cdot \mathbf{u}}{r^2}$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire porté par le segment de droite joignant le point 0 à l'élément de surface  $dS$ .

### X-3 Relation entre le flux et l'angle solide

Le champ électrique créé en  $\mathbf{r}$  par une charge  $q$  située au point 0 s'écrit:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{r^2}$$

L'élément de flux  $d\phi$  à travers l'élément de surface  $d\mathbf{S}$  placé au point  $\mathbf{r}$  s'écrit:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} d\Omega$$

Le flux total du champ électrique à travers une surface  $S$  de forme quelconque, s'obtient en découpant cette surface en éléments  $d\mathbf{S}$  et en intégrant sur les éléments d'angle solide. Il vient alors:

$$\phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \Omega$$

Le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque est égal à  $q/4 \pi \epsilon_0$  multiplié par l'angle solide sous lequel on voit cette surface depuis le point  $O$ .

Si la surface est fermée et entoure la charge  $q$ , l'angle solide est  $4\pi$  et le flux est  $q/\epsilon_0$ .

Si la surface fermée n'entoure pas la charge  $q$ , l'angle solide est 0 (bien faire attention aux signes des éléments de surface  $d\mathbf{S}$  suivant la normale sortante au point considéré) et le flux est nul.

C'est le théorème de Gauss.



## Travail des forces électriques

### Energie électrostatique

#### I Travail des forces électriques

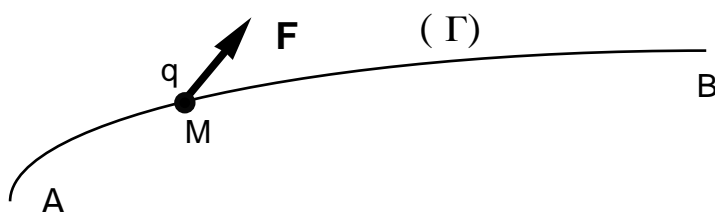
##### I-1 Problème

Considérons une distribution de charges. Cette distribution de charges crée en chaque point de l'espace un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et un potentiel  $V(\mathbf{r})$ .

Plaçons en un point  $M(\mathbf{r})$  une charge  $q$ . Il s'applique sur cette charge une force  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Déplaçons la charge du point A au point B le long d'une ligne ( $\Gamma$ ).

Le déplacement de la charge s'accompagne du déplacement du point d'application de la force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  et donc d'un travail de la force électrique.



Questions:

- i) Quelle est la valeur du travail de la force électrique lors de son déplacement de A en B?
- ii) Ce travail dépend-il du chemin suivi?

##### I-2 Réponse

La réponse à de telles questions passe généralement par une succession de considérations et de démonstrations.

Ici, la réponse est tellement simple que nous la donnons d'emblée. Nous gardons les considérations pour la suite.

Réponse

ii) le travail effectué par la force électrique lors de son déplacement de A à B ne dépend pas du chemin suivi.

i) le travail  $W$  de la force électrique est égal à  $q(V_A - V_B)$ , c'est-à-dire au produit de la charge  $q$  multipliée par la différence de potentiel ( $V_A - V_B$ ) entre les points A (origine) et B (extrémité).

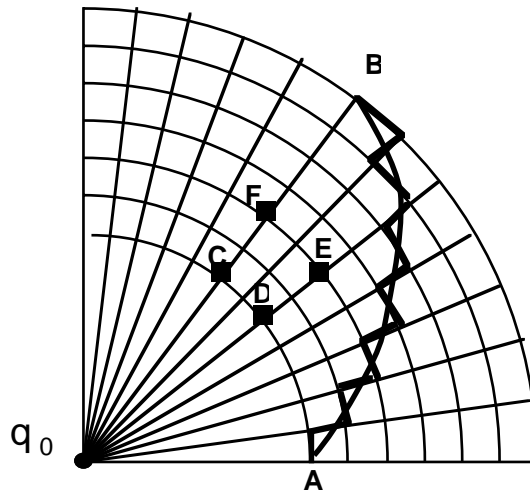
*Soit  $q_0 = 1\mu\text{C}$  une charge placée à l'origine et  $q = 2\mu\text{C}$  une seconde charge placée en  $A(2,0,0)$ . Déterminer le travail de la force exercée sur  $q$  lors du déplacement de cette charge de A à B  $(0,3,0)$  (unité de longueur: 1 cm).*

### I-3 Travail de la force électrique sur un chemin simple

Considérons le système électrique constitué d'une charge centrale  $q_0$  placée à l'origine. Cette charge crée dans l'espace un champ  $\mathbf{E}$  et un potentiel  $V$  dont nous avons étudié les caractéristiques dans les chapitres précédents.

Nous introduisons une nouvelle charge  $q$  sur laquelle s'exerce la force  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Calculons le travail  $W$  effectué par la force  $\mathbf{F}$  lors d'un déplacement de la charge  $q$  du point A au point B, en suivant le chemin composé de l'arc de cercle AC centré en O, suivi du segment radial CB.



Le long de AC, la force est toujours perpendiculaire au déplacement et donc le travail effectué par cette force est nul.

A l'opposé, sur le segment de droite CB, la force se trouve toujours parallèle au déplacement. L'élément de travail  $\delta W$  effectué par la force  $F(r)$  lors d'un déplacement radial de  $r$  à  $r+dr$  est :

$$\delta W = F(r) dr$$

Le travail total est la somme des travaux élémentaires. Il est obtenu par intégration sur la variable  $r$ , soit:

$$W = \int_{r_c}^{r_b} F(r) dr = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r_c}^{r_b} \frac{q q_0}{r^2} dr$$

Puisque  $1/r^2$  est la dérivée de  $-1/r$ , ce travail s'écrit:

$$W = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left[ -\frac{q q_0}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r_A} - \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r_B} = q (V_A - V_B)$$

(il a été tenu compte du fait que  $r_A=r_c$  et  $V_A=V_C$ )

ce qui est l'expression du travail que nous avons annoncée.

### I-4 Autres chemins

Plutôt que de suivre ACB, suivons maintenant le chemin ADEFB.

AD et EF sont des arcs de cercle sur lesquels le travail est nul. Les points A,D et E,F sont au même potentiel:  $V_A=V_D$ ,  $V_E=V_F$ .

DE et FB sont des chemins radiaux sur lesquels on peut reproduire le calcul du paragraphe précédent.

$$\text{soit : } W = q (V_D - V_E) + q (V_F - V_B) = q (V_A - V_B)$$

Pour aller de A à B, on peut imaginer bien d'autres chemins qui sont une succession d'arcs de cercles et de segments radiaux.

On peut aussi dire qu'un chemin quelconque menant de A à B (tel que celui représenté en trait épais sur le schéma) peut être approché avec une précision aussi grande que l'on veut par une succession d'arcs de cercle et de chemin radiaux. Dans tous les cas le travail vaut  $W = q (V_A - V_B)$ .

### I-5 Généralisation à une distribution de charge

Soit un système électrique formé de deux charges  $q_1$  et  $q_2$  placées en  $O_1$  et  $O_2$ . Déterminons le travail résultant du déplacement d'une charge  $q$  dans le champ créé par  $q_1$  et  $q_2$ .

En vertu du théorème de superposition, la force totale appliquée sur  $q$  s'écrit:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} = q \mathbf{E}_1 + q \mathbf{E}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

où  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  sont les champs créés indépendamment par les  $q_1$  et  $q_2$  si elles étaient seules.

Les travaux des forces  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  lors de leurs déplacements de A à B s'écrivent:

$$W_1 = q (V_{1A} - V_{1B}) \quad W_2 = q (V_{2A} - V_{2B})$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont les potentiels dus séparément à  $q_1$  et  $q_2$ .

Or, lors d'un déplacement  $\mathbf{l}$ , le travail d'une force  $\mathbf{F}$ :  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$  est égal à la somme des travaux de ses composantes  $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{l} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{l} = W_1 + W_2$  (distributivité du produit scalaire). Il s'ensuit:

$$W = q [(V_{1A} + V_{2A}) - (V_{1B} + V_{2B})]$$

soit par application du théorème de superposition sur les potentiels,  $V = V_1 + V_2$ :

$$W = q (V_A - V_B)$$

### I-6 Lignes de champ et équipotentielle

En suivant les arcs de cercle et les chemins radiaux, nous avons en fait suivi une succession d'équipotentielle et de lignes de champ.

Le long d'une équipotentielle, le travail est nul car la force parallèle à  $\mathbf{E}$ , est constamment perpendiculaire au déplacement.

Le long d'une ligne de champ, le déplacement est parallèle à la force. L'élément de travail est  $\delta W = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q dV$ .

Lorsque le champ électrique est créé par une distribution de charges, les équipotentielles ne sont plus des sphères et les lignes de champ ne sont plus des segments de droites, mais il est toujours possible d'approcher une ligne joignant un point A à un point B par une succession de lignes de champ et d'équipotentielles qui, on le sait, se coupent à angle droit et forment un quadrillage déformé de l'espace.

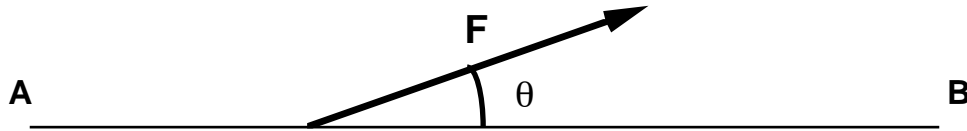
*Tracez un réseau imaginaire et compatible de lignes de champ et d'équipotentielles. Montrez que le travail effectué pour joindre un point A à un point B est  $W = q(V_A - V_B)$*

## **II Travail et différentielles totales exactes**

Nous allons dans ce paragraphe revoir la notion de travail de façon plus générale et examiner dans quelles conditions celui-ci ne dépend que de l'état initial et de l'état final et se trouve indépendant du chemin suivi.

## II-1) Travail d'une force constante lors de son déplacement sur une trajectoire rectiligne

Lors d'un déplacement rectiligne de A vers B, le travail d'une force constante  $\mathbf{F}$  (en direction et en intensité) est égal au produit du déplacement AB par la composante de la force le long de la trajectoire.



La composante de la force n'étant autre que  $F \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle orienté  $(\mathbf{F}, \mathbf{AB})$ , le travail s'exprime mathématiquement comme le produit scalaire de la force  $\mathbf{F}$  par le vecteur déplacement  $\mathbf{AB}$ .

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB} = F AB \cos \theta$$

## II-2 Travail d'une force non constante lors de son déplacement sur une trajectoire rectiligne.

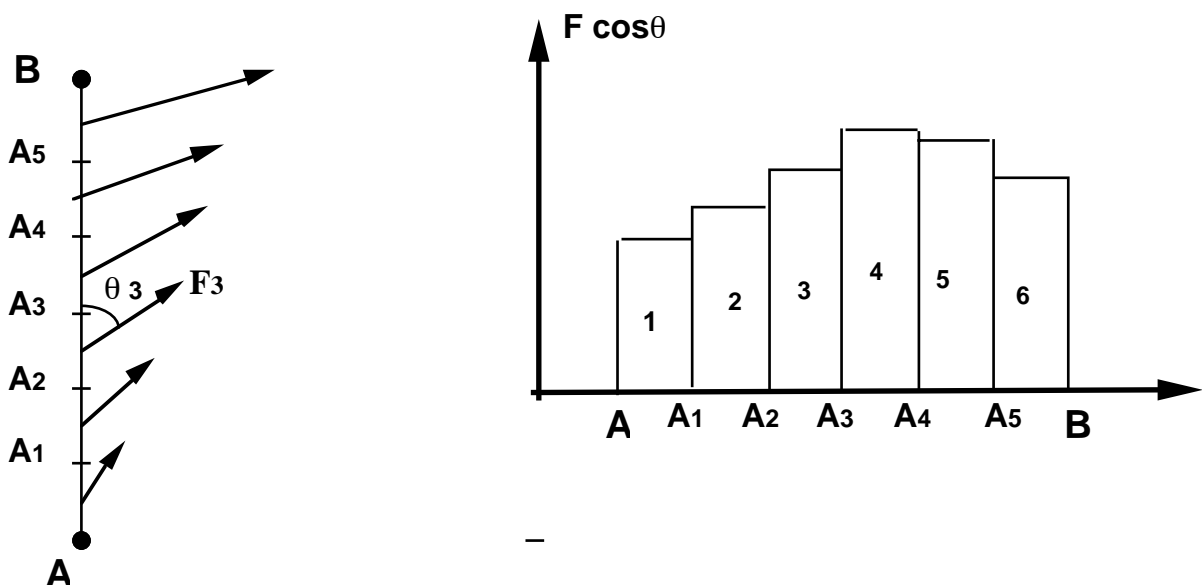
Considérons le cas où la trajectoire AB est toujours rectiligne, mais où la force dépend de la position de son point d'application M. Si l'on suppose que AB est porté par l'axe  $Ox$ , M est donné par son abscisse  $x$ , l'intensité de la force est une fonction  $F(x)$  et l'angle qu'elle fait avec  $ox$  est donné par une fonction  $\theta(x)$ .

Il ne peut plus être question ici d'utiliser une formule globale telle que celle du paragraphe précédent. Il nous faut découper AB en segments  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{i-1}A_i$ , etc.. de taille suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que s'exerce le long de chacun d'eux une force  $\mathbf{F}$  constante.

Nous admettrons par exemple que sur le segment délimité par les points  $A_{i-1}(x_{i-1})$  et  $A_i(x_i)$ , la projection de la force sur la trajectoire est égale à :

$$F_i \cos \theta_i = \frac{1}{2} [F(x_{i-1}) \cos \theta(x_{i-1}) + F(x_i) \cos \theta(x_i)]$$

Ainsi, lors du déplacement de  $A_{i-1}$  à  $A_i$ , le travail exercé par la force électrique est égal à  $\Delta W_i = A_{i-1}A_i \cdot F_i \cdot \cos \theta_i$



Il s'ensuit que le travail total de la force électrique lors de son déplacement de A à B est la somme de tous les travaux élémentaires, soit:

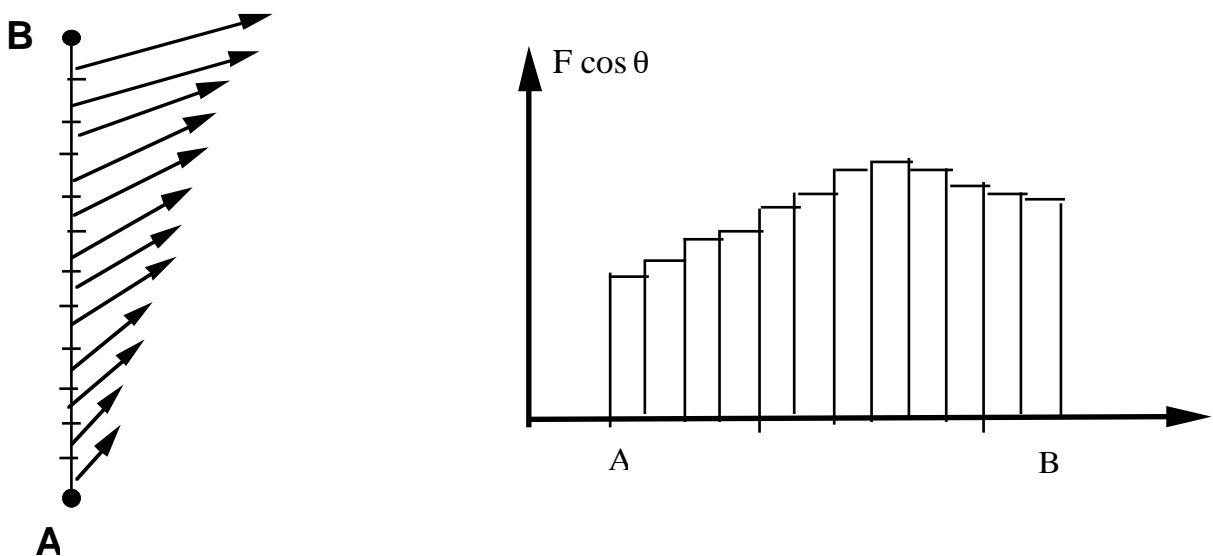
$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot A_{i-1}A_i \cos \theta_i$$

Représentons dans un diagramme de type "histogramme" des petits rectangles indicés 1,2,... i,...n dont les bases sont égales aux distances  $A_{i-1}A_i = \Delta l_i = x_i - x_{i-1}$  et dont les hauteurs sont égales aux produits  $F_i \cos \theta_i$ .

Dans ce diagramme, l'aire du rectangle i n'est autre que le travail  $\Delta W_i$ .

Le travail total effectué lors du déplacement de A vers B est la somme de chacune de ces aires, c'est à dire l'aire totale sous la courbe en escalier.

Avec l'affinement du pas, la courbe en escalier se rapproche d'une courbe continue représentée par la fonction  $g(x)=F(x) \cos \theta(x)$ . Le travail tend vers l'aire hachurée sous cette courbe.



L'élément de travail  $\delta W$  produit par la force  $F(x)$  lors de son déplacement élémentaire de  $x$  à  $x + dx$  est égal à:

$$\delta W = F(x) \cos \theta(x) dx$$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) \cos \theta(x) dx$$

Considérons trois points A, B, C et D placés sur un axe  $ox$ , aux coordonnées  $x_A=5m$  et  $x_B= 12m$  et  $x_C= 120m$   $x_D=0130m$ . Un mobile soumis à une force  $F$  se déplace sur l'axe Au point M d'abscisse  $x$ , exprimé en mètre; l'intensité de la force est en Newton  $F(x)=2x$  et l'angle  $\theta$  vaut en degrés  $\theta(x) = 30^\circ + 2x$ .

Déterminer le travail effectué par la force lors du déplacement de A en B, puis de C en D. Montrer à quelles aires correspondent ces travaux.

