UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

COURS D'ELECTRICITE
MODULE PHYSIQUE 2
FiliÈRES SMPC

F. BENABDELOUAHAB

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

Préface.

Ce cours est un résumé d'électricité1 qui a été rédigé à l'intention des étudiants de première année de la licence dans les domaines des '' Sciences de la Matière Physique et Sciences de la Matière Chimie'' est conforme au programme officiel adopté dés l'entrée universitaire 2014-2015.
Le Module 8 «électricité1 » fait partie des cours enseignés en semestre 2, dont le programme se compose de trois parties essentielles :

Le chapitre I présente les notions et les calculs du champs et potentiel électriques crées par des charges électriques distinctes ou des distributions linières, surfaciques ou volumiques. Notion de la symétrie et application du théorème de Gauss.
L'étudiant, qui a déjà pris connaissance de certain de ces notions au lycée, doit les assimiler durant ce cours, à l'aide des outils mathématiques plus performant et des calculs plus avancés.

Le chapitre II présente les définitions et les lois régnantes dans le domaine des conducteurs en équilibre ou un système de conducteurs en équilibre et les méthodes des calculs des champs et potentiels dans ces cas.

Le chapitre III traite les lois et les théorèmes généraux de l'électrocinétique.
L'étudiant trouve à la fin du document des exemples d'exercices et contrôles des années passées.

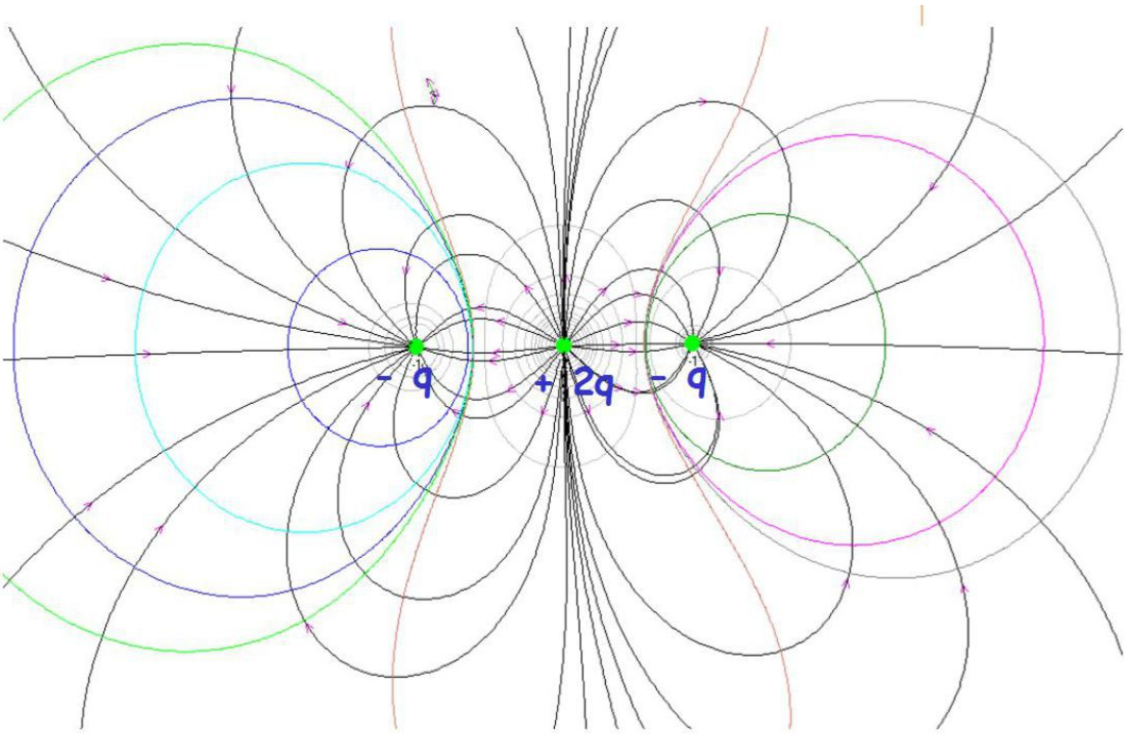
Il est possible que cette édition comporte quelques imperfections, nous serions reconnaissants à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions.

F. BENABDELOUAHAB

Table des matières

CH I

CHAMP ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE



A) <u>LOI DE COULOMB</u>

La charge électrique existe sous deux formes :

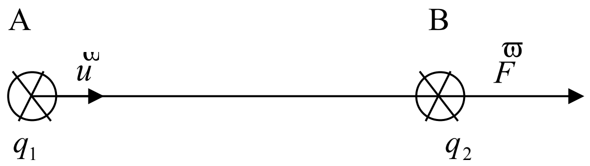
Charge positive

Charge négative.