Notez bien que l'intégration d'une fonction à une variable est a priori faisable. Tout au plus faut-il consulter une table d'intégrales

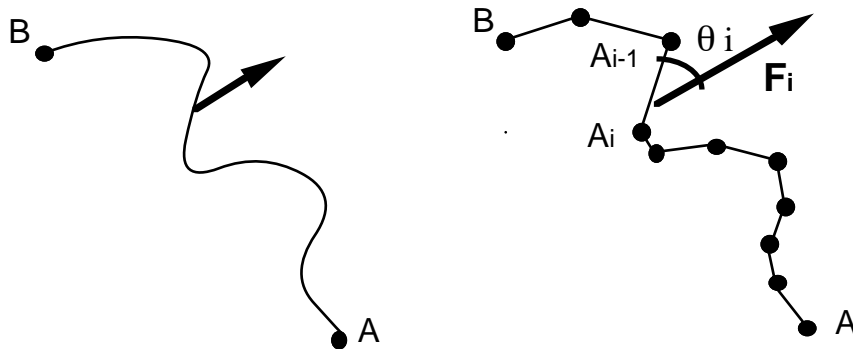
### II-3 Cas général, travail d'une force variable se déplaçant sur un chemin curviligne.

Nous avons supposé jusqu'ici que le point M se déplaçait sur un segment de droite AB.

Dans le cas général le point M décrit une trajectoire curviligne quelconque ( $\Gamma$ ). Une origine étant choisie sur la trajectoire, la position de M est repérée par le scalaire  $l$  qui indique la distance que doit parcourir un mobile pour joindre 0 à M en suivant la courbe.

Lors du découpage par morceau, la courbe continue est transformée en une ligne brisée joignant les points  $A_{i-1}A_i$  de la courbe réelle. L'élément de travail  $\Delta W_i$  effectué par la force  $\mathbf{F}_i$  lors de son déplacement sur le segment  $A_{i-1}A_i$  de longueur  $\Delta l_i$  avec lequel elle fait un angle  $\theta_i$ , est égal à:

$$\Delta W_i = F_i \cos \theta_i \Delta l_i$$



Lors du passage à la limite continue, nous dirons que l'élément de travail  $\delta W$  effectué par la force  $\mathbf{F}(l)$  lors d'un déplacement élémentaire  $dl$  est égal à:

$$\delta W = F(l) \cos \theta(l) dl$$

Le travail total de la force lors de son déplacement le long de la ligne  $\Gamma$  est:

$$W = \int_{\Gamma} F(l) \cos \theta(l) dl$$

Une telle intégrale est appelée intégrale curviligne le long du chemin  $\Gamma$ .

### II-4 Expression vectorielle du travail élémentaire

Considérons le vecteur  $\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_i$  joignant les points  $A_{i-1}$  et  $A_i$  apparus lors de la découpe de la courbe  $\Gamma$ . Appelons ce vecteur  $\Delta \mathbf{l}_i$ . Le travail  $\Delta W_i$  effectué lors du déplacement  $\Delta \mathbf{l}_i$  s'écrit aussi:

$$\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$$

Lors du passage à la limite continue  $\Delta \mathbf{l}$  devient  $d\mathbf{l} = \mathbf{u} \cdot dl$  où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire tangent à la courbe ( $\Gamma$ ) au point d'abscisse curviligne  $l$ .

L'élément de travail est:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Le travail total s'écrit alors:

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(l) \cdot d\mathbf{l}$$

$d\mathbf{l}$  est le vecteur infiniment petit joignant deux point M et M' de la trajectoire, infiniment proches de la trajectoire.

## II-5 Expression du travail élémentaire dans un repère cartésien

Dans un repère cartésien les vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $d\mathbf{l}$  peuvent être exprimés par leurs composantes:

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} \quad d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

Compte tenu de l'expression du produit scalaire, l'élément de travail effectué par la force  $\mathbf{F}$  lors du déplacement  $d\mathbf{l}$  de son point d'application s'écrit:

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

et le travail total devient:

$$W = \int_{\Gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Insistons encore sur le fait que l'on calcule le travail en suivant la trajectoire ( $\Gamma$ ). Si l'on se donne  $dx$ , alors  $dy$  et  $dz$  sont fixés.

W n'est pas la somme de trois intégrales suivant x, y et z. C'est une somme le long du chemin, ce qui nécessite un paramétrage du chemin ( $\Gamma$ ).

*Considérons dans un repère cartésien trois points A (1,0,0), B(2,0,0) et C(2,1,0). Déterminer les travaux effectués par les forces dont les composantes sont données ci dessous lors des déplacements AB, BC et AC :*

i)  $F_x = x, F_y = y, F_z = z$

ii)  $F_x = xy, F_y = yz, F_z = zx$

*Le travail dépend-il du chemin suivi?*

## **III Travail et différentielles totales exactes**

### III-1 Formes différentielles

Soit  $X(x,y,z)$ ,  $Y(x,y,z)$  et  $Z(x,y,z)$  trois fonctions continues des trois variables  $x,y,z$ . On appelle forme différentielle la quantité  $\delta g$  définie par:

$$\delta g = X(x,y,z) dx + Y(x,y,z) dy + Z(x,y,z) dz$$

De telles formes différentielles apparaissent en physique comme des contributions infinitésimales  $\delta g$  à une grandeur  $g$  lors de variations élémentaires  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  des paramètres  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Ainsi une contribution élémentaire du travail des forces électriques apparaît comme une forme différentielle.

### III-2 Intégrale curviligne

Une intégrale curviligne est la somme des contributions infinitésimales  $\delta g$  accumulées le long d'un chemin ( $\Gamma$ ).

Le travail des forces électriques se présente sous forme d'une intégrale curviligne.

Insistons encore sur le fait que, dans le cas général, le calcul d'une telle grandeur implique la connaissance du chemin suivi.

### III-3 Cas particulier de forme différentielle: les différentielles totales exactes

La définition d'une forme différentielle n'implique aucune relation entre les fonctions X, Y et Z.

Il est néanmoins un cas particulier très important de forme différentielle: c'est celui où les fonctions X, Y et Z ne sont pas indépendantes les unes des autres mais sont les dérivées partielles d'une même fonction scalaire g:

$$X(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad Y(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y} \quad Z(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Alors, dans ce cas particulier, l'intégrale curviligne le long d'un chemin ( $\Gamma$ ) menant du point A au point B ne dépend pas du chemin suivi. Elle est égale à la différence des valeurs de g en A et en B. On écrit alors:

$$\int_{\Gamma} \delta g = \int_A^B dg = g(B) - g(A)$$

La forme différentielle  $\delta g$  se note alors dg (avec un d "droit"). dg s'appelle différentielle de g ou différentielle totale exacte.

Si l'indication du chemin ( $\Gamma$ ) est nécessaire pour effectuer la somme d'éléments d'une forme différentielle il devient superflu pour effectuer la somme des éléments d'une différentielle totale exacte. Il suffit de préciser les points de départ et d'arrivée, ce qui rend l'expression proche de celle d'une intégrale.

Si  $\Gamma$  est une boucle fermée qui commence en A et finit au même point A:

$$\oint dg = 0$$

La boucle entourant le signe intégral signifie que le chemin d'intégration est un contour fermé.

En remplaçant X,Y,Z par leur expression en fonction de g, il vient:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

Rappel : les dérivées "rondes"  $\partial g / \partial x$  sous-entendent que la dérivation s'effectue par rapport à la seule variable x, les autres étant considérées comme des constantes, le temps de la dérivation. Si il y a ambiguïté (en thermodynamique, il y a toujours ambiguïté) il faut écrire:

$$dg = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{z,x} dy + \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right)_{y,x} dz$$

*Ecrire la différentielle de la fonction  $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$*

### III-4 Reconnaître une différentielle totale exacte

Au chapitre II, nous avons calculé les dérivées partielles d'une fonction  $g(x,y,z) = 2x^2y^2 - z^2x^2 + xyz$ . Si nous les appelons X(x,y,z), Y(x,y,z) et Z(x,y,z) nous avons:

$$X(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} = 4xy^2 - 2z^2x + yz \quad \text{et} \quad Y(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2y + xz$$

En dérivant X par rapport à y et Y par rapport à x, il vient:



$$\frac{\partial X}{\partial y} = 8xy + z \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 8xy + z$$

Nous observons que  $\frac{\partial X}{\partial y}$  et  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  sont égales. Les dérivées secondes partielles par rapport aux mêmes variables x puis y ou y puis x sont égales.

$\frac{\partial X}{\partial y}$  est la dérivée par rapport à y de la dérivée de g par rapport à x . Elle se note:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

$$\text{et donc: } \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

En étendant le raisonnement sur les trois fonctions X,Y,Z et les trois composantes x,y,z, on reconnaîtra si les fonctions X,Y et Z sont les dérivées partielles d'une même fonction scalaire g si on a à la fois:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

*Lesquelles de ces formes différentielles sont des différentielles totales exactes:*

$$\delta g = (x^2+x) dx + 2y dy + z^{1/2} dz$$

$$\delta g = x^2 y z dx + x y^2 z dy + x y z^2 dz$$

$$\delta g = (x^2+y^2+z^2) dx + (x^2+y^2+z^2) dy + (x^2+y^2+z^2) dz$$

$$\delta g = (3x^2+2y) dx + 2x dy + 2z dz$$

*Déterminer la fonction g lorsqu'elle existe*

### III-5 Travail de la force électrique

L'élément de travail de la force électrique s'écrit comme une forme différentielle:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Or les composantes  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  de la force, définie localement à partir du champ électrique  $\mathbf{E}$  selon la relation  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , sont les dérivées partielles de la fonction scalaire  $-qV(\mathbf{r})$ . il s'en suit:

$$\delta W = dW = -q \left[ \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right]$$

Le travail effectué lors du déplacement de la charge q de A vers B est, quel que soit le chemin suivi:

$$W_{AB} = -q (V_B - V_A) = q (V_A - V_B)$$

## **IV Circulation d'un champ de vecteur E**

### IV-1 Circulation de E

De même que l'on parle de l'élément de travail  $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  de la force  $\mathbf{F}$  lors du déplacement infinitésimal  $d\mathbf{l}$ , on parle de l'élément de circulation  $\delta C = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  du champ électrique lors du déplacement  $d\mathbf{l}$  d'un "mobile"

Puisque  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{E}$  ne sont séparés que par un coefficient de proportionnalité q, ce qui a été dit sur le travail de  $\mathbf{F}$  reste valable sur la circulation de  $\mathbf{E}$ .

L'élément de circulation d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  est une différentielle totale exacte et s'écrit  $dC = -dV$ .

La circulation de  $\mathbf{E}$  sur un chemin ( $\Gamma$ ) joignant le point A au point B est égale à la différence de potentielle  $V_A - V_B$ :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

La circulation de  $\mathbf{E}$  sur un contour fermé est nulle.

Cette relation est vraie parce que  $\mathbf{E}$  dérive d'un gradient. Elle est à rapprocher de:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

qui était vraie pour cette même raison.

Il s'agit en fait de deux relations équivalentes. Mais l'une est vraie en chaque point, c'est une équation locale, alors que l'autre est une forme intégrale qui nécessite un contour fermé.

#### IV-2 Retour sur le gradient

La relation entre la variation de potentiel et de champ le long d'un chemin ( $\Gamma$ ) précisé s'écrivent:

$$dV = - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

soit en coordonnées cartésiennes:

$$dV = - E_x \cdot dx - E_y \cdot dy - E_z \cdot dz$$

Choisissons un chemin parallèle à l'axe des x. Lorsque l'on suit ce chemin, y et z sont constants et donc leurs variations dy et dz sont nulles:

$$(dV)_{y \text{ et } z \text{ constants}} = - E_x \cdot dx$$

soit:

$$E_x = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y,z}$$

Et en répétant l'opération sur y et z:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V$$

### V Energie potentielle d'une charge

#### V-1 Définition

Il existe de nombreuses formes d'énergie. Vous connaissez l'énergie potentielle mgh d'un corps de masse m placé à l'altitude h. Vous connaissez aussi l'énergie cinétique due à la vitesse de déplacement d'un corps  $E_c = 1/2 m v^2$ . Il existe d'autres formes d'énergies: l'énergie nucléaire, l'énergie calorifique (profondément liée à l'agitation thermique des atomes dans un corps), etc.

L'énergie potentielle est celle qui ne dépend que de la seule position du corps, toutes choses étant égales par ailleurs.

Par définition, l'énergie potentielle d'un corps est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour amener le corps à sa position. Cette énergie potentielle est restituée à l'expérimentateur lors du retour de l'objet à sa position première, (les autres énergies n'étant pas modifiées).

Pour effectuer un déplacement de l'objet soumis à une force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (ici la force électrique), l'expérimentateur doit appliquer à tout moment une force  $\mathbf{F}_{\text{exp}}$  telle que la résultante des forces :  $\mathbf{F}_{\text{exp}} + \mathbf{F}$  est nulle.

$$\text{Energie potentielle} = \text{Travail de } \mathbf{F}_{\text{exp}} = - \text{Travail de } \mathbf{F}$$

Vous allez peut-être objecter que, si la résultante des forces est nulle, l'objet ne quittera pas sa position d'équilibre. C'est exact. L'expérimentateur doit appliquer au départ une force légèrement plus importante pour accélérer le corps et lui donner de la vitesse. A l'opposé, il doit appliquer une force légèrement réduite à l'arrivée pour ralentir l'objet et l'immobiliser. Plus faibles seront les excédents de force, plus faible sera la vitesse de déplacement de l'objet. Mais nous ne sommes pas pressés; nous avons un temps infini. Les deux éléments perturbateurs peuvent être aussi petits que l'on veut et finalement être négligés (Une analyse rigoureuse montrerait que de toute façon ils se compensent).

### V-2 Energie potentielle d'une charge dans un champ électrique

Soit un champ électrique  $\mathbf{E}$  auquel est associé le potentiel  $V$ .  $\mathbf{E}$  et  $V$  sont créés par les charges  $q_i$  placées en  $0_i$ . On définit l'énergie potentielle  $E_p$  d'une charge  $q$  placée en  $\mathbf{r}$  comme le travail que doit fournir l'expérimentateur de l'infini au point  $\mathbf{r}$ .

$$E_p = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{2} [ (\text{charge } q_i) \times (\text{potentiel } V_i \text{ créé en } \mathbf{r}_i \text{ par les autres charges}) ]$$

(pour faire la distinction entre l'ensemble des charges qui créent le champ et celle qui le subit, on peut appeler les premières (les  $q_i$ ) charges actives et l'autre ( $q$ ) charge passive)

*Déterminer l'énergie potentielle d'un l'électron situé sur la première orbite de Bohr d'un élément de numéro atomique  $Z$ . Quelle est cette énergie pour l'atome d'hydrogène et du cuivre. (Donner l'énergie en électron volt). Quelles sont les longueurs d'onde de photons de mêmes énergies?*

## VI Energie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles

### VI-1 Définition

L'énergie potentielle d'un ensemble de charges  $q_A, q_B, q_C, \dots$  situées aux points  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \dots$  est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour déplacer ces charges de l'infini à leurs positions finales.

On fera bien la distinction entre l'énergie potentielle d'une charge (passive) dans le champ de charges extérieures (actives) et l'énergie potentiel d'un système formé d'un ensemble de charges.

### VI-2 Energie potentielle d'un système de deux charges

Au départ, les deux charges  $q_A$  et  $q_B$  sont placées à l'infini: disons  $q_A$  est à l'infini à droite et  $q_B$  à l'infini à gauche. Aucune de ces charges n'est soumise à une force (trop éloignées les unes des autres, les charges ne se "voient" pas).

Déplaçons la charge  $q_A$  de l'infini à sa position finale, le point  $\mathbf{r}_A$ . Durant ce déplacement  $q_A$  n'est soumis à aucune force ( $q_B$  est trop loin). L'expérimentateur ne

fournit aucun travail et ce déplacement n'apporte aucune contribution à l'énergie potentielle.

$q_A$  étant en A, déplaçons la charge B de l'infini vers le point  $\mathbf{r}_B$ . Pour effectuer ce déplacement, l'expérimentateur doit en permanence exercer sur  $q_B$  une force égale et opposée à la force électrique. Le travail de la force électrique est celui de déplacement d'une charge  $q_B$  dans le champ  $V_{AB}$  créé par une charge  $q_A$ , la distance entre A et B variant de l'infini à  $r_{AB} = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ ,

$$\mathcal{E}_p = W_{\text{exp}} = -W = -q_B (V_{AB}(\infty) - V_{AB}(\mathbf{r}_B)) = q_B \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}}$$

Nous aurions pu tout aussi bien amener d'abord B de l'infini puis déplacer A dans le champ  $V_{BA}$  de B. L'expression de l'énergie potentielle est inchangée puisqu'il suffit d'intervertir A et B dans la relation ci-dessus (c'est heureux puisque nous avons défini l'énergie potentielle comme provenant de la seule position des charges).

Nous pouvons symétriser l'expression de l'énergie potentielle totale d'un système composé de deux charges en écrivant:

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} = \frac{1}{2} q_A \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} + \frac{1}{2} q_B \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} = \frac{1}{2} (q_A V_{BA} + q_B V_{AB})$$

ou encore en repassant à une notation à un indice où  $V_A$  est le potentiel en A (créé par B) et  $V_B$  est le potentiel en B (créé par A)

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} (q_A V_A + q_B V_B)$$

### VI-3 Energie potentiel d'un système de trois charges

Pour déterminer l'énergie potentielle totale d'un système de trois charges,  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $q_C$ , il faut procéder à trois opérations successives:

-Amener  $q_A$  de l'infini au point  $\mathbf{r}_A$ . Comme précédemment, le déplacement de la première charge s'effectue sans travail:

$$W_{\text{exp},1}=0$$

-Amener  $q_B$  de l'infini en  $\mathbf{r}_B$  dans le champ créé par la charge  $q_A$ . Le travail est:

$$W_{\text{Exp},2} = q_B V_{AB}$$

-Amener enfin  $q_C$  de l'infini à  $\mathbf{r}_C$  dans le champ créé par les charges  $q_A$  et  $q_B$ . En vertu du principe de superposition, le potentiel créé par A et B est égal à la somme des potentiels créés par chacune de ces charges séparément et donc:

$$W_{\text{Exp},3} = q_C (V_{AC} + V_{BC})$$

L' énergie potentielle totale est donc:

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C q_A}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}} + \frac{q_C q_B}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}}$$

ou en symétrisant:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} q_A \left( \frac{q_B}{4 \pi \epsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C}{4 \pi \epsilon_0 r_{AC}} \right) + \frac{1}{2} q_B \left( \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0 r_{AB}} + \frac{q_C}{4 \pi \epsilon_0 r_{BC}} \right) + \frac{1}{2} q_C \left( \frac{q_B}{4 \pi \epsilon_0 r_{BC}} + \frac{q_A}{4 \pi \epsilon_0 r_{AC}} \right)$$

Soit encore:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} q_A V_A + \frac{1}{2} q_B V_B + \frac{1}{2} q_C V_C$$

où  $V_A$  est le potentiel créé en A par toutes les charges du système autres que A (ici  $q_B$  et  $q_C$ ).

#### VI-4 Généralisation

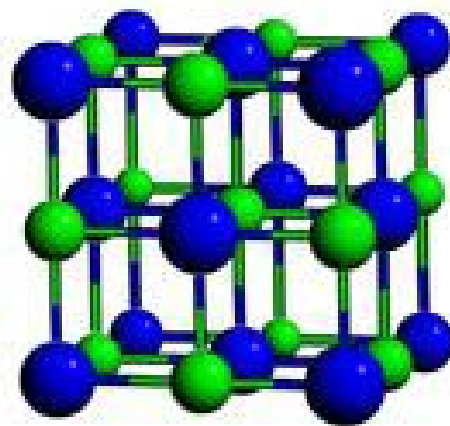
*Reproduire le raisonnement avec 4 charges et généraliser.*

L'énergie potentielle totale d'un système de n charges  $q_i$  situées aux points  $\mathbf{r}_i$ , s'écrit comme:

$$\mathcal{E}_p = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} [ (\text{charge } q_i) \times (\text{potentiel } V_i \text{ créé en } \mathbf{r}_i \text{ par les autres charges}) ]$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} q_i V_i$$

*Dans le chlorure de sodium, les atomes de sodium sont sous forme  $\text{Na}^+$  et les atomes de chlore  $\text{Cl}^-$ . La structure est cubique de paramètre 0.564 nm. Les  $\text{Na}^+$  sont placés au centre et sur les arêtes du cube. Les  $\text{Cl}^-$  sont situés sur les coins et les centres des faces. Evaluer l'énergie potentielle par atome d'un tel système.*

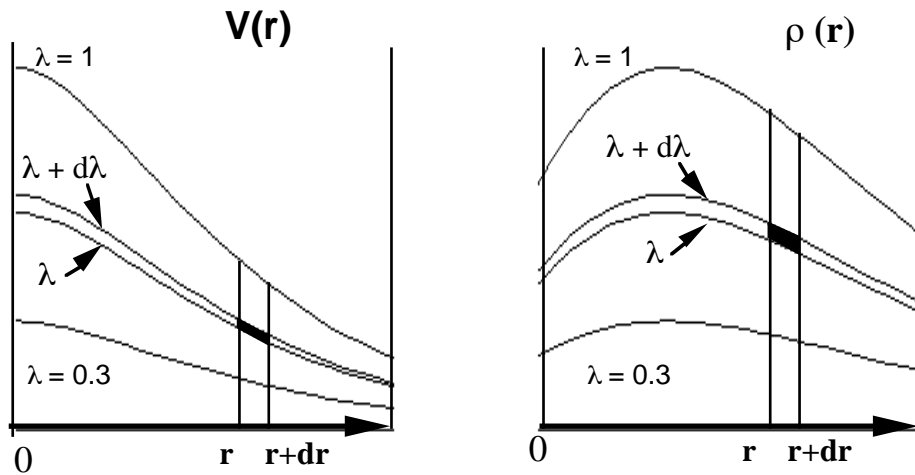


### **VII Energie électrostatique d'une distribution continue de charges**

Imaginons un système dont la densité de charge finale est  $\rho(\mathbf{r})$  et dont le potentiel électrique final est donné par  $V(\mathbf{r})$ .

Si on divise uniformément (en tout point de l'espace) la densité de charge électrique par un facteur 2, en vertu du principe de superposition, le champ électrique et le potentiel seront eux aussi divisés uniformément par 2.

Plus généralement au lieu de diviser charges, champs et potentiels par 2, on peut les multiplier simultanément et en tout point de l'espace par un coefficient  $\lambda$  quelconque, positif ou négatif.



Nous allons utiliser cette propriété pour amener le système d'un état initial sans charge et à potentiel nul en tout point de l'espace à l'état final donné par la distribution de charge finale  $\rho(\mathbf{r})$  et par le potentiel final  $V(\mathbf{r})$ .

Imaginons que l'on est à une étape intermédiaire et que l'on a déjà apporté de l'infini une quantité de charge telle que la densité de charge soit  $\lambda \rho(\mathbf{r})$  et que donc le potentiel est  $\lambda V(\mathbf{r})$ .

	Densité de charge	Potentiel
Etat initial	0	0
Etat intermédiaire	$\lambda \rho(\mathbf{r})$ $(\lambda + d\lambda) \rho(\mathbf{r})$	$\lambda V(\mathbf{r})$ $(\lambda + d\lambda) V(\mathbf{r})$
Etat final	$\rho(\mathbf{r})$	$V(\mathbf{r})$

Le potentiel étant  $\lambda V(\mathbf{r})$ , apportons de l'infini une quantité de charge petite, telle que la densité de charge en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace passe de  $\lambda \rho(\mathbf{r})$  à  $(\lambda + d\lambda) \rho(\mathbf{r})$ . L'accroissement de densité de charge est évidemment  $\rho(\mathbf{r}) d\lambda$ .

L'élément de charge transféré de l'infini au volume  $d\tau$  entourant le point  $\mathbf{r}$  est égal à  $\rho(\mathbf{r}) d\lambda d\tau$ . De façon similaire à ce que nous avons vu au chapitre III, l'élément de travail fourni par l'expérimentateur pour transférer cet élément de charge dans le volume  $d\tau$ , depuis le potentiel nul à l'infini au potentiel  $\lambda V(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{r}$ , est  $\delta W_{\text{exp}, d\tau} = \lambda V(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\lambda d\tau$ . Ce n'est autre que  $V dq$ .

Puisque l'expérimentateur doit effectuer un transfert de charges élémentaires dans tout l'espace, l'élément de travail qu'il doit fournir est la somme étendue sur tout l'espace des éléments  $\delta W_{\text{exp}, d\tau}$ , soit:

$$\delta W_{\text{exp}} = \left[ \iiint \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\tau \right] \lambda d\lambda$$

Il faut bien voir que le transfert de charge est infiniment petit et qu'il s'effectue à potentiel pratiquement constant, même si après l'opération, le potentiel est passé de  $\lambda V(\mathbf{r})$  à  $(\lambda + d\lambda) V(\mathbf{r})$ .

Le travail total à fournir par l'expérimentateur pour amener le système de l'état où  $\lambda = 0$  à celui où  $\lambda = 1$  est la somme sur  $\lambda$  des travaux élémentaires, soit:

$$W_{\text{exp}} = \left[ \iiint \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\tau \right] \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \lambda d\lambda$$

Puisque le travail fourni par l'expérimentateur pour transférer les charges n'est autre que l'énergie électrostatique, on obtient après intégration sur  $\lambda$ :

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2} \left[ \iiint \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\tau \right]$$

C'est une formule assez proche de celle rencontrée au chapitre III. La somme  $\Sigma$  est simplement remplacée par une intégrale qui s'adapte aux distributions de charge.

Cette relation se généralise à toutes les distributions de charge non ponctuelles et s'écrit:

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2} \left[ \iiint \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\tau \right] + \frac{1}{2} \left[ \iint \sigma(\mathbf{s}) V(\mathbf{s}) dS \right] + \frac{1}{2} \left[ \int \lambda(\mathbf{l}) V(\mathbf{l}) dl \right]$$

C'est la somme sur toutes les charges, du produit de la densité de charge par le potentiel électrique total.

#### *Application au condensateur plan*

Le condensateur plan est constitué de deux surfaces chargées maintenues aux potentiels  $V_A$  et  $V_B$ . La première surface porte la densité  $+\sigma$  et la seconde avec  $-\sigma$ . L'intégration est immédiate:

$$\mathbf{E_p} = 1/2 [\sigma S V_A - \sigma S V_B] = 1/2 Q (V_A - V_B) = 1/2 C V^2.$$

qui n'est autre que la relation trouvée au chapitre précédent en suivant un autre chemin mais en déplaçant toujours les charges par quantités infiniment petites, sous le potentiel des charges préalablement transférées.

### **VIII Densité d'énergie électrostatique**

#### VIII-1 Densité d'énergie électrostatique dans le condensateur plan

Rappelons-nous:

- Le champ électrique à l'intérieur du condensateur plan est égal à  $E = V/l$  où  $V$  est la différence de potentiel entre les armatures et  $l$  la distance qui les sépare. Le champ électrique à l'extérieur du condensateur est nul.

- la capacité du condensateur est donnée par  $C = \epsilon_0 S/l$ .

En remplaçant  $C$  et  $V$  dans l'expression de l'énergie, il vient:

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

où  $\mathcal{V} = lS$  est le volume de l'espace dans lequel régnait le champ électrique  $E$ . L'énergie électrostatique apparaît donc comme le produit du volume  $\mathcal{V}$  par une grandeur qui a la dimension d'une densité d'énergie par unité de volume.

#### VIII-1 Densité d'énergie électrostatique

Un calcul plus élaboré montre que, même dans les cas des distributions de charges les plus complexes, on aboutit à la valeur de l'énergie potentielle finale, si on admet qu'il régnait en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace une densité d'énergie électrostatique égale à:

$$\frac{d \mathbf{E_p}}{d \tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

où  $E$  est le champ électrique en ce point.

Soit en intégrant sur tout l'espace:

$$\mathbf{E_p} = \int_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

## **IX Les deux façons de calculer l'énergie**

### **IX-1 Deux calculs équivalents**

Il y a donc deux façons équivalentes de déterminer l'énergie électrostatique d'une distribution de charges.

1<sup>re</sup> façon : Faire la somme sur toutes les charges de  $\frac{1}{2} \rho V$ .

2<sup>ème</sup> façon : Faire la somme sur tout l'espace de la densité d'énergie électrostatique.

Cette deuxième façon de procéder va bien au delà d'une simple équivalence de calcul puisqu'elle semble montrer (et ce sera de plus en plus justifié par la suite) que le champ électrique n'est pas un simple intermédiaire de calcul qui servirait à déterminer la force s'appliquant sur une charge, mais une grandeur physique apportant sa propre énergie.

### **IX-2 Exemple d'une sphère chargée en surface**

Considérons une sphère de rayon  $R$  chargée en surface. déterminons l'énergie électrostatique de ce système.

1<sup>re</sup> façon de calculer:

Le potentiel auquel est portée la sphère est:

$$V(R) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

Toutes les charges  $Q$  étant portées au même potentiel  $V(R)$ , il vient:

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

2<sup>ème</sup> façon de calculer:

Le champ électrique est nul de 0 à  $R$  et vaut  $Q / 4 \pi \epsilon_0 r^2$  de  $R$  à l'infini. l' énergie peut donc aussi s'écrire:

$$\mathbf{E_p} = \int_{r=R}^{r=\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4 \pi r^2 dr$$

ce qui conduit aussi à:

$$\mathbf{E_p} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4 \pi \epsilon_0 R}$$



### Les conducteurs en équilibre statique

#### I Conducteurs et isolants

##### I-1 Les charges dans les matériaux

Vous savez que la matière est composée de charges positives: les protons localisés dans les noyaux des atomes et de charges négatives, les électrons, formant le nuage électronique dont l'extension spatiale représente la taille de l'atome.

Vous avez appris aussi que l'on pouvait classer les électrons en deux groupes: les électrons des couches profondes qui sont fortement liés aux atomes et les électrons des couches périphériques qui peuvent passer d'un atome à l'autre, conduisent à la liaison chimique et assurent la stabilité des molécules ou des solides.

Les isolants se distinguent des conducteurs par le type de liaison qui assure la cohésion du solide et par la mobilité des électrons des couches externes.

##### I-2 Les isolants

Dans les isolants, les électrons des couches externes forment des liaisons covalentes, ioniques ou plus généralement ionocovalentes. Dans ce type de liaison, un électron ne s'éloigne jamais de l'atome dont il est issu, tout au plus s'en écarte-t-il pour atteindre les atomes premiers voisins. Chaque électron reste localisé dans une région très restreinte de l'espace. Il n'est pas mobile.

##### I-3 Electrons libres dans les conducteurs

Dans les conducteurs, au contraire, les électrons (au moins une partie d'entre eux) qui assurent la cohésion du métal sont libres de se déplacer dans l'ensemble du matériau. Les électrons libérés par les atomes sont appelés électrons libres.

La valence d'un métal est égale au nombre d'électrons que libère chacun des atomes.

Un métal peut alors être considéré comme un réseau d'ions positifs baignés par une mer d'électrons libres.

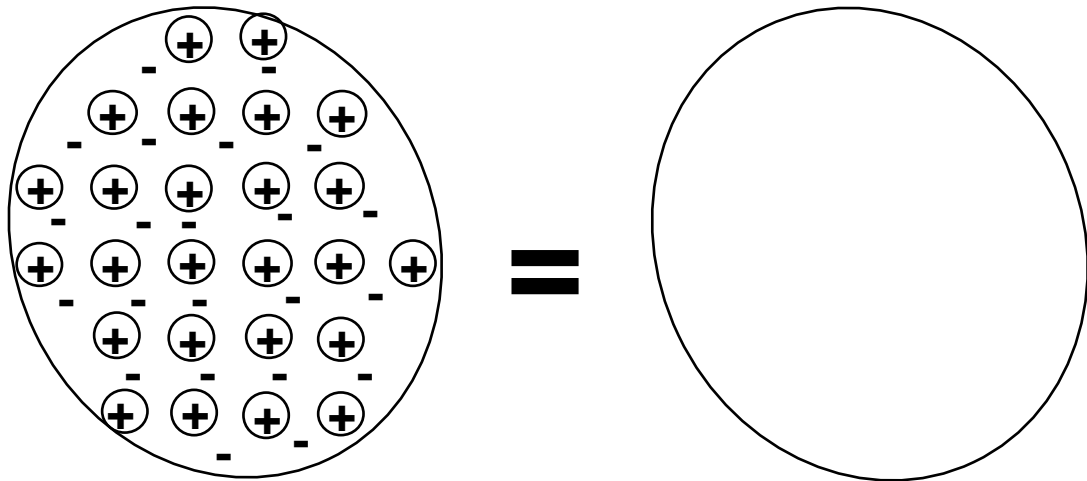
##### I-4 L'échelle de l'électrostatique

En l'absence de sollicitation électrique extérieure, un métal est électriquement neutre en chacun de ses "points".

Il y a en moyenne (localement) compensation entre les charges + des ions positifs et les charges - des électrons libres.

Cela est vrai à condition de considérer un "point" comme un volume petit mais légèrement supérieur à la taille de l'atome. C'est ce que l'on fait en électrostatique.

Dans le métal représenté ci-dessous, les électrons sont uniformément répartis et viennent compenser en chaque "point" la charge électrique positive des ions. Du point de vue de l'électrostatique, tout se passe comme si ce métal ne portait aucune charge électrique.



## II Champ électrique dans un conducteur

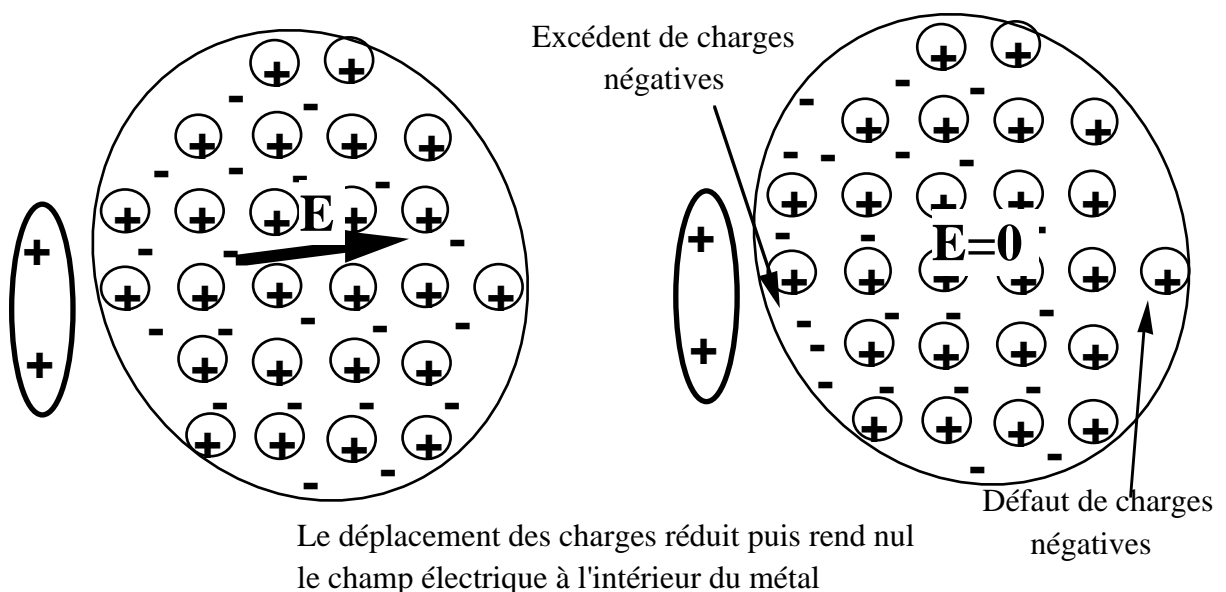
### II-1 Réponse d'un conducteur à une sollicitation extérieure

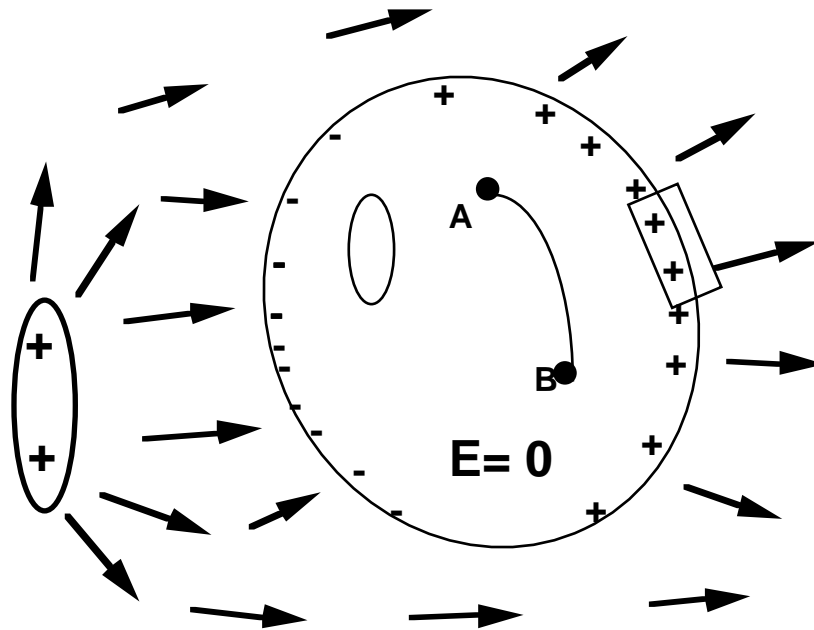
Considérons un métal non chargé dans lequel les charges positives fixes et négatives mobiles (électrons libres) sont distribuées de façon uniforme. Ce métal est électriquement neutre et ne fait apparaître aucune charge électrique résultante.