En général les charges de même signe se repoussent et les charges de signes opposées s'attirent.

On peut mesurer la charge électrique portée par un corps en mesurant la force électrique qu'elle engendre.

$$\vec{F} = K.\frac{q_1 . q_2}{r^2}\vec{u} \text{ avec } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$



B) <u>DISTRIBUTION DE CHARGES ELECTRIQUES</u>.

On distingue trois types de distribution de charges électriques :

Charges ponctuelles

Distribution de charge linéaire (distribution linéique). Fig2.a

Distribution de charge surfacique. Fig2.b

Distribution de charge volumique. Fig2.c

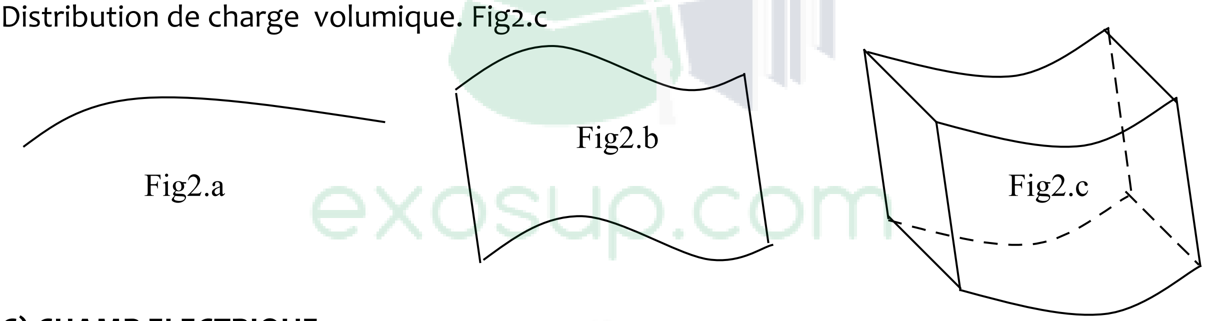


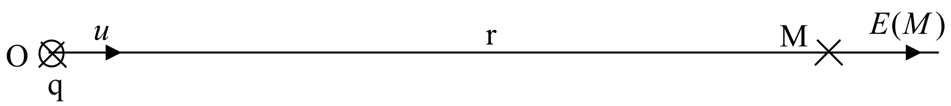
Fig2.a Fig2.b Fig2.c

C) <u>CHAMP ELECTRIQUE</u>

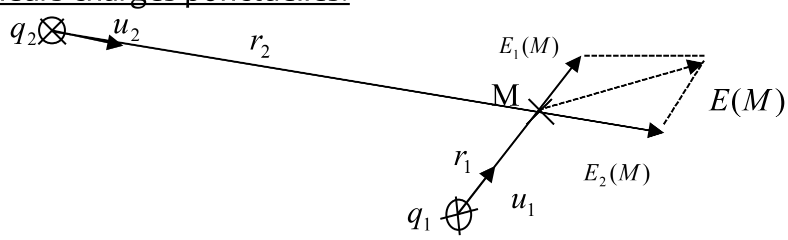
1) <u>Champ électrique cèe par une charge ponctuelle</u>

Une charge électrique ponctuelle au point O crée au point M à une distance r le vecteur champ électrique $\vec{E}$. L'expression de $\vec{E}$ est donnée par la formule suivante :

$$\vec{E}(M) = K.\frac{q}{(OM)^2}\vec{u} = K.\frac{q}{r^2}\vec{u}$$



2) <u>Champ électrique crée par plusieurs charges ponctuelles.</u>



$E(M) = E_1 + E_2$

. Le vecteur $E(M)$ est la résultante des vecteurs E_1 et E_2.

$\vec{E}_1(M) = K.\dfrac{q_1}{(O_1M)^2}\vec{u}_1$ et $\vec{E}_2(M) = K.\dfrac{q_2}{(O_2M)^2}\vec{u}_2$

3) Champ crée par une distribution de charges continue.