Approchons de ce métal un solide chargé positivement tel que celui représenté sur la figure ci-dessous. Le solide chargé crée dans l'espace et en particulier dans le métal un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

En fait, les électrons libres du métal vont réagir très vite à ce champ électrique et, animés par la force de Coulomb, ils vont se déplacer en sens inverse au champ électrique. Les électrons vont donc se diriger vers les charges positives portées par le solide extérieur.

Ne pouvant sortir du solide, des électrons vont progressivement s'accumuler sur la face du métal située au voisinage de la charge extérieure positive et créer en ces points une charge négative résultante. A l'inverse, une charge positive résultante va apparaître au voisinage de la face opposée du solide par défaut d'électrons.





Ce faisant, les charges résultantes apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur au solide.

A l'intérieur du métal, ce nouveau champ viendra de toute évidence s'opposer au champ créé par les charges extérieures et réduire le champ électrique total. Les électrons libres ne cesseront leur mouvement de migration que lorsqu'ils ne seront plus soumis à aucune force, c'est-à-dire lorsque le champ électrique total à l'intérieur du métal sera nul.

Ainsi à l'équilibre, à l'intérieur d'un conducteur, le champ électrique total est nul. (situation d'électrostatique)

La situation ci-dessus ne doit pas être confondue avec celle où les extrémités du fil conducteur sont maintenues à des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et reliées à des réservoirs de charges positives et négatives. Cette connexion empêcherait l'accumulation de charges sur les surfaces et ne conduirait à aucune modification du champ électrique à l'intérieur du métal. Les électrons ne feraient que "passer" (situation d'électrocinétique que l'on verra au chapitre suivant.)

## II-2 Localisation des charges

Au vu de la description ci-dessus, les charges électriques (résultantes) semblent s'accumuler vers les surfaces.

Montrons en effet que si le champ électrique à l'intérieur d'un corps est nul, alors les charges électriques (s'il en porte) sont nécessairement des charges surfaciques.

Pour cela, considérons une surface fermée à l'intérieur de ce corps. Par hypothèse, le champ électrique est nul en chacun des points de cette surface. Par application du théorème de Gauss, la somme des charges électriques intérieures à cette surface fermée est nulle.

Puisque le même raisonnement peut être reproduit sur toute surface fermée de taille aussi petite que l'on veut, ne traversant pas les frontières du corps, alors on peut conclure qu'il n'y a pas de charge électrique volumique à l'intérieur d'un corps au sein duquel règne un champ électrique nul.

A l'équilibre, les charges électriques portées par un métal sont exclusivement surfaciques.

### II-3 Potentiel électrique dans un conducteur

Considérons deux points A et B situés à l'intérieur du métal au sein duquel règne un champ électrique nul.

Déterminons la différence de potentiel entre deux points A et B.

Pour cela, considérons un chemin ( $\Gamma$ ) à l'intérieur du métal. La différence de potentiel entre les points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Elle peut s'écrire:

$$V_A - V_B = \int_A^B (\Gamma) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Puisque  $\mathbf{E}$  est nul sur tout le chemin suivi, la différence de potentiel entre A et B est nulle.

A l'équilibre, tous les points d'un métal sont au même potentiel. Le métal constitue une équipotentielle.

Là aussi, il faudra bien faire la distinction avec la situation rencontrée en électrocinétique, qui n'est pas une situation d'équilibre statique et où le champ électrique à l'intérieur du métal n'est pas nul.

### II-4 Champ électrique à la surface externe d'un conducteur

Le champ électrique externe situé au voisinage immédiat d'un conducteur est perpendiculaire à la surface. Ceci est dû au fait que la surface est une équipotentielle et que les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Ce champ électrique est lié très directement à la densité de charge surfacique locale.

Pour déterminer ce champ, il suffit de considérer une surface fermée, dont deux faces parallèles  $S$  sont situées de part et d'autre de la surface du métal et dont les autres éléments sont perpendiculaires à cette surface.

Puisque le champ électrique interne est nul et si nous appelons  $E_s$  le champ électrique externe immédiat, nous avons:

$$S (0 + E_s) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \text{soit :} \quad E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La discontinuité de la composante normale du champ électrique est  $\sigma/\epsilon_0$ .

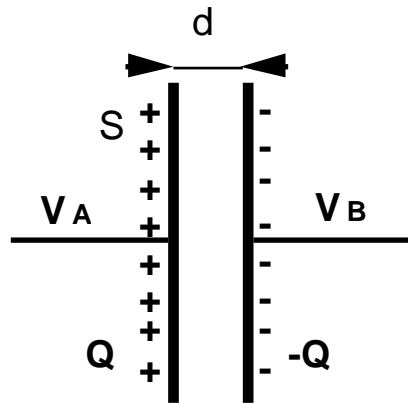
On peut résumer les propriétés d'un conducteur électrique à l'équilibre statique:

- Le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur
- Le potentiel est constant sur l'ensemble du conducteur
- Les charges électriques sont localisées en surface.
- Le champ électrique externe au voisinage immédiat du conducteur est normal à la surface et vaut  $\sigma/\epsilon_0$ .

## III Le condensateur sphérique

### III-1 rappels sur le condensateur plan

Vous avez rencontré en classe de terminale le condensateur plan. Ce condensateur était constitué de deux plaques métalliques appelées armatures situées en vis à vis et chargées de charges opposées  $Q$  et  $-Q$ .



Vous avez aussi appris que ce condensateur est caractérisé par sa capacité  $C$ . Cette grandeur était définie comme le coefficient de proportionnalité liant la différence de potentiel  $V_A - V_B$  entre les armatures à la charge  $Q$  citée plus haut.

$$Q = C (V_A - V_B)$$

Vous avez peut-être vu aussi que la capacité  $C$  est liée à la surface  $S$  des armatures et à la distance  $d$  qui les sépare par la relation:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Nous reviendrons sur ce condensateur en séance de travaux dirigés.

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur un condensateur où les armatures métalliques portées à des potentiels  $V_A$  et  $V_B$  ne sont plus planes mais sphériques.

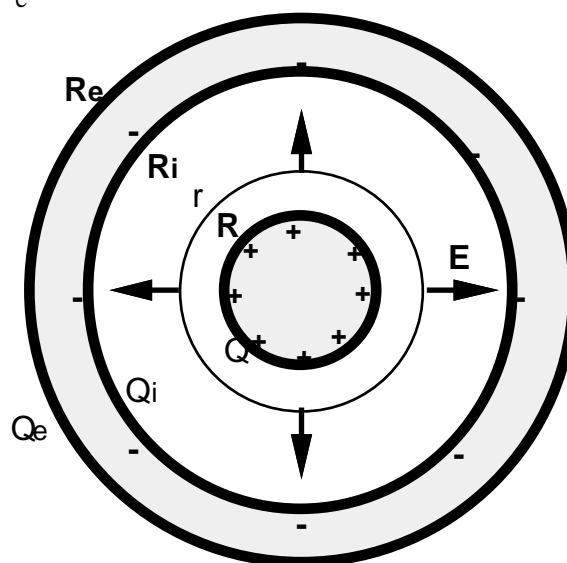
### III-2 Description géométrique du condensateur sphérique

Considérons une sphère (intérieure sur la figure ci-dessous) conductrice pleine, de rayon  $R$  portant la charge  $Q$ .

Au vu des conclusions précédentes et vu la symétrie du problème, les charges  $Q$  vont se répartir sur la surface avec la densité de charge

$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi R^2}$$

Entourons cette sphère d'une couronne sphérique conductrice de rayon intérieur  $R_i$  et de rayon extérieur  $R_e$ .



L'ensemble constitué de la sphère interne (armature intérieure, qui pourrait être creuse) et de la couronne sphérique (armature extérieure) est appelé un condensateur.

### III-3 Charge portée par la surface intérieure de la couronne sphérique

Considérons une sphère de rayon  $r$  compris entre  $R_i$  et  $R_e$ . Vu les propriétés des conducteurs en équilibre, en tout point de cette sphère, le champ électrique est nul. Cela signifie, par application du théorème de Gauss, que la somme des charges intérieures à cette sphère est nulle.

Puisque les charges intérieures comprennent la charge  $+Q$  localisée sur la surface de la petite sphère, il faut ajouter  $Q_i = -Q$  sur la surface intérieure de la couronne sphérique. Vu la symétrie du problème, la charge  $Q_i$  se répartira uniformément en surface.

### III-4 Champ électrique entre les deux armatures

Considérons maintenant une sphère de rayon  $r$  compris entre les armatures du condensateur, c'est-à-dire entre  $R$  et  $R_i$ . Vu la symétrie du problème, le champ électrique  $E(r)$  en chaque point de cette sphère est radial et constant. En appliquant le théorème de Gauss sur la surface fermée que constitue cette sphère de rayon  $r$ , il vient:

$$4 \pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Soit:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

### III-4 Différence de potentiel entre les deux armatures

La différence de potentiel entre les armatures s'obtient en intégrant  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  le long d'un rayon. Sur un tel rayon,  $\mathbf{E}$  et  $d\mathbf{l}$  sont colinéaires et il s'ensuit:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R} \right)$$

### III-5 Capacité du condensateur

Comme dans le condensateur plan, il y a proportionnalité entre la charge  $Q$  portée par l'armature centrale (et  $-Q$  porté par la surface interne de l'armature externe) et la différence de potentiel entre les armatures. Le coefficient de proportionnalité  $C$ , qui relie  $Q$  à la différence de potentiel  $V_A - V_B$  selon:

$$Q = C (V_A - V_B)$$

est appelé la capacité du condensateur.

La capacité du condensateur sphérique est:

$$C = \frac{4 \pi \epsilon_0 R R_i}{R - R_i}$$

L'unité de capacité est le farad

### III-6 Condensateur plan, limite du condensateur sphérique

Si la distance entre les armatures devient beaucoup plus petite que les rayons  $R$  et  $R_i$ , le condensateur sphérique s'approche du condensateur plan.

*Vérifier en remplaçant  $R_i$  par  $R+d$  et en se plaçant dans le cas où  $d \ll R$  que l'on retrouve l'ensemble des expressions du condensateur plan.*

### III-7 Charge portée par la surface externe de la couronne sphérique

La charge  $Q_e$  portée par la surface externe de la couronne sphérique va dépendre du potentiel  $V_B$  de cette couronne par rapport à l'infini.

Deux cas extrêmes apparaissent:

- La couronne sphérique est isolée
- L'armature externe est reliée à un réservoir de charge et est maintenue à un potentiel  $V=0$

Si l'armature externe est isolée, la somme des charges qu'elle contient doit être nulle. Puisque la charge  $-Q$  se place sur la surface intérieure de cette armature, la charge  $Q_e = +Q$  doit se placer sur la surface extérieure.

Par application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r > R_e$ , le champ électrique en un point  $M(\mathbf{r})$  extérieur aux armatures est simplement  $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . De  $R_e$  à l'infini, le potentiel vaut  $Q/4\pi\epsilon_0 r$ . Il est constant dans l'armature extérieure où il vaut  $Q/4\pi\epsilon_0 R_e$ .

Si l'armature est maintenue à un potentiel nul, il n'y a pas de différence de potentiel entre l'infini et les points situés à  $R_e$ . Cela impose un champ électrique extérieur nul. Par application du théorème de Gauss  $Q_e=0$ .

Le cas le plus fréquent reste celui où l'on impose un potentiel  $V_B$  différent de 0 à l'armature externe. On peut facilement montrer que la charge  $Q_e$  est alors égale à  $4\pi\epsilon_0 R V_A$ .

Dans la pratique, cette charge  $Q_e$  est en général beaucoup plus faible que  $Q$  et sera négligée.

## **IV énergie stockée dans un condensateur**

### IV-1 Charge directe d'un condensateur

Considérons deux armatures de condensateur non chargé. Au départ, la différence de potentiel entre les armatures  $\Delta V = V_A - V_B$  est égale à 0.

Nous allons charger le condensateur en extrayant la charge  $Q$  de l'armature A et en la déposant sur l'armature B.

En fait, ce transfert doit être réalisé par étapes en prélevant sur l'armature A et en déposant sur l'armature B des éléments de charge  $\delta q$  successifs.

Prélevons une charge  $\delta q$  à l'armature A et amenons la sur l'armature B. Ce premier transfert ne requiert aucun travail puisque la différence de potentiel entre les armatures était nul.

Après ce premier transfert de charge, l'armature A porte la charge  $\delta q$  et l'armature B la charge  $-\delta q$ . la différence de potentiel  $u_A - u_B$  est  $\delta q/C$ . (la lettre  $u$  est utilisée pour noter les potentiels au cours de la charge du condensateur.  $u$  va varier de 0 à  $V$ ).

Effectuons un deuxième transfert d'élément de charge  $\delta q$ . Le travail de la force électrique est  $\delta q (u_B - u_A)$  et donc celui fourni par l'expérimentateur est  $\delta q (u_A - u_B) = \delta q q/C = \delta q \delta q/C$ .

Après ce second transfert, la charge du condensateur est  $q = 2\delta q$  et la différence de potentiel entre les armatures est  $u_A - u_B = q/C = 2\delta q/C$ .

Le travail fourni par l'expérimentateur pour un troisième transfert est  $\delta q (u_A - u_B) = \delta q q/C = \delta q (2\delta q/C)$ , etc.

Ainsi l'élément de travail fourni par l'expérimentateur pour transférer la charge  $\delta q$  est  $\delta W = (u_A - u_B) \delta q = \delta q q/C$  où  $q$  est la charge qui a été transférée préalablement et  $u_A - u_B$  la différence de potentielle acquise par les transferts de charge précédents.

Le travail total fourni par expérimentateur pour transférer la charge  $Q$  est la somme des travaux élémentaires soit:

$$W = \int_{q=0}^{q=Q} \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2$$

#### IV-2 Energie potentielle d'un condensateur

Puisque l'énergie potentielle électrostatique est égale au travail fourni par l'expérimentateur pour modifier la position des charges, et compte tenu des relations entre  $V = (V_A - V_B)$ ,  $Q$  et  $C$ , on obtient les relations suivantes:

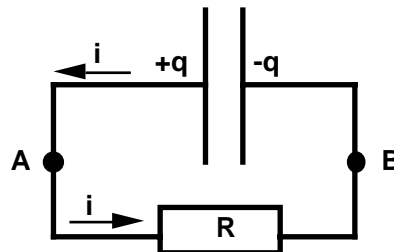
$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q V}{2}$$

### VI Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

#### V-1 Décharge d'un condensateur

Considérons un condensateur  $C$  portant à l'instant initial la charge  $Q$ . Relions à l'instant  $t=0$  ses armatures à une résistance  $R$ . Sa charge à l'instant  $t$  est notée  $q(t)$ .

En choisissant le signe de charge et le sens positif du courant comme indiqués ci-dessous,  $i(t) = -dq/dt$  (si le courant s'écoule dans le sens indiqué par la flèche ( $i > 0$ ),  $q$  décroît)



La différence de potentiel  $V(t) = V_A - V_B$  s'écrit:

-En considérant la branche contenant la résistance:

$$V_A - V_B = Ri = -R dq/dt$$

-En considérant la branche contenant le condensateur:

$$V_A - V_B = q/C$$

ce qui conduit à :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et sans second membre.

La solution générale s'écrit:



$$q(t) = \lambda \exp \left( - \frac{t}{RC} \right)$$

La constante  $\lambda$  se détermine en tenant compte du fait que  $q=Q$  à l'instant  $t=0$ . soit  $\lambda=Q$ .

l'intensité instantanée de courant  $i = dq/dt =$

$$i = - \frac{dq}{dt} = q(t) = \frac{Q}{RC} \exp \left( - \frac{t}{RC} \right)$$

La puissance dissipée à l'instant  $t$  dans la résistance est:

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = R (i(t))^2$$

Cela signifie que l'élément d'énergie  $dW(t)$  dissipé dans la résistance entre les temps  $t$  et  $t+dt$  s'écrit:

$$dW(t) = R (i(t))^2 dt$$

L'énergie totale dissipée dans la résistance lors de la décharge, est:

$$W = \int_{t=0}^{t=\infty} R (i(t))^2 dt = R \left( \frac{Q}{RC} \right)^2 \int_{t=0}^{t=\infty} \exp \left( - \frac{2t}{RC} \right) dt$$

que l'on trouve facilement par intégration:

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

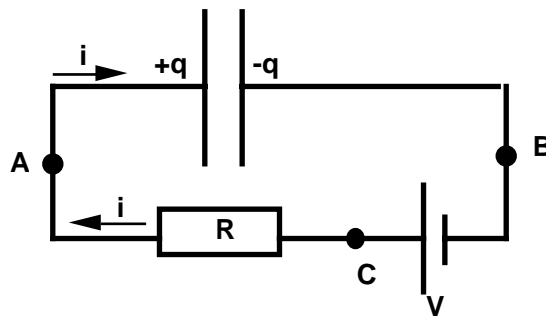
L'énergie qui était contenue dans le condensateur est dissipée par effet joule.

## V-2 Charge d'un condensateur

Considérons un circuit contenant une pile fournissant une tension  $E$  (à ne pas confondre avec le champ électrique), une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ .

A l'instant  $t=0$ , le condensateur n'est pas chargé et on ferme le circuit.

Avec les signes des charges et le sens du courant indiqués sur la figure ci dessous:  $i = dq/dt$ . En effet si le courant s'écoule dans le sens de la flèche ( $i > 0$ )  $q$  croît.



nous avons:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} \quad V_C - V_A = R i \quad V_C - V_B = V$$

ce qui conduit à l'équation différentielle:

$$V = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

qui est une équation différentielle à coefficients constants avec second membre.

La solution est la somme d'une solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.

Comme vu plus haut, la solution de l'équation sans second membre est:

$$q(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

alors que  $q = CV$  est une solution particulière.

Il vient:

$$q(t) = CV + \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

dont la solution, compte tenu de la condition initiale  $q(0) = 0$  s'écrit:

$$q(t) = CV \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

l'intensité dans le circuit s'écrit:

$$i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

La puissance débitée par le générateur est:  $P(t) = V i(t)$

La puissance dissipée dans la résistance est  $R i^2(t)$

La puissance fournie au condensateur est :  $q(t) \dot{q}(t) / C$

*Montrer que l'énergie totale fournie par le générateur est  $QV$  où  $Q$  est la charge finale du condensateur.*

*Montrer ensuite que l'énergie  $QV/2$  est stockée dans le condensateur et que  $QV/2$  est dissipée par effet joule.*

*Tracer dans chacun des cas  $q(t)$  et  $i(t)$ .*

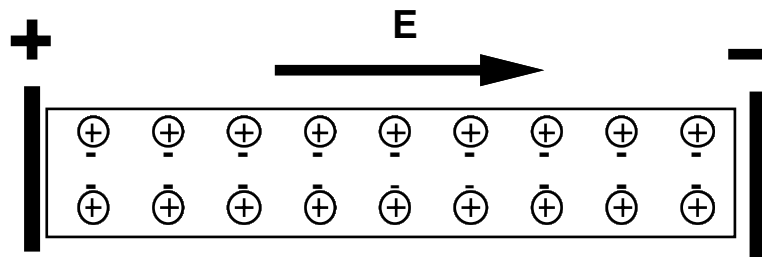
## Les courants électriques

### I Le courant continu

#### I-1 Maintien d'un courant continu

Considérons un cylindre métallique conducteur, constitué d'ions positifs fixes et d'électrons libres mobiles. Comme nous l'avons vu précédemment, en l'absence d'influence électrique extérieure, il y a localement et en moyenne compensation entre les ions positifs fixes et les électrons libres mobiles, ce qui assure la neutralité électrique locale du métal.

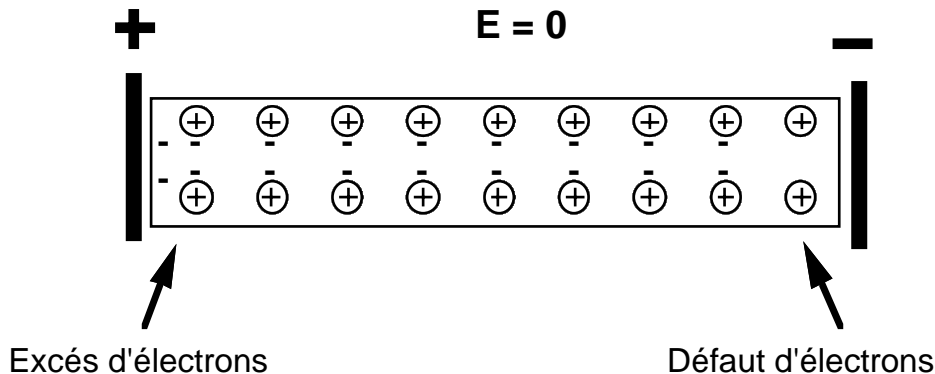
Plaçons sans contact, au voisinage de ses extrémités, deux plaques chargées positivement et négativement.



*Instant  $t=0$ . les électrodes créent un champ électrique qui va disparaître quasiment instantanément.*

A l'instant  $t=0$  un champ électrique créé par les électrodes apparaît dans le cylindre.

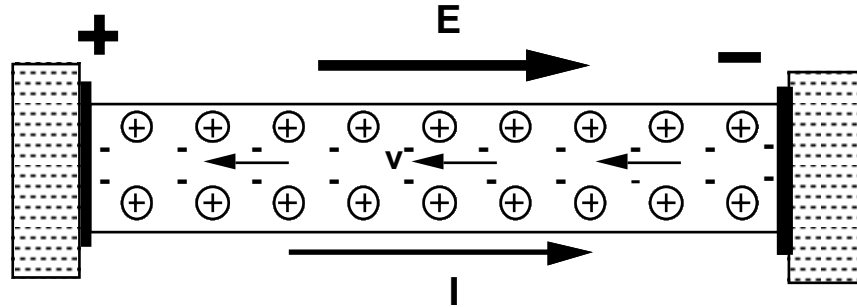
Mais quasi instantanément les électrons libres du métal se déplacent sous l'influence du champ en induisant un excédent de charges négatives au voisinage de la plaque positive et un défaut d'électrons au voisinage de la plaque négative, ce qui a pour effet d'annihiler le champ électrique à l'intérieur du cylindre qui, comme dans le chapitre précédent, devient une équipotentielle.



Cette situation n'assure pas de transfert de charge d'une électrode à l'autre et donc pas de passage continu de courant.

Pour ce faire, mettons les électrodes et les extrémités du métal en contact et faisons en sorte que des électrons puissent être librement fournis ou reçus par les électrodes maintenues à leurs potentiels. Celles-ci se comportent comme des réservoirs de charges. Il est clair que des électrons, attirés par l'excédent de charges positives localisées à l'extrémité droite du barreau, passent de l'électrode négative au barreau pour de nouveau assurer la neutralité électrique en cette extrémité. De la même façon, à extrémité gauche, les électrons excédentaires quittent le barreau pour rejoindre l'électrode positive et assurer là aussi la neutralité électrique.

Cela a pour effet de rétablir le champ électrique initial et d'entretenir le déplacement des électrons à l'intérieur du barreau et un transfert de charge avec les électrodes.



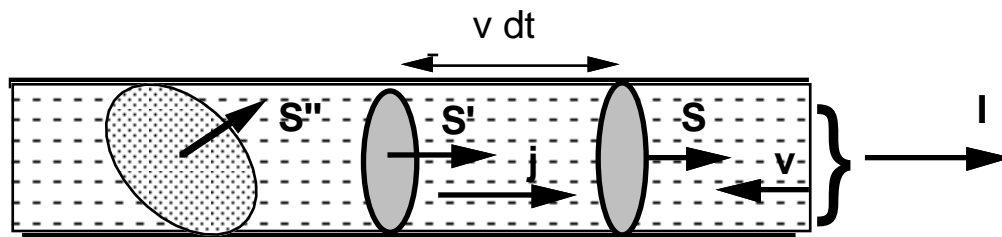
Le gradient de potentiel à l'intérieur du cylindre est rétabli.

Ce champ  $\mathbf{E}$  qui assure le déplacement des électrons et la circulation du courant est appelé champ électromoteur.

### I-2 Intensité de courant électrique

Considérons une section droite du cylindre sur lequel nous avons fait figurer les électrons libres. Les ions positifs qui assurent la neutralité électrique n'ont pas été représentés.

On appelle intensité de courant électrique la quantité de charge  $Q$  qui traverse la section droite  $S$  en une seconde.



Soit  $\mathbf{v}$  la vitesse de déplacement des électrons,  $q = -e$  leur charge élémentaire,  $n$  la densité d'électrons libres par unité de volume (pour le cuivre  $n$  est de  $8.45 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$ ), et  $\rho = nq$  la densité de charge par unité de volume.

Les  $dN$  électrons qui traversent la section  $S$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  compris entre  $t$  et  $t+dt$  sont ceux qui se trouvaient à l'instant  $t$  dans le cylindre délimité par la section  $S$  et la section  $S'$  distante de la précédente de  $dl = v dt$ . Ce nombre d'électrons est:

$$dN = n S dl$$

L'élément de charge  $dQ$  qui traverse  $S$  pendant le temps  $dt$  est:

$$dQ = n S l q = n q v S dt$$

Ainsi, l'intensité du courant électrique au temps  $t$ , égale à la charge qui traverse  $S$  pendant l'unité de temps, est simplement:

$$I = dQ/dt = n q v S = \rho v S$$

Par malchance historique, le sens positif du courant électrique a été choisi opposé au sens de déplacement des électrons.

### I-3 Densité de courant

Par définition, on appelle densité de courant électrique la grandeur vectorielle  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}$$

La densité de courant est un vecteur parallèle à la vitesse de déplacement des charges, d'intensité d'autant plus importante que la charge des porteurs élémentaires est élevée et que leur densité volumique est grande.

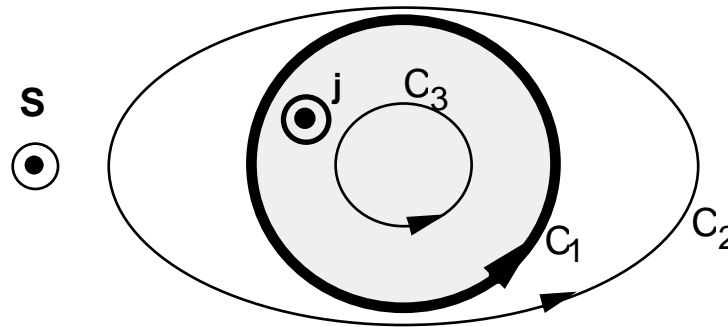
L'intensité du courant électrique apparaît comme le produit scalaire de la surface  $\mathbf{S}$  et de la densité de courant  $\mathbf{j}$ . L'intensité est le flux de  $\mathbf{j}$  à travers  $\mathbf{S}$ .

On peut tout aussi bien choisir une surface  $\mathbf{S}_1$  qui ne soit pas une section droite du barreau mais soit une section oblique orientée de telle sorte que le vecteur  $\mathbf{S}_1$  fasse un angle  $\theta$  avec l'axe du barreau. Il s'en suit que l'aire  $S_1 = S/\cos\theta$  est supérieure à l'aire  $S$ . Mais le flux de  $\mathbf{j}$  à travers cette surface reste identique. Le produit scalaire  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{S}_1$  reste égal à  $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$ .

Ainsi l'intensité du courant électrique est une grandeur scalaire. Pour la définir, il faut se donner un circuit orienté fermé supportant une surface orientée. L'intensité de courant est la quantité de charge qui franchit la surface par unité de temps.

#### I-4 Exemple d'intensité à travers un circuit

Reprenons l'exemple d'un cylindre au sein duquel règne une densité de courant  $\mathbf{j}$  uniforme. Représentons une coupe perpendiculaire vue de dessus.



Le cercle en trait gras délimite le pourtour extérieur du cylindre.  $\mathbf{j}$  représente le vecteur densité de courant. Il est supposé uniforme dans tout le conducteur.

Sur le pourtour extérieur du cylindre, nous avons figuré un circuit orienté ( $C_1$ ) auquel correspond un vecteur surface  $\mathbf{S}_1$  perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant.

Déterminons l'intensité du courant qui traverse ( $C_1$ ).  $I_1$  est simplement le produit de la surface  $S_1$  et de  $j$ .  $I_1 = j S_1$ .

Nous avons aussi représenté deux circuits ( $C_2$ ) et ( $C_3$ ).

Puisque la densité de courant sur la surface externe au conducteur est nulle, l'intensité de courant qui traverse ( $C_2$ ) est identique à celle qui traverse ( $C_1$ ).

$I = I_1 = I_2$  est ce que l'on appelle communément l'intensité qui parcourt le conducteur.

L'intensité de courant qui traverse ( $C_3$ ) est de toute évidence égale à  $I_3 = j S_3$ . Cette intensité est le flux de  $\mathbf{j}$  à travers  $\mathbf{S}_3$ .  $I_3$  est inférieure à  $I$ .

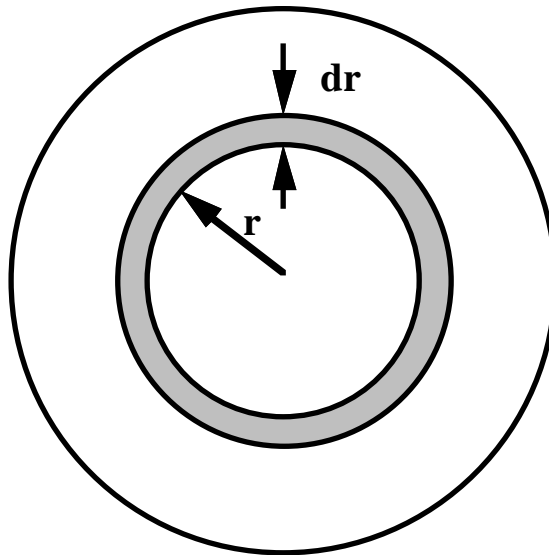
#### I-5 Densité de courant non uniforme et intensité de courant

Dans l'exemple vu ci-dessus, la densité de courant a été supposée uniforme. En fait dans un métal, la densité de courant  $\mathbf{j}$  peut ne pas être constante, si par exemple la résistivité du métal n'est pas uniforme.

Supposons simplement que la densité de courant varie avec la distance à l'axe du cylindre selon une loi  $j(r)$ .

Puisque tous les points situés à la distance  $r$  de l'axe central sont parcourus par la même densité de courant  $j(r)$ , la contribution de la partie hachurée à l'intensité  $I$  du fil est:

$$dI = j(r)2\pi r dr$$



et l'intensité totale qui parcourt le fil de rayon R est :

$$I = \int_0^R j(r) 2\pi r dr$$

## II Lois d'écoulement des charges électriques

### II-1 Etablissement d'un courant continu dans un supraconducteur

Plongé dans un champ électrique constant,

$$E = \frac{V_A - V_B}{L}$$

où L est la longueur du fil aux extrémités duquel les potentiels  $V_A$  et  $V_B$  sont maintenus, chaque électron de charge  $q = -e$  est soumis à une force  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  et obéit à la loi fondamentale de la dynamique:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Puisque la dérivée de la vitesse est constant (mouvement uniformément accéléré), la vitesse obéit à l'équation:

$$\mathbf{v} = \frac{q}{m} \mathbf{E} t + \mathbf{v}_0$$

où  $\mathbf{v}_0$  est la vitesse initiale des électrons qui ici se trouve être nulle.

la densité de courant s'écrit alors:

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v} = \frac{n q^2}{m} \mathbf{E} t$$

ce qui signifie que la densité de courant et donc l'intensité du courant croissent linéairement avec le temps.

Vous savez que ce n'est pas vrai. En effet, si à l'aide d'un générateur vous établissez une différence de potentiel entre les extrémités d'un fil, l'intensité du courant est constante et suit la loi  $U=RI$ . Vous avez par exemple mesuré qu'un fil de cuivre de 10m de longueur, de  $0.1\text{mm}^2$  de section soumis à une différence de potentiel de 1V était parcouru par un courant constant de 0.17A.

En fait, si la croissance linéaire de l'intensité du courant électrique n'est pas observée sur le cuivre, elle est vérifiée sur le niobium en dessous de 10K ou sur un alliage d'yttrium, de baryum, de cuivre et d'oxygène (YBaCuO) en dessous de 90K. Ces matériaux sont à ces températures des supraconducteurs. Pour stopper l'accroissement du courant, il est nécessaire

de supprimer la différence de potentiel. Les électrons ne sont plus soumis à aucune force et poursuivent leur déplacement à vitesse constante sans le moindre freinage. On peut ainsi faire circuler indéfiniment un courant dans un anneau supraconducteur fermé dans lequel on a lancé le courant.

## II-2 Etablissement d'un courant dans un conducteur résistif

Dans les cas qui restent malheureusement usuels, la suppression de la différence de potentiel et donc du champ électrique interne conduit à la disparition instantanée du courant.

Cela signifie donc que les électrons sont soumis à des forces de frottement. Les frottements proviennent des interactions avec les ions positifs ou avec les impuretés contenues dans le métal.

La forme la plus simple de force de frottement est  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ . C'est une force opposée au sens de déplacement et proportionnelle à la vitesse.

Sous l'effet de la force électrique et de la force de frottement, la relation fondamentale de la dynamique devient:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - k\mathbf{v}$$

et la vitesse obéit à l'équation différentielle suivante:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\mathbf{v} = q\mathbf{E}$$

qui est une équation différentielle à coefficients constants avec second membre.

La solution est la somme:

- de la solution de l'équation sans second membre:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} e^{-\left(\frac{a}{m}\right)t}$$

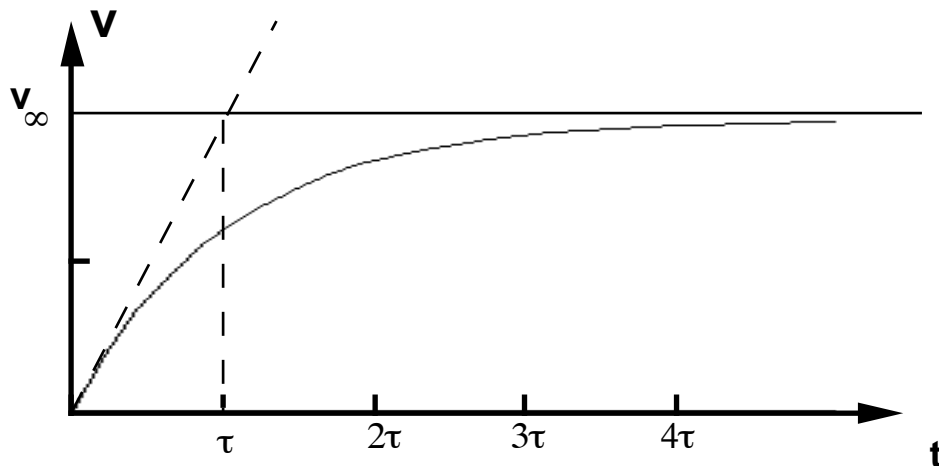
- et d'une solution particulière:

$$\mathbf{v}_{\infty} = \frac{q}{k} \mathbf{E}$$

La constante étant déterminée par la condition initiale: à  $t=0$ ,  $v=0$ , il vient:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

où  $\tau = m/k$  est une constante de temps caractéristique.



lorsque  $t \ll \tau$  l'argument de l'exponentielle est très petit devant 1 et par développement limité (pour  $\epsilon$  petit  $e^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon$ )

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\infty} \left( \frac{t}{\tau} \right)$$

Lorsque  $t \gg \tau$  l'exponentielle tend vers 0 et  $v$  tend vers sa vitesse limite  $v_{\infty}$   
 $v$  est en fait très proche de  $v_{\infty}$  lorsque  $t$  est supérieur à 3 ou 4 $\tau$ .