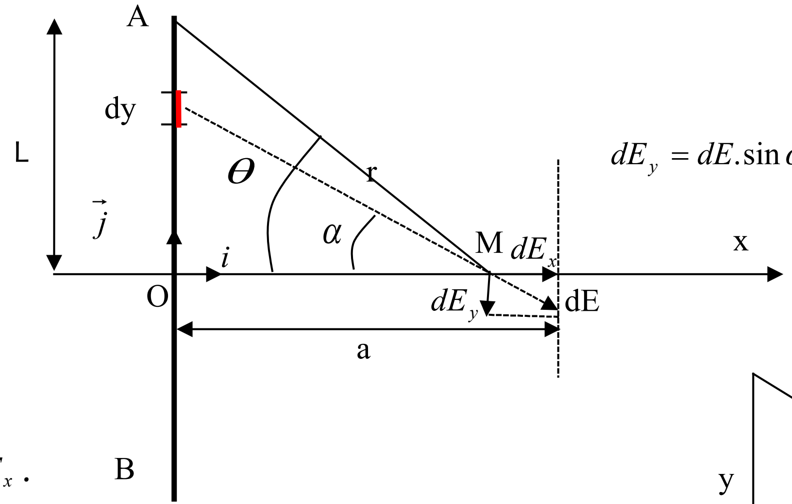
✧ **Champ crée par un fil uniformément chargé.**

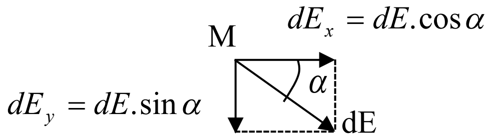
a) Champ crée par un ségment uniformément chargé AB de longueur 2L.
Champ crée en un point M appartenant à l'axe médiane passant par O.

$dq = \lambda . dy$ élement de charge électrique de l'élement dy.

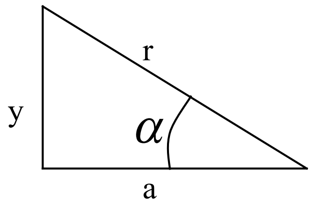
$d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j}$

$E = \int dE = \int dE_x + \int dE_y$ et par raison de symétrie $\int dE_y = 0$





$E = \int dE_x$.



$dE_x = K.\dfrac{dq}{r^2}.\cos\alpha = dE_x = K.\dfrac{\lambda . dy}{r^2}.\cos\alpha$

sachant que $tg\,\alpha = \dfrac{y}{a}$ et $\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$.

On en déduit alors : $dy = a.\dfrac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$ et le rapport $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\cos^2(\alpha)}{a^2}$.

$dE_x = K.\lambda.\ a.\dfrac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}.\ \dfrac{\cos^2(\alpha)}{a^2}.\cos\alpha$.

$E = \int dE_x = \dfrac{K.\lambda}{a}\int_{-\theta}^{+\theta}\cos\alpha.\,d\alpha = \dfrac{2K.\lambda}{a}\sin\theta$.

$\boxed{E = \dfrac{2K.\lambda}{a}\sin\theta}$ est l'expression du champ électrique crée par le ségment AB chargé d'une densité linéaique λ au point M.

Si on veut exprimer E en fonction de a et L, on remplace $\sin\theta$. $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$

$$\boxed{E=\frac{2K.\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}}$$

b) Champ crée par un fil infini uniformément chargé.

Pour le fil infini uniformément chargé, On utilise les mêmes calculs du segment AB en tendant simplement $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Alors l'expression de $E(M)$ en M devient $\boxed{E=\frac{2K.\lambda}{a}=\frac{\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}}$

Remarques : Il est conseillé de voir le calcul de

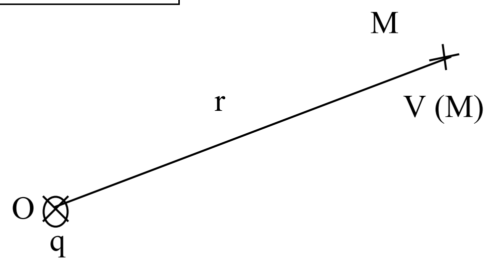
1) Champ électrique crée par une boucle uniformément chargée en un point de son axe.

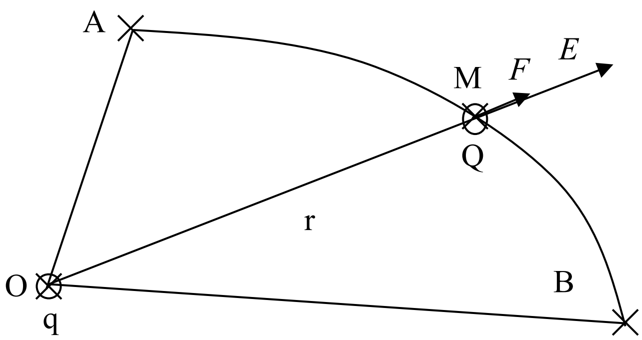
2) Champ électrique crée par un disque uniformément chargé en surface en un point de son axe.

D) POTENTIEL ELECTRIQUE.

1) Définition. Par définition le potentiel d'une charge q de point O en un point M s'écrit :

$$\boxed{V=\frac{K.q}{r}+cte}$$





2) Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'une charge Q au point M qui est soumise à l'action du potentiel électrique V(M) crée par la charge q qui se trouve au point O, s'écrit :

$$\boxed{E_P=V(M).Q=\frac{K.q}{r}Q+cte}$$

3) Travail d'une force électrique.

Le travail de déplacement de la charge Q soumise à l'action du potentiel électrique V(M) entre les points A et B, s'écrit :

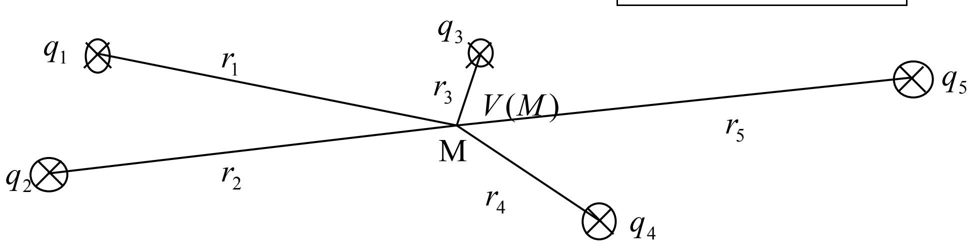
$$\boxed{W_A^B=E_P(A)-E_P(B)} \text{ ou } \boxed{W_A^B=KqQ.(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B})}.$$

4) Propriété du potentiel.

Potentiel crée par une distribution de charges discrètes ou continue.

- Distributions discrètes.

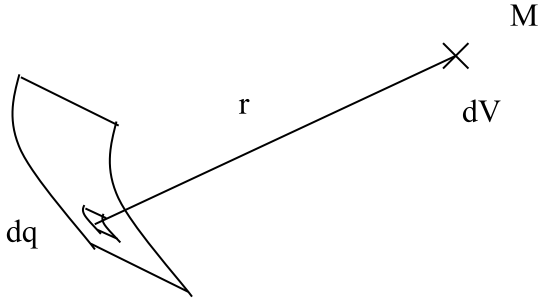
L'expression du potentiel dû à l'ensemble des charges s'écrit : $\boxed{V(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K.q_i}{r_i}+cte}$



Distributions continue.

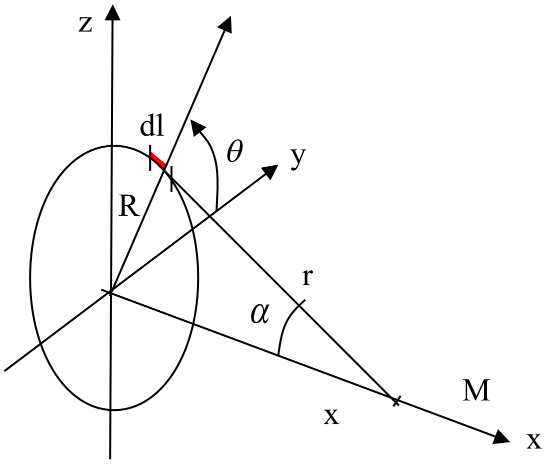
L'expression du potentiel d'une distribution continue de charges électrique s'écrit :

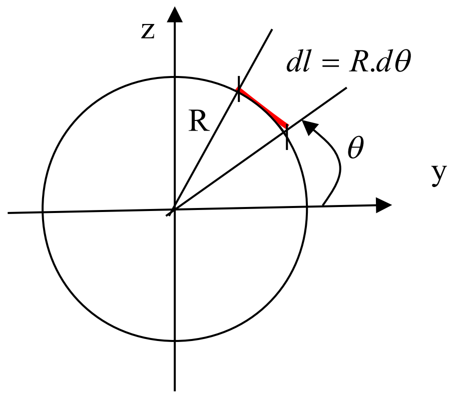
$$\boxed{V(M) = \int K.\frac{dq}{r}}$$



Exemple de calcul de potentiel

Potentiel électrique crée par une boucle uniformément chargée en un point de son axe.



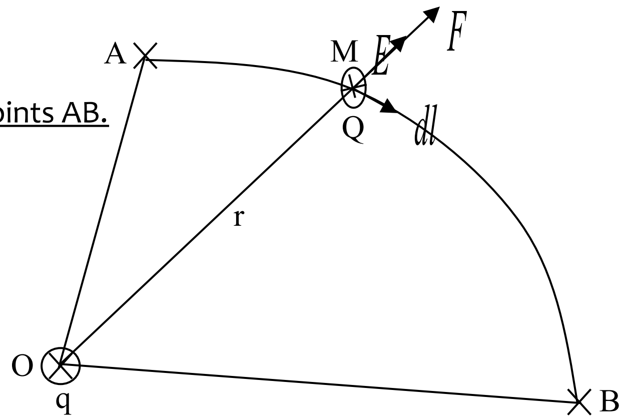


$dV = K\dfrac{dq}{r}$ avec $dq = dl.\lambda = \lambda.R.d\theta$.

$V = \int dV = \int \lambda.\dfrac{R.d\theta.K}{r} = \dfrac{\lambda.R.K}{r}\int_0^{2\pi} d\theta = \dfrac{2\pi.\lambda.R.K}{r}$ avec r, x et R : constantes

$V(M) = \dfrac{2\pi}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \dfrac{1}{2\,\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R}{\sqrt{x^2+R^2}}$, avec $r = \sqrt{x^2+R^2}$.

5) Travail d'une force électrique entre deux points AB.



Le travail élémentaire de Q sous l'action de E

S'écrit : $dW = Q.(E.dl) = F.dl$.

Avec $F = Q.E$.

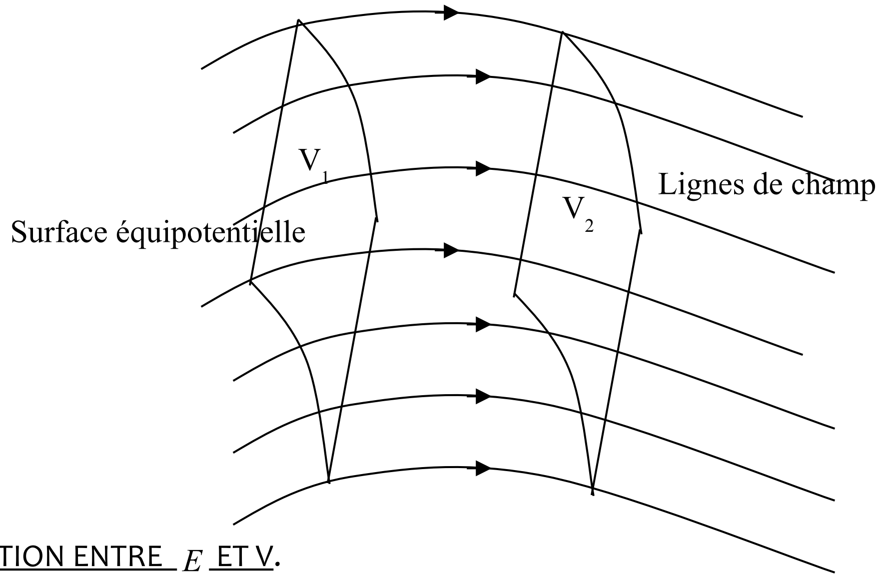
Le travail entre A et B s'écrit :

$$\boxed{W_A^B = Q.\int_A^B E.dl = Q.C_A^B}.$$

$C_A^B = \int_A^B E.dl$ est la circulation entre les points A et B.

$C_A^B = V_A - V_B = -(V_B - V_A)$.

Si A et B appartiennent au même plan équipotentiel alors $C_A^B = V_A - V_B = 0$ car $V_A = V_B$.



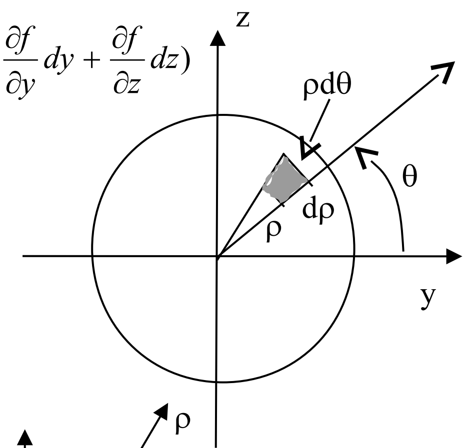
E) <u>RELATION ENTRE E ET V</u>.

On revient sur certain relations présentées au dessus :

$W_A^B = Q.\int_A^B E.dl = Q.\, C_A^B$

$E.dl = dC = -dV$

On rappelle que pour une fonction f(xyz) ; $df(xyz) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz)$



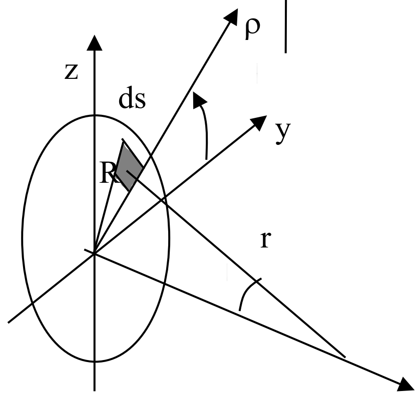
$E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz = -dV = -(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz)$

$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ et $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$.

Ceci résume la formule vectorielle $\boxed{E = -\,\overrightarrow{grad}\, V}$

$E = E_x.e_x + E_y.e_y + E_z.e_z = -(\frac{\partial V}{\partial x}.\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}.\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}.\vec{e}_z)$.

Exemple : Calcul de potentiel et déduction du champ électrique. Potentiel électrique crée par un disque chargé (densité surfacique de charge σ constante.



ds=ρ.dρ.dθ et dq=σ.ds=σ.ρ.dρ.dθ

$\mathrm{dV(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\vartheta}{r}$ avec $r = \sqrt{x^2 + \rho^2}$

$\mathrm{dV(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\vartheta}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$

$\mathrm{V(M)} = \int \mathrm{dV(M)} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}} \int_0^{2\pi} d\vartheta$

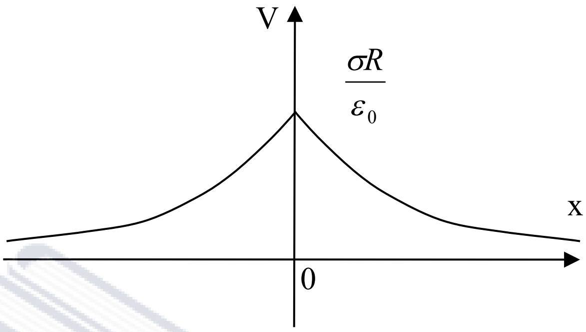
$$V(M) = \int dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\int_0^{2\pi} d\vartheta$$

$$V(M) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left(\sqrt{x^2+\rho^2}\right)_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2}-|x|\right]$$

Si x > 0 alors $V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2}-x\right]$

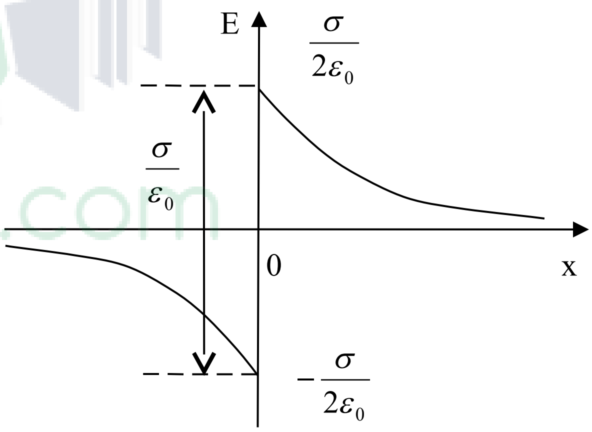
Si x< 0 alors $V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2}+x\right]$



$E(M) = -\frac{dV}{dx}$ A partir de cette relation on peut déduire les deux expressions du champ électrique.

Si x > 0 $\quad E(M) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$

Si x < 0 $\quad E(M) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$



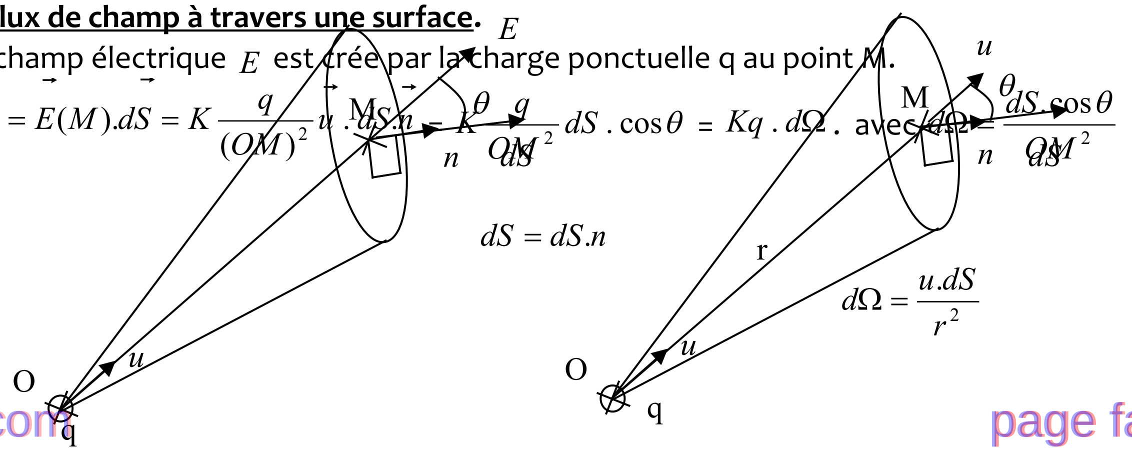
Conclusion :
Le champ électrique lors de la traversé d'une surface chargée subit une discontinuité de valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

F) <u>THEOREME DE GAUSS</u>.

1) <u>Flux de champ à travers une surface</u>.

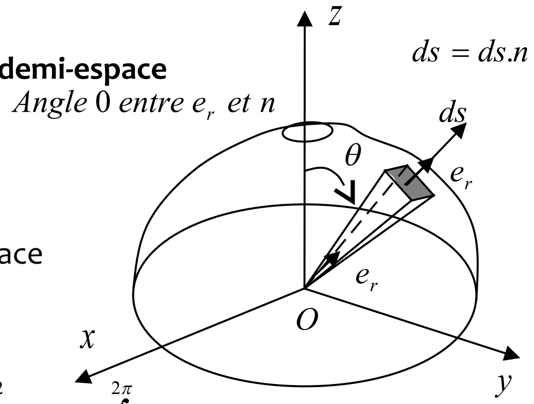
Le champ électrique $\vec{E}$ est crée par la charge ponctuelle q au point M.

$$d\Phi = \vec{E}(M).\vec{dS} = K\frac{q}{(OM)^2}\vec{u}\,.\,dS\,\vec{n} = K\frac{q}{OM^2}dS\,.\cos\theta = Kq\,.\,d\Omega\,.\ \text{avec } d\Omega = \frac{dS\,.\cos\theta}{OM^2}$$



$d\Phi$ est le flux du champ E à travers l'élément de surface dS.
$d\Omega$ est l'angle solide élémentaire à travers lequel, on voit dS à partir du point O.

$$\Omega = \int d\Omega = \int \vec{u}.\frac{dS}{OM^2} = \int \frac{dS\ u.n}{OM^2} = \int \frac{dS\ \cos\theta}{OM^2}.$$



Exemple : Calcul de l'angle solide pour pouvoir voir le demi-espace

$$\Omega_{demi\ espace} = \int d\Omega = \int \vec{e_r}.\frac{ds}{R^2} = \int \frac{ds\ e_r.n}{R^2} = \int \frac{ds\ \cos(0)}{R^2}$$

$\Omega = \int \frac{ds}{R^2}$ en coordonnées sphérique l'élément du surface

$$ds = R.\sin\theta.d\varphi.R.d\theta = R^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi$$

$$\Omega_{demi\ Espace} = \int \frac{ds}{R^2} = \int \frac{R^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi}{R^2} = \int \sin\theta.d\theta.d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

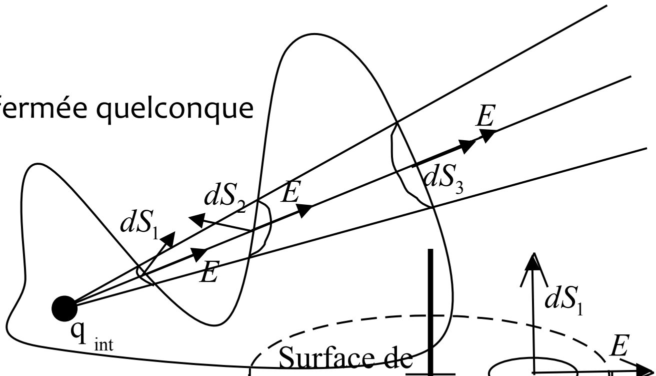
$$\Omega_{demi\ Espace} = [-\cos\theta]_0^{\pi/2}.[\varphi]_0^{2\pi} = 1 \times 2\pi = 2\pi$$

Pour voir l'espace complet

$$\Omega_{Espace} = [-\cos\theta]_0^{\pi}.[\varphi]_0^{2\pi} = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

2)<u>Théorème de Gauss.</u>

$\boxed{\Phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{surf}}{2\varepsilon_0}}$ A travers une surface fermée quelconque dont la normale est positivement vers l'extérieur. Le flux du champ crée par une distribution de charge est donné par l'expression au dessus.

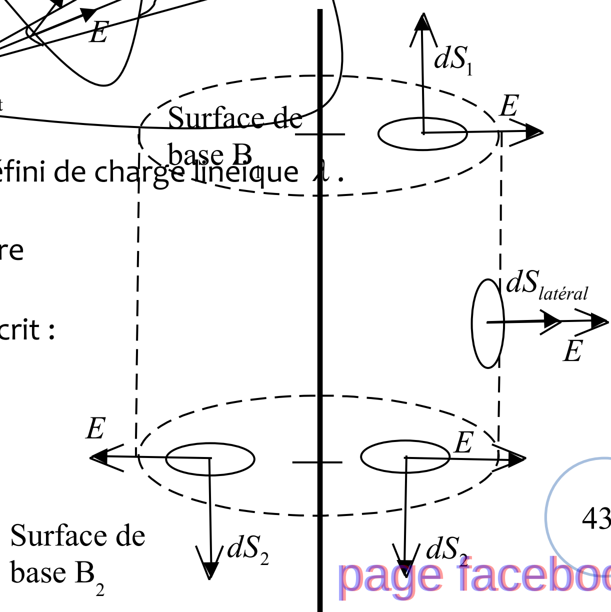


Exemple :

1) Calcul du champ électrique crée par le fil indéfini de charge linéique λ.

On choisi comme surface fermée de Gauss un cylindre dont l'axe coïncide avec le fil.
Le flux du champ E à travers la surface de Gauss s'écrit :

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{LATERAL} + \Phi_{B1} + \Phi_{B2}$$



$\Phi_{B1} = 0 , \Phi_{B2} = 0$ car $\forall \, dS_{B1} \perp E \; et \; \forall \, dS_{B2} \perp E$.

$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{LATERAL} = \int_{LATERAL} E \, . \, dS = E \, . \, S_{LATERALE}$.

= $E.2 \, \pi \, . \, R \, . \, h$

$q_{INT} = h. \, \lambda$

$$\Phi_{TOTAL} = \Phi_{LATERAL} = \frac{\sum q_{INT}}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_{SUR}}{2\varepsilon_0} = \frac{\sum q_{INT}}{\varepsilon_0}$$

$$E.2 \, \pi \, . \, R \, . \, h = \frac{h \, . \lambda}{\varepsilon_0}$$

On déduit alors que $E = \frac{2 h \, \lambda}{\varepsilon_0}$

Remarque : Il s'agit du même résultat trouvé par le calcul direct.

Il est conseillé de faire le calcul en utilisant le théorème de Gauss pour :

1) un plan infini de densité constante σ.
2) Une sphère chargée en surface par une densité constante σ.
3) Une sphère chargée en volume par une densité volumique constante ρ.
4) Un cylindre chargée en surface par une densité constante σ.

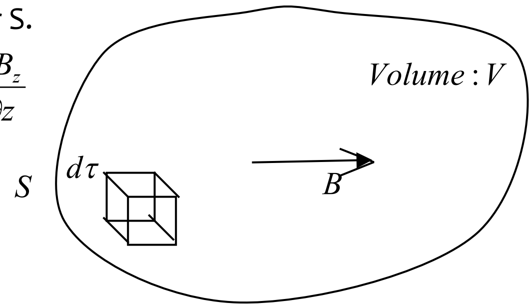
G) <u>CONSEQUENCES DU THEOREME DE GAUSS</u>.

<u>Formulations mathématiques</u>.

<u>Equation de Poisson, Equation de Laplace</u>.

Le flux d'un champ de vecteurs B à travers une surface fermée S est égale à l'intégrale de la divergence de B sur le volume délimité par S.

$$\int_S B.dS = \int_{VOLUME} divB \, .d\tau \quad \text{avec} \quad div \, \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$



Cas particulier : Champ électrique.

$$\int_S \vec{E} . \vec{dS} = \frac{q \, \text{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{VOLUME} \rho \, .d\tau = \int_{VOLUME} divE \, .d\tau$$

d'où l'identité $\boxed{div \, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Equation de Poison.

Equation différentielle locale.

Si on utilise la relation $E = -\overrightarrow{grad} \; V$

$$divE = div(-\overrightarrow{grad} \; V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On sait que : $div\ grad\ f = \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Alors : $\boxed{\Delta V = \dfrac{-\rho}{\varepsilon_0}}$ Equation de Poisson.

En analyse vectorielle, l'équation de Poisson (ainsi nommée en l'honneur du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson) est l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante : $\Delta\phi = f$
où   est l'opérateur Laplacien et f est une fonction généralement donnée.
Sur un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et de frontière régulière, le problème de trouver ϕ à partir de f et satisfaisant certaines conditions aux limites appropriées est un problème bien posé : la solution existe