La densité de courant est alors:

$$\mathbf{j} = \frac{n q^2}{k} \mathbf{E} = \frac{n q^2 \tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho_e} \mathbf{E}$$

où  $\sigma$  est une grandeur caractéristique du matériau appelée conductivité électrique. Son inverse  $\rho_e$  est la résistivité électrique.

L'intensité du courant électrique s'écrit:

$$I = j S = \frac{S}{\rho_e} E = \frac{S}{\rho_e} \frac{V_A - V_B}{L}$$

note:

La résistivité électrique se note généralement  $\rho$ . Nous l'avons notée  $\rho_e$  afin d'éviter toute confusion avec la densité de charge volumique notée elle aussi  $\rho$ .

### **III La résistance électrique**

#### **III-1 Définition**

La formule donnant l'intensité du courant se réécrit:

$$V_A - V_B = \frac{\rho_e L}{S} I = R I$$

$R$  est déduit de la connaissance du courant et de la différence de potentiel. Ainsi de la connaissance de la résistance  $R$  et des dimensions géométriques du fil on peut déduire la résistivité  $\rho_e$  du matériau. Connaissant  $\rho_e$ , la charge de l'électron et sa masse on en déduit  $k$  et  $\tau$ .

*A l'aide des valeurs numériques données ci-dessus, déterminer la résistivité du cuivre et montrez que pour ce métal  $\tau$  est de l'ordre de  $10^{-14}$ s. Déterminer la vitesse  $v$  de déplacement des électrons.*

Cette très faible valeur de  $\tau$  dans les métaux montre pourquoi l'évolution du courant lors de l'établissement de la différence de potentiel n'est pas observable. L'intensité du courant atteint quasi instantanément sa valeur limite.

#### **III-2 La force électromotrice**

Considérons un circuit contenant un générateur maintenant entre les extrémités d'un fil métallique une différence de potentiel  $V = V_A - V_B$ . Les électrons circulent dans le métal sous l'effet du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de la force  $\mathbf{F}$  avec:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}$$

Dans la dernière expression, nous avons remplacé  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{F}/q$  où  $F$  est la force qui s'applique sur les charges  $q$ .

Sans doute parce que la force intervient à ce niveau et par abus de langage, on note  $V$  la force électromotrice entre  $A$  et  $B$ . Dans les circuits électriques, elle est souvent notée  $E$  et ne doit pas être confondue avec un champ électrique.

Ainsi la force électromotrice entre  $A$  et  $B$  apparaît comme la circulation, entre ces points, de la force rapportée à la charge, qui s'applique sur les charges mobiles et assure leur mouvement.

Il faudra bien se souvenir de cette définition lors de l'étude de l'induction et de la force électromotrice induite.



### III-3 Résistance électrique et loi de Joule

Comme nous l'avons vu plus haut, les forces de frottement conduisent à une vitesse limite de déplacement des électrons et les freinent en un temps de  $10^{-14}$  s lors de la suppression du champ électrique. En régime continu, elles provoquent un dégagement de chaleur.

La puissance dissipée par chaque électron est:

$$p = - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = k v^2 = \frac{k}{n^2 q^2} j^2$$

soit par unité de volume (on multiplie par la densité électronique):

$$P = n \frac{k}{n^2 q^2} j^2 = \rho_e j^2$$

et pour l'ensemble du fil: (on multiplie par  $LS$  le volume total du fil):

$$W = R I^2$$

C'est la loi de Joule.

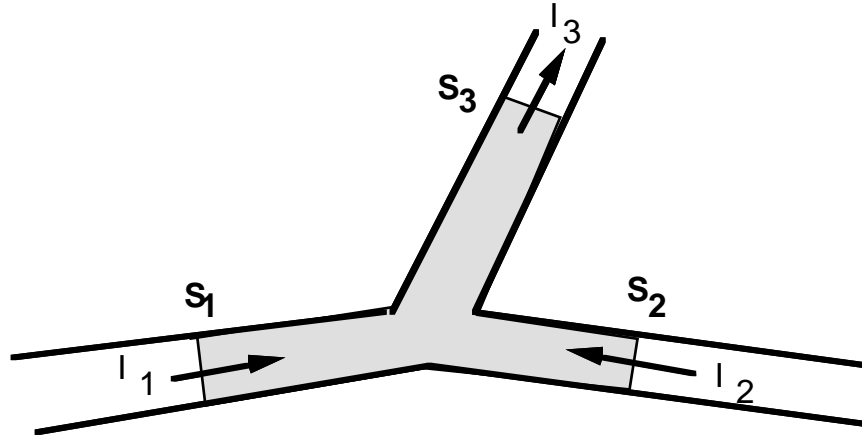
La chaleur dissipée dans un conducteur électriques est due aux forces de frottement des électrons lors de leur déplacement.

## IV Calculs de circuits électrique

Ce paragraphe ne constitue qu'un rappel de ce que vous avez déjà vu sur les circuits électriques simples. Nous proposons en IV-4, et sans la justifier, une méthode de résolution systématique des circuits complexes. Vous pouvez trouver de longs développements dans des livres d'électricité plus spécialisés.

### IV-1 Loi des noeuds

Un circuit électrique simple est composé de générateurs et de résistances. Ces éléments forment un réseau où apparaissent des branches et des noeuds. Une succession de branches formant un circuit fermé est appelée une maille.



Les force électromotrices des générateurs et les résistances de chaque branche étant données, les intensités peuvent être calculées à l'aide de deux lois simples appelées 1<sup>re</sup> et 2<sup>ème</sup> lois de Kirchhoff ou loi des noeuds et loi des mailles.

La première des lois est une loi de conservation. Un volume entourant un noeud et tel que celui limité ci-dessous par les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  n'est le siège d'aucune accumulation de charges. Cela signifie que, pendant l'unité de temps, il y a autant de charges pour entrer dans ce volume que pour en sortir.

Puisque la quantité de charge traversant les surfaces limitant le volume est égale au produit du temps et de l'intensité du courant, il s'en suit pour l'exemple ci dessus:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

La somme des intensités des courants entrants est égale à la somme des intensités des courants sortants.

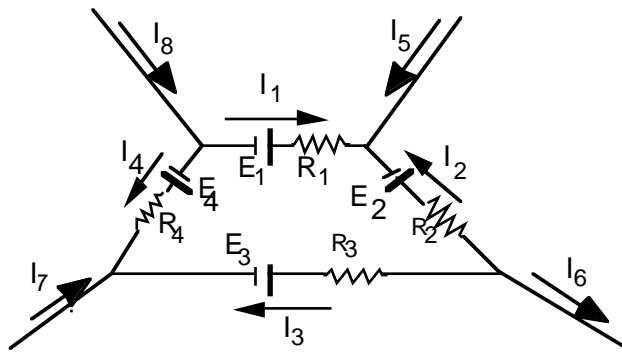
Si par convention, on choisit comme positif de courant le courant se déplaçant vers un noeud, la loi des noeuds s'écrit:

$$\sum_k I_k = 0$$

#### IV-2 Loi des mailles

La loi des mailles constitue la synthèse de trois propriétés:

- Un générateur maintient entre ses bornes une différence de potentiel  $E_i$  (ne pas confondre  $E_i$  avec un champ électrique  $E_i$  qui est ici une force électromotrice)
- La différence de potentiel entre les bornes d'une résistance est égale à  $RI$ .
- La somme des différences de potentiel d'un circuit fermé est nulle.



En choisissant un sens de parcours positif de la maille, selon lequel les courants sont orientés et en plaçant les générateurs de telle sorte que le sens choisi comme positif l'atteint par la borne - (la plus petite sur le schéma), on a pour chaque maille:

$$\sum_k (R I_k - E_k) = 0$$

Si dans une branche le courant se trouve être orienté en sens contraire du sens de parcours, on fait précéder  $RI_k$  du signe - et si le sens positif du parcours atteint le générateur par la borne positive, on fait précéder  $E_k$  du signe +.

### V-3 Principe de résolution d'un circuit.

On dispose d'un circuit complexe dont on a représenté une maille ci-dessous. La détermination des courants passe par 4 étapes:

-Définition d'un sens de courant arbitraire sur chaque branche. (Si le résultat final de courant est positif, c'est qu'effectivement il circule dans ce sens, si le courant est trouvé négatif, c'est qu'il circule en sens opposé.

-Ecriture de la loi de conservation du courant à chaque nœud (loi des nœuds), soit au vu du schéma ci dessous:

$$I_8 - I_1 - I_4 = 0 \quad I_3 + I_4 + I_7 = 0 \quad -I_6 - I_3 - I_2 = 0 \quad \text{etc.}$$

-Définition d'un sens de parcours positif sur chaque maille. (cercle fléché de la figure).

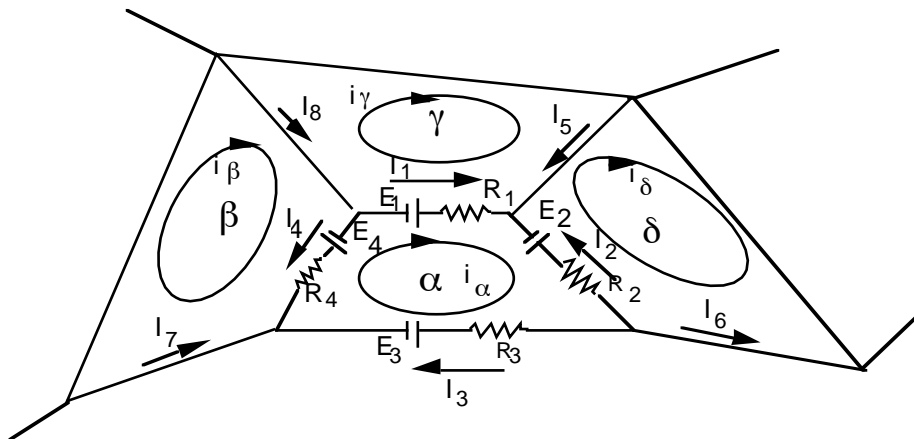
-Ecriture la loi des mailles de pour chacun d'eux, soit ici:

$$-E_1 + R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_3 - R_4 I_4 + E_4 = 0$$

-Résolution du système d'équation

### V-4 Méthode des courants de maille

La résolution des circuits électrique telle qu' énoncée ci dessus est simple dans son principe. Elle peut néanmoins conduire à des calculs longs et pénibles, souvent à la suite d'un choix peu heureux d'élimination de variables.



Vous pourrez trouver dans les livres spécialisés plusieurs méthodes de résolution systématiques. Nous vous en proposons une, celle des courants de maille. Elle comporte 6 étapes:

i) Attribution à chaque branche d'un courant orienté  $I_1, I_2, I_3$ , etc.

ii) Définition et orientation des mailles indépendantes ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), etc.

iii) Affectation à chacune des mailles, d'un courant de maille fictif  $i_\alpha, i_\beta, i_\gamma$ , etc.

iv) Etablissement des relations entre les courants  $I$  et les courant de maille  $i$ . Par exemple:

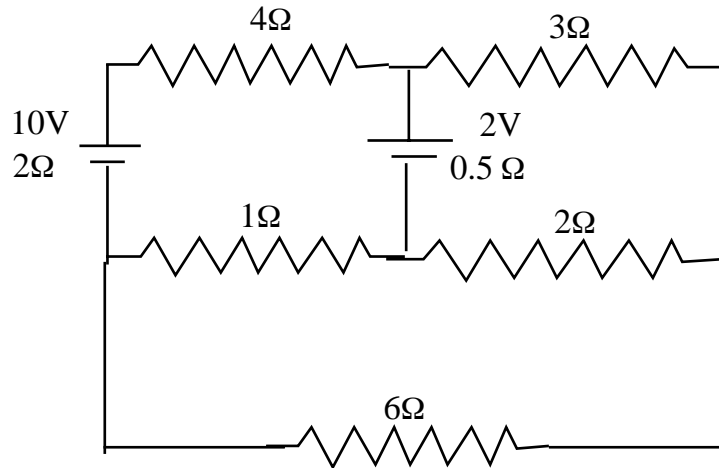
$$I_1 = i_\alpha - i_\gamma \quad I_2 = -i_\alpha + i_\delta \quad I_3 = i_\alpha \quad I_4 = i_\beta + i_\alpha$$

v) Ecriture de la loi des mailles et remplacement des  $I$  par leurs expressions en  $i$ :

$$\begin{aligned} -E_1 + R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_3 - R_4 I_4 + E_4 &= 0 \\ -E_1 + R_1 (i_\alpha - i_\gamma) - E_2 - R_2 (-i_\alpha + i_\delta) + \dots &= 0 \end{aligned}$$

vi) Résolution des  $N$  équations à  $N$  inconnues donnant les  $i$  et déduction des  $I$ .

C'est une méthode systématique, d'autant plus simple que vos machines à calculer résolvent directement les équations linéaires. La difficulté est de choisir le bon nombre de mailles indépendantes. Il est fonction du nombre de noeuds et de branches.....mais ça devient une affaire de spécialiste. Dans les cas que nous traiterons il sera assez évident.



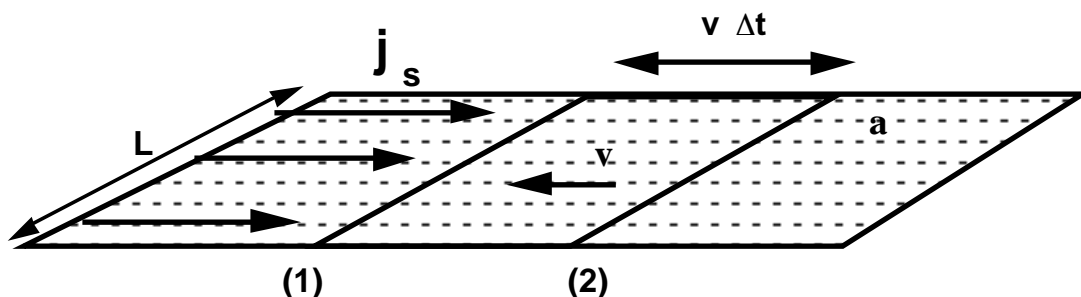
Déterminer à l'aide de cette méthode les courants circulant dans les différentes branches du circuit ci dessus.

## VI Courants surfaciques

Nous avons vu plus haut que l'intensité du courant électrique est liée au déplacement de charges et se définit comme la quantité de charge qui franchit une surface par unité de temps.

En fait, pour être plus précis, nous aurions dû parler de courants volumiques puisque ce sont des charges de volume qui se déplaçaient. Nous avons défini le vecteur densité de courant (volumique) comme le produit de la densité de charge volumique  $\rho$  et de leur vitesse  $\mathbf{j} : \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ .

Nous savons cependant que les charges peuvent être localisées en surface avec densité  $\sigma$ . Le déplacement de ces charges conduit à un nouveau courant dit courant surfacique.



Le courant surfacique est égal à la quantité de charge qui traverse une ligne  $L$ , définie dans le plan des charges, pendant l'unité de temps. La ligne  $L$  vient se substituer à la surface  $S$  traversée par les courants volumiques (par simplicité, nous ne considérons que des lignes perpendiculaire au sens de déplacement des électrons).

Les  $dN$  électrons qui franchissent la ligne (1) pendant le temps  $\Delta t$  sont ceux qui étaient contenus à l'instant  $t$  dans le rectangle délimité par les lignes (1) et (2) séparées de  $l = v_s \Delta t$ .

Leur nombre est égal à  $dN = n_s L v_s \delta t$

et la charge traversée  $dQ = n_s q L v_s dt = \sigma v_s L dt$ .

L'intensité de courant surfacique est  $I = \sigma v_s L$

et le vecteur densité de courant surfacique est défini par:

$$\mathbf{j}_s = n_s q \mathbf{v}_s = \sigma \mathbf{v}_s$$

Il faut bien noter que si les courants volumiques traversaient des surfaces, les courants surfaciques traversent des lignes.



## CHAPITRE VIII

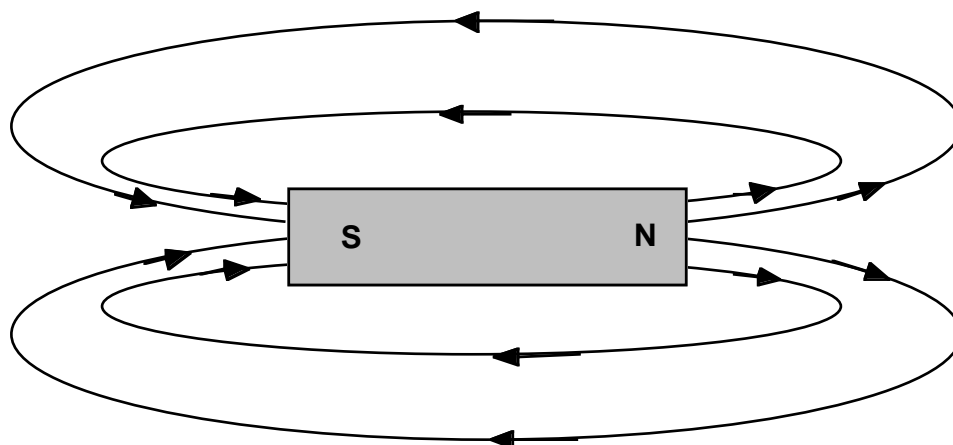
### Le champ magnétique

#### I Les aimants

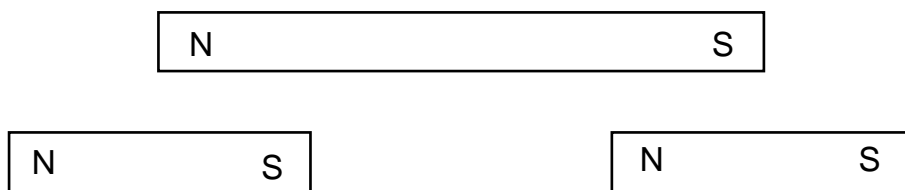
##### I-1 Les aimants sources de champ magnétique

On distingue deux types de sources de champ magnétique: les aimants et les circuits électriques parcourus par des courants.

Un aimant est caractérisé par un pôle nord et un pôle sud. Les lignes de champ magnétique  $\mathbf{B}$  se dirigent du pôle nord vers le pôle sud.



Les pôles d'un aimant sont indissociables. L'aimant brisé produit deux aimants avec chacun son pôle nord et son pôle sud. C'est une différence fondamentale avec l'électrostatique. On ne peut isoler et manipuler indépendamment des entités qui seraient de type plus et des entités qui seraient du type moins.



##### I-2 Interaction entre les aimants

Des pôles de nature différentes s'attirent alors que des pôles de même nature se repoussent.

De façon générale un aimant s'oriente dans un champ magnétique de telle sorte que la direction sud-nord de cet aimant soit dans la direction du champ magnétique local et donc des lignes de champ créées par les autres aimants.

*Où le pôle nord magnétique de la terre se trouve-t-il?*

## II Champ magnétique créé par les courants: loi de Biot et Savart

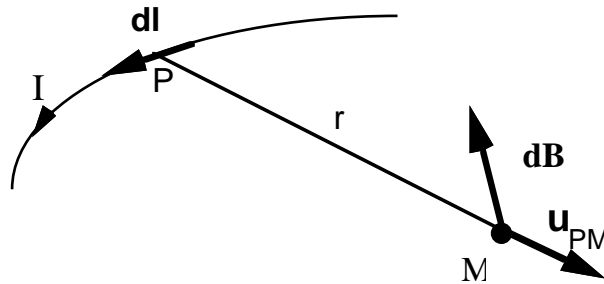
### II-1 Loi de Biot et Savart

Nous avons vu en électrostatique que la loi de Coulomb permettait de calculer en un point M les éléments de champ électrique  $d\mathbf{E}$  créés par les éléments de charge  $dq$  distribués dans l'espace.

La loi équivalente de la magnétostatique doit nous permettre de déterminer en chaque point M de l'espace les éléments de champ magnétique  $d\mathbf{B}$  créés par les éléments de courant  $d\mathbf{l}$  distribués dans tout l'espace. C'est la loi de Biot et Savart.

Dans un cas comme dans l'autre, le champ total est obtenu en effectuant par intégration la somme des éléments de champ.

Considérons au voisinage du point P un élément de circuit  $d\mathbf{l}$  parcouru par un courant I. Le vecteur  $d\mathbf{l}$  est orienté dans le sens de circulation du courant. Soit r la distance séparant l'élément  $d\mathbf{l}$  du point M où l'on cherche à déterminer le champ magnétique. Soit  $\mathbf{u}_{PM}$  le vecteur unitaire parallèle au vecteur  $\mathbf{PM}$ .



La loi de Biot et Savart nous enseigne que l'élément de champ magnétique  $d\mathbf{B}$  créé au point M par l'élément de fil  $d\mathbf{l}$  parcouru par le courant I s'écrit:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_{PM}}{4 \pi r^2}$$

En vertu du principe de superposition des champs magnétiques, le champ total créé par l'ensemble des circuits contenus dans l'espace s'écrit:

$$\mathbf{B} = \int_{\text{Circuits}} \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}}{4 \pi r^2}$$

Une telle écriture vectorielle est formelle. Elle est équivalente à trois relations semblables, une par composante.

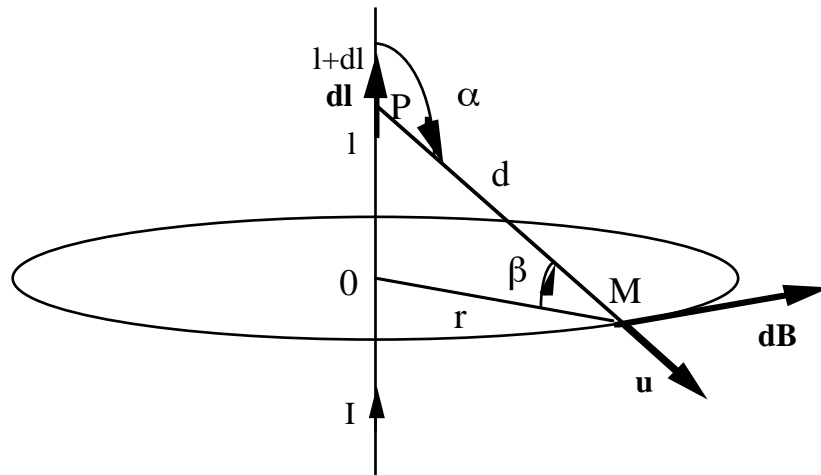
Si  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  sont les composantes de  $d\mathbf{l}$ , et  $u_x$ ,  $u_y$ , et  $u_z$  celles de  $\mathbf{u}$ ,  $B_x$  prend la forme:

$$B_x = \int_{\text{Circuits}} \frac{\mu_0 I (u_z dy - u_y dz)}{4 \pi r^2}$$

Il s'agit d'une intégration le long de circuits, ce qui implique que  $dy$  et  $dz$  ne sont pas indépendants. Le calcul nécessite donc un paramétrage que l'on effectuera cas par cas, au vu des symétries du problème.



## II-2 Champ magnétique créé par un fil rectiligne



Considérons un fil rectiligne vertical parcouru par un courant  $I$ .

Soit un élément de fil  $d\mathbf{l}$  situé autour du point  $P$  entre les cotes  $l$  et  $l+dl$ .

Cet élément, comme toute autre partie du fil, crée en  $M$  un élément de champ  $d\mathbf{B}$  tangentiel au cercle de rayon  $OM$ . Cela signifie que dans un repère cylindrique les composantes totales  $B_r$  et  $B_z$  de  $\mathbf{B}$  sont nulles.

Seule la composante  $B_\theta$  est différente de 0. Soit:

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I dl \cos \beta}{4 \pi d^2}$$

(en effet  $\sin \alpha = \cos \beta$ )

Pour sommer tous les éléments de champ, il faut tenir compte du fait que  $l$  et  $\beta$  ne sont pas indépendants mais sont liés par la relation:  $l = r \tan \beta$  soit  $dl = \frac{r}{\cos^2 \beta} d\beta$

Puisque  $r^2 = d^2 \cos^2 \beta$ , on arrive à:

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I \cos \beta d\beta}{4 \pi r}$$

Pour un fil infini, on intègre  $\beta$  de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ :

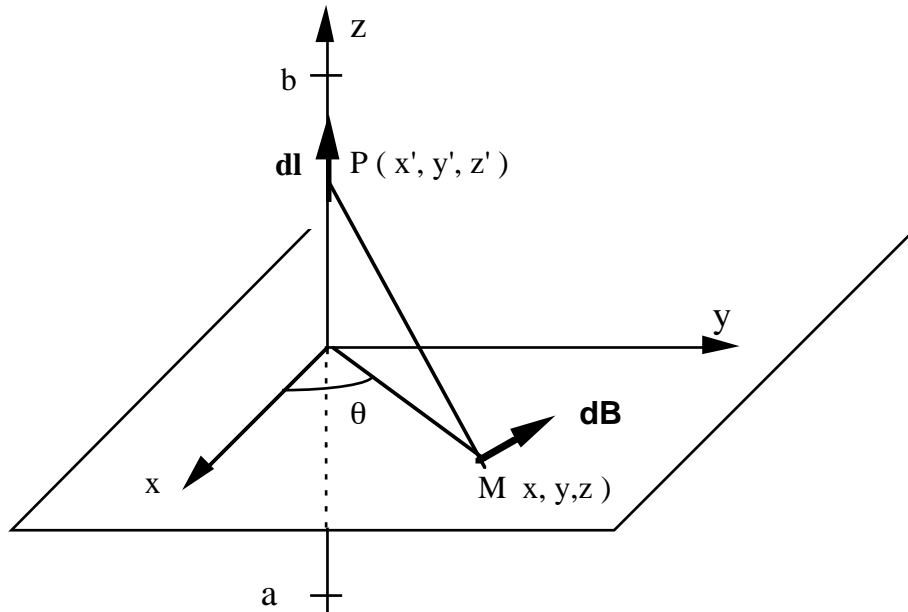
$$B_\theta = \int_{\beta = -\pi/2}^{\beta = +\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \beta d\beta}{4 \pi r} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi r} [\sin \beta]_{\beta = -\pi/2}^{\beta = +\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

On retrouve ainsi l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne que vous avez rencontré en classe de terminale.

Nous pouvons déterminer par la même méthode, en modifiant seulement les bornes d'intégration, le champ magnétique créé par un fil linéaire de longueur finie.

## II-3 Autre façon de calculer le champ magnétique créé par un fil

Nous allons maintenant déterminer le champ magnétique créé par un fil de longueur finie en utilisant l'expression cartésienne de la loi de Biot et Savart.



Les composantes des vecteurs entrant dans cette relation sont:

$$\mathbf{dl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_{PM}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z' \end{pmatrix} \quad \mathbf{dl} \wedge \mathbf{u_{PM}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \begin{pmatrix} -ydz' \\ xdz' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et on a pour la composante de **B** selon 0x:

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \frac{-y dz'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}}$$

x et y sont les coordonnées de M, point en lequel on cherche le champ magnétique, ils sont donc fixes avec  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Le seul paramètre est z' sur lequel on peut faire porter l'intégration de a à b.

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_a^b \frac{-y dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = -y \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \left[ \frac{z'}{r^2 \sqrt{r^2 + z'^2}} \right]_{z'=a}^{z'=b}$$

La limite du fil infini est obtenue en faisant tendre a vers - infini et b vers + infini soit:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \frac{-y}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \sin \theta, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \frac{x}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \cos \theta, \quad B_z = 0$$

ce qui montre bien que le champ magnétique est radial.

### III Le potentiel vecteur

#### III-1 Définition

Nous avons vu en électrostatique que le champ électrique dérivait d'un potentiel  $V(r)$  par  $\mathbf{E} = -\text{grad}V$ . Nous nous étions fortement réjouis de cette propriété qui nous permettait de calculer le champ électrique par le biais d'une grandeur scalaire souvent plus facile à déterminer. Nous avons vu ensuite le rôle de cette grandeur dans le calcul du travail des forces électriques et dans celui de l'énergie potentielle.

Un tel potentiel scalaire n'existe malheureusement pas en magnétostatique.

Il existe par contre un champ de vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  à partir duquel le champ magnétique peut être déduit par la relation:

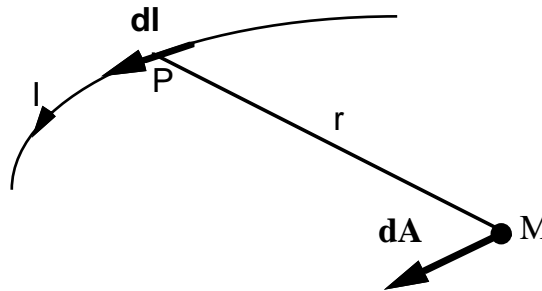
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Le champ de vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  est appelé potentiel vecteur.

#### III-2 calcul du potentiel vecteur

Un élément de fil  $d\mathbf{l}$  situé au voisinage du point P, parcouru par un courant I, produit au point M un élément de potentiel vecteur  $d\mathbf{A}$  défini par:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}}{r}$$



Le potentiel vecteur est obtenu par intégration des éléments  $d\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{d\mathbf{l}}{r}$$

Du point de vue pratique,  $\mathbf{A}$  semble plus simple à calculer que  $\mathbf{B}$  puisque l'expression de  $d\mathbf{A}$  ne contient pas de produit vectoriel. Il faut néanmoins faire suivre le calcul de  $\mathbf{A}$  de celui de son rotationnel, ce qui peut être lourd. Le choix entre le calcul direct de  $\mathbf{B}$  et un calcul indirect via  $\mathbf{A}$ , se fera en général au vu des difficultés mathématiques rencontrées. Du point de vue physique et en particulier pour ce qui est de l'énergie, le potentiel vecteur joue un rôle similaire à celui du potentiel scalaire.

### III-3 Application au fil rectiligne

Vérifier que le champ de vecteur  $\mathbf{A}(x,y,z)$  tel que  $A_x=0$ ,  $A_y=0$  et  $A_z=-\mu_0 I/4\pi \ln(x^2+y^2)$  est le potentiel vecteur du champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant dirigé suivant oz.

### III-4 La divergence de $\mathbf{B}$

Si vous reprenez les définitions de la divergence et du rotationnel, vous vous apercevrez facilement que la divergence du rotationnel d'un vecteur est toujours nulle. Puisque  $\mathbf{B}$  est un rotationnel:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \Rightarrow \text{div } \mathbf{B} = 0$$

C'est une nouvelle équation locale. Notons que si la divergence de  $\mathbf{B}$  est toujours nulle, c'est que son flux à travers une surface fermée est nulle (revoir pour cela la démonstration de la forme locale du théorème de Gauss):

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Il s'ensuit qu'un champ de vecteur ne peut pas représenter un champ magnétique si sa divergence n'est pas nulle.

### III-5 Exemple

Vérifier que la divergence du champ magnétique créé par un fil infini est nulle.

## IV- Champs électriques et champs magnétiques

$\text{div } \mathbf{B} = 0$  est à rapprocher de:  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . La divergence de  $\mathbf{B}$  est nulle parce que  $\mathbf{B}$  dérive d'un potentiel vecteur.

Le rotationnel de  $\mathbf{E}$  est nul parce que  $\mathbf{E}$  dérive d'un potentiel scalaire.

On peut résumer les propriétés des champs électriques et magnétiques en relation avec les potentiels dont ils découlent par le tableau ci-dessous:

	Electrostatique	Magnétostatique
Relation avec le potentiel	$\mathbf{E} = -\text{grad } V$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
Equation locale	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
Forme intégrale	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Ce tableau sera complété par un second tableau indiquant les relations dues au fait que les champs décroissent en  $1/r^2$ .

## CHAPITRE IX

### Théorème d'Ampère

#### I Théorème d'Ampère

##### I-1 Illustration du théorème d'Ampère sur un cas très particulier

Nous avons vu en électrostatique que l'élément de circulation du champ électrique  $\mathbf{E}$  sur un élément de chemin  $d\mathbf{l}$  se définissait par:

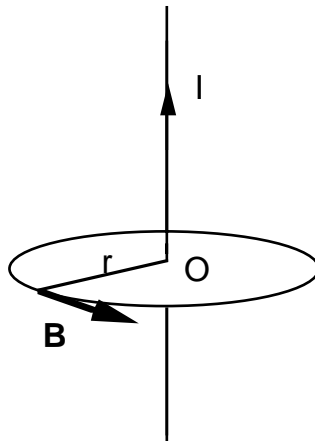
$$\delta C = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

De la même façon, nous définissons un élément de circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  par:

$$\delta C = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

La circulation totale en suivant une ligne ( $\Gamma$ ) s'écrit:

$$C = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$



Considérons le chemin  $\Gamma$  fermé, constitué du cercle de centre O et de rayon  $r$  orienté comme indiqué sur la figure ci-dessus. En chaque point du cercle,  $\mathbf{B}$  et  $d\mathbf{l}$  sont colinéaires et de même sens. L'élément de circulation est donc simplement  $\delta C = B \cdot dl$ .

Puisque  $B$  est constant sur tout le cercle et ne dépend que du rayon  $r$ , la circulation totale du champ magnétique sur le cercle est  $2\pi r B(r)$ .

Vu l'expression de  $B(r)$ , la circulation le long du cercle s'écrit:

$$C = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

La circulation de  $\mathbf{B}$  est indépendante du rayon du cercle. Elle est égale au produit de  $\mu_0$  par le courant  $I$

#### IV-2 Origine du théorème d'Ampère.

L'origine du théorème d'Ampère apparaît nettement sur ce cas particulier. Il tient au fait que le champ créé par un fil décroît comme  $1/r$  alors que le périmètre du cercle sur lequel on effectue la circulation de  $\mathbf{B}$  croît comme  $r$ . Le produit de  $B$  et du périmètre du cercle est constant.

Or, si on remonte un peu plus haut, la décroissance en  $1/r$  du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini est la conséquence directe de la décroissance en  $1/r^2$  qui apparaît dans la loi de Biot et Savart.

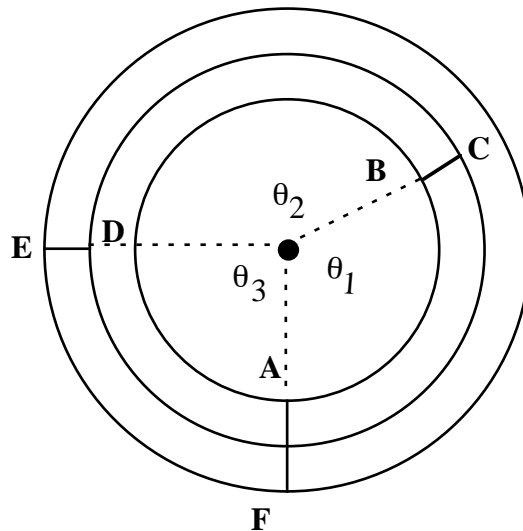
Le théorème d'Ampère est en magnétostatique le pendant de ce qu'est le théorème de Gauss en électrostatique. Tous deux tiennent au fait que les champs décroissent en  $1/r^2$  avec la distance qui les sépare de leur source.

Comme nous avons généralisé le théorème de Gauss à une surface et à une distribution de charges quelconque, nous allons généraliser le théorème d'Ampère à un circuit et à une distribution de courants quelconque.

#### IV-3) Théorème d'Ampère sous sa forme générale

Considérons le circuit fermé ABCDEFA dans un plan perpendiculaire au fil. AB est un arc de cercle de rayon  $r_1$  et d'angle  $\theta_1$ . BC (comme DE et FA) sont des segments radiaux. BD est un arc de cercle de rayon  $r_2$  et d'angle  $\theta_2$ . EF est un arc de cercle de rayon  $r_3$  et d'angle  $\theta_3$ .

Quelles que soient les positions de A,B,C,D,E ou F, la somme des angles  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ .



La circulation de  $\mathbf{B}$  sur un arc de cercle tel que AB est:

$$C_{AB} = r_1 \theta_1 B_1 = r_1 \theta_1 \mu_0 I / 2\pi \quad r_1 \theta_1 = \theta_1 \mu_0 I / 2\pi$$

De même:

$$C_{CD} = \theta_2 \mu_0 I / 2\pi \quad C_{EF} = \theta_3 \mu_0 I / 2\pi$$

La circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un rayon est nul puisque en chaque point  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire au déplacement:

$$C_{BC} = C_{DE} = C_{FA}$$

La circulation totale, somme des circulations élémentaires est égale à:

$$C = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \mu_0 I / 2\pi = \mu_0 I$$

Puisque une chemin quelconque d'un plan peut toujours être assimilé à une succession d'arcs de cercle et de segments radiaux, on peut dire que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur un circuit fermé contenu dans un plan perpendiculaire au fil et entourant le courant  $I$  est

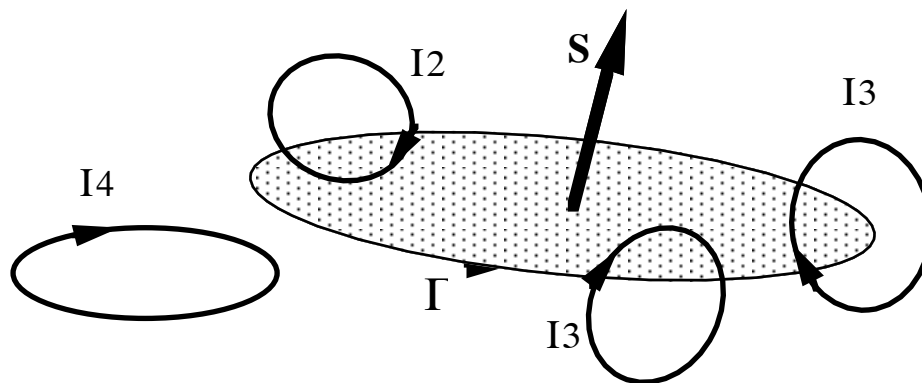
$\mu_0 I$ . On peut étendre cette propriété à un circuit non contenu dans le plan puisque la composante de  $\mathbf{B}$  suivant la direction du fil est nulle. Tout élément de circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un chemin parallèle à  $I$  est nulle.

En fait le théorème d'Ampère est beaucoup plus général. Il s'adresse à toute courbe fermée et est valable pour toute sorte de distribution de courant.

Il s'énonce ainsi:

La circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  le long d'une courbe fermée qui embrasse des courants  $I_1, I_2, I_3, \dots$  est égale à  $\mu_0 I$  où  $I$  est la somme algébrique des courants.

Les courants sont comptés positivement s'ils coupent la surface soutendue par le circuit selon le sens positif tel qu'il résulte de l'orientation du circuit fermé.



Soit le système composé d'un ensemble de circuits parcourus par les courants  $I_1, I_2, I_3, I_4$ .

Considérons un circuit d'Ampère (non physique)  $\Gamma$  orienté. Le sens positif du circuit  $\Gamma$  implique le sens positif de la surface (en gris) qui s'appuie sur le circuit orienté.

Les courants  $I_1, I_2, I_3$  coupent la surface qui s'appuie sur  $\Gamma$ . Les courants  $I_1$  et  $I_3$  sont comptabilisés positivement puisqu'ils coupent la surface fermée selon son sens positif et  $I_2$  est comptabilisé négativement puisqu'il traverse la surface dans le sens opposé. (Les points d'intersection entre la surface supportée par le circuit et les boucles de courant correspondent aux extrémités des flèches).

Remarque: la surface sous-tendue par le circuit ( $\Gamma$ ) est quelconque. Elle n'a nul besoin d'être plane. ( $\Gamma$ ) n'est d'ailleurs pas nécessairement lui-même contenu dans un plan.

## **II Application du théorème d'Ampère à la détermination d'un champ magnétique**

### II-1 Principe d'application du théorème d'Ampère

Si le théorème d'Ampère est toujours valable, il n'est de fait utilisable que dans des cas géométriques très particuliers.

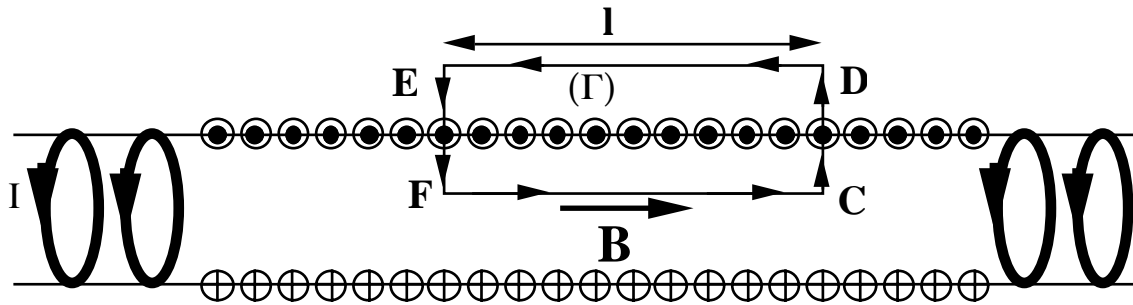
Il est essentiellement utilisable sur des circuits le long desquels  $\mathbf{B}$  est constant "par morceaux" et se trouve orienté le long du chemin ou perpendiculairement à ce chemin.

## II-2 Champ créé par un solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini à  $n_1$  tours/mètre, parcouru par un courant  $I$ .

Nous savons a priori et par suite de considérations de symétrie que, à l'intérieur du solénoïde, le champ  $\mathbf{B}$  est uniforme et orienté suivant l'axe. Nous savons par ailleurs que  $\mathbf{B}$  est nul à l'extérieur.

Considérons le circuit rectangulaire CDEF dont le sens de parcours est fléché. Suivant la règle du tire bouchon, la surface qui s'appuie sur ce circuit est orientée vers l'avant.



Appliquons le théorème d'Ampère à ce circuit:

La circulation du champ magnétique se réduit à  $B l$ :

Les circulations le long de CB et EF sont nulles puisque le champ magnétique est en tout point perpendiculaire au déplacement.

La circulation le long de DE est nulle puisque à l'extérieur le champ est nul.

Le long de FC,  $\mathbf{B}$  est orienté parallèlement au circuit et est orienté dans le même sens.

La somme des courants traversant la surface rectangle est  $n_1 l I$ . De plus, comme indiqué sur la figure, ils coupent la surface dans un déplacement vers l'avant, c'est à dire selon le sens positif de cette surface.

L'application du théorème d'Ampère conduit à:

$B \cdot l = \mu_0 n_1 I l$  soit  $B = \mu_0 n_1 I$ , ce qui est la formule bien connue du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini.

## III Théorème d'Ampère sous sa forme locale

### III-2 Forme locale du théorème d'Ampère

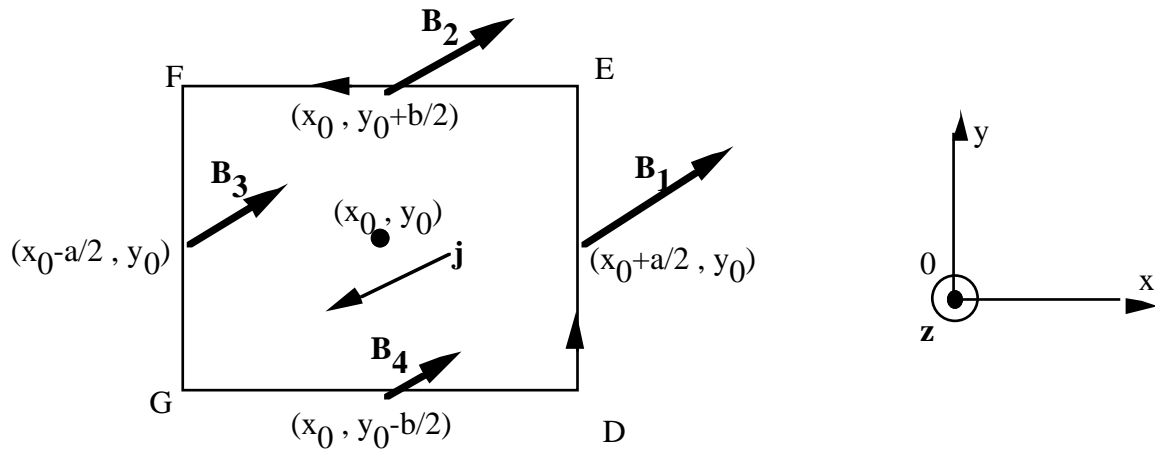
Considérons dans le plan  $xOy$  un circuit rectangulaire DEFG centré autour du point de composantes  $(x_0, y_0)$ . Les côtés du rectangle sont  $a$  et  $b$ .  $a$  et  $b$  sont infiniment petits.

Le champ électrique  $\mathbf{B}$  est noté  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$  sur les branches DE, EF, FG, GH du circuit.

Un courant, de densité de courant  $\mathbf{j}$  traverse ce cadre. Le vecteur  $\mathbf{j}$  a comme composante  $j_x, j_y, j_z$ .

Imposons un sens positif au circuit DEFG, ce qui revient à orienter la surface  $\mathbf{S}$  selon la règle du tire-bouchon. Telle qu'est fixée l'orientation du circuit, le vecteur surface  $\mathbf{S}$  est dirigé vers l'avant, c'est-à-dire vers les  $z$  positifs.





Ses composantes sont:  $\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{vmatrix}$

L'intensité de courant traversant le cadre est égale à  $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$  soit  $I = j_z ab$

Le théorème d'Ampère nous apprend que :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{EF} + \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} + \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{GE} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = \mu_0 j_z S$$

Déterminons  $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{FG}$

Puisque  $\mathbf{DE}$  est un vecteur de norme  $b$  orienté selon  $0y$ :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} = B_y(x_0 + a/2, y_0) b$$

Puisque  $\mathbf{FG}$  est un vecteur de norme  $b$  orienté selon  $-0x$ :

$$\mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} = -B_y(x_0 - a/2, y_0) b$$

$a$  étant petit, on peut déterminer  $B_y(x_0 + a/2, y_0)$  à partir de  $B_y(x_0, y_0)$  par le développement de Taylor:

$$B_y\left(x_0 + \frac{a}{2}, y_0\right) = B_y(x_0, y_0) + \frac{a}{2} \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De même:

$$B_y\left(x_0 - \frac{a}{2}, y_0\right) = B_y(x_0, y_0) - \frac{a}{2} \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

soit :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{DE} + \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{FG} = b a \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Le même raisonnement reproduit sur les éléments de chemin  $\mathbf{EF}$  et  $\mathbf{GH}$  conduit à:

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{EF} + \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{GD} = -b a \frac{\partial B_x}{\partial y}(x_0, y_0)$$

soit sur l'ensemble du circuit fermé et après simplification par  $S$ :

$$\mu_0 j_z = \left[ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right]$$

qui pour tout circuit infiniment petit se généralise à:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

C'est la forme locale du théorème d'Ampère. Dans le vide  $\mathbf{j}=0$  et:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0$$

### III-2 Théorème de Stokes-Ampère

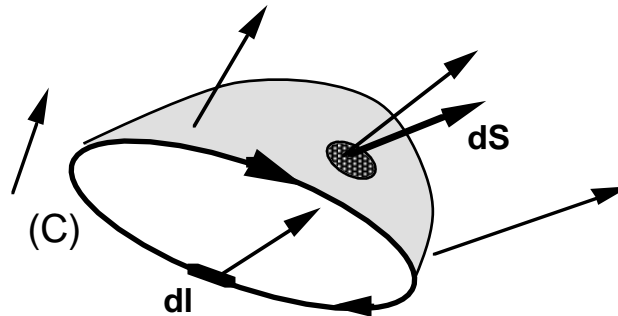
Nous venons de montrer que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur le circuit rectangulaire orienté était égal au flux de ce vecteur à travers la surface orientée s'appuyant sur le circuit.

C'est un résultat tout à fait général qui s'applique à tout champ de vecteur  $\mathbf{a}$ .

Soit un champ de vecteur  $\mathbf{a}$ .

Un circuit orienté (C)

Une surface orientée S s'appuyant sur le circuit.



Le théorème de Stokes-Ampère nous apprend que la circulation de  $\mathbf{a}$  le long d'un circuit (C) est égal au flux du rotationnel de  $\mathbf{a}$  à travers toute surface s'appuyant sur (C).

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

### III 3 Exemple d'application du théorème de Stokes-Ampère

Considérons le champ de vecteur défini par  $A_x=0$ ,  $A_y=0$ ,  $A_z=4x$ . Vérifier le théorème de Stokes-Ampère sur un circuit rectangulaire placé dans le plan (xOy), de côtés  $a=2$ ,  $b=3$ , centré en  $(x=1, y=0)$  et sur la surface plane que ce circuit définit.

## IV Franchissement d'une nappe de courant

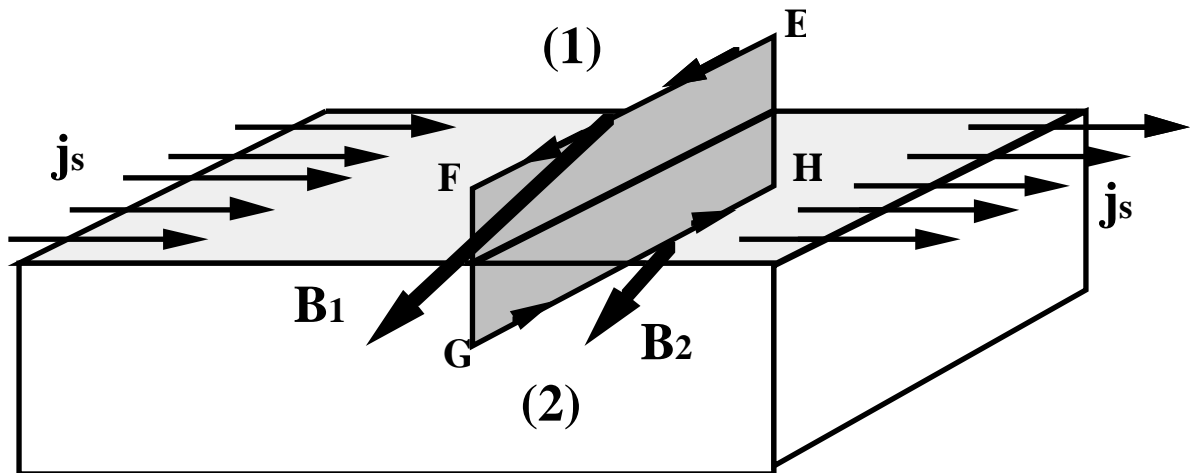
### IV -1 Discontinuité du champ magnétique lors de la traversée d'une nappe de courant.

C'est un problème très semblable à celui que nous avons abordé au chapitre IV. Nous avons montré que, lors de la traversée d'une surface chargée, la composante tangentielle du champ électrique était continue alors que la composante normale subissait une discontinuité égale à  $\sigma/\epsilon_0$ .

Nous allons montrer ici que lors de la traversée d'une nappe de courant, la composante normale du champ magnétique est continue alors que la composante tangentielle subit une discontinuité égale à  $\mu_0 \mathbf{j}_s$ .

Considérons un courant surfacique de densité  $\mathbf{j}_s$  s'écoulant sur la surface grisée de la figure ci-dessous.

Les champs magnétiques  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  en deux points infiniment proches situés de part et d'autre de la nappe de courant sont représentés par les flèches en trait gras. Ces champs magnétiques sont dus à la fois à la nappe de courant  $\mathbf{j}_s$  et à des courants externes à cette nappe situés relativement loin. Cela signifie que la modification de  $\mathbf{B}$  lors traversée de la nappe n'est due qu'à la nappe elle-même. La modification due aux autres courants est insignifiante puisque les courants sont loin et que les points (1) et (2) sont infiniment proches.



Appliquons le théorème d'Ampère au circuit EFGH orienté selon le sens indiqué. Pour simplifier la démonstration, nous avons choisi un circuit particulier placé perpendiculairement au vecteur densité de courant. Vu cette orientation, la surface grisée sombre est représentée par un vecteur  $\mathbf{S}$  de sens parallèle à  $\mathbf{j}_s$ .

Le théorème d'Ampère nous dit que la circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'une ligne fermée est égale au courant embrassé par ce circuit multiplié par  $\mu_0$ .

Le courant embrassé est dû au courant de surface. Ce courant entouré par le circuit est  $\mu_0 j_s L$  où  $L = EF = HG$ .

La circulation de  $\mathbf{B}$  sur les éléments de circuit FG et HE peut être considérée comme nulle car F et G sont infiniment proches; la distance  $FG = HE \approx 0$ .

Reste la circulation de  $\mathbf{B}$  sur les éléments EF et GH. Le théorème d'Ampère conduit à:

$$EF \cdot \mathbf{B}_1 + GH \cdot \mathbf{B}_2 = \mu_0 j_s L$$

Pour repérer les vecteurs, nous avons introduit un trièdre (Oxyz) direct, tel que la normale sortante  $\mathbf{n}_{21}$  soit orientée suivant l'axe des z, et la densité de courant  $\mathbf{j}_s$  suivant Oy.

$GH \cdot \mathbf{B}_2$  est égal à  $-B_{2t} L$  où  $B_{2t}$  est la composante de  $\mathbf{B}_2$  tangentielle à la surface le long de la ligne perpendiculaire au déplacement du courant de surface. C'est la composante de  $\mathbf{B}_2$  suivant Ox.

$EF \cdot \mathbf{B}_1$  est égal à  $+B_{1t} L$  où  $B_{1t}$  est la composante de  $\mathbf{B}_1$  tangentielle à la surface le long de la même ligne.

Soit après simplification:

$$B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 j_s$$

Dans le cas général où la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  n'est pas perpendiculaire au courant de surface, cette relation se généralise à:

$$\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t} = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{n}_{21}$$

$\mathbf{B}_{2t}$  et  $\mathbf{B}_{1t}$  sont les vecteurs projection de  $\mathbf{B}_2$  et  $\mathbf{B}_1$  sur la nappe de courant.  $\mathbf{n}_{21}$  est le vecteur unitaire, normale sortante dirigé de (1) vers (2).

*Vérifier que le cas particulier que nous avons considéré s'inscrit bien dans le cas général.*

## V Théorème de Gauss et théorème d'Ampère

Comme nous l'avons vu, ces théorèmes tiennent à la forme en  $1/r^2$  des champs électriques et magnétiques. Nous rassemblons ici leurs conséquences sous l'aspect global (forme intégrale), local et de franchissement de surface. Les discontinuités de champs électriques et magnétiques aux surfaces peuvent vous paraître un peu difficiles et lourdes. Elles joueront un rôle prépondérant dans les matériaux magnétiques et diélectriques. Un spécialiste d'ondes radio dans le vide pourrait les ignorer. Un ingénieur matériaux ne peut pas y échapper

Conséquence de la décroissance en $1/r^2$ des champs électriques et magnétiques		
	Electrostatique GAUSS	Magnétostatique AMPERE
Forme intégrale	$\oiint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i$
Forme locale	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$
Discontinuités (les autres composantes sont continues)	$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\mathbf{B}_{t2} - \mathbf{B}_{t1} = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{n}_{12}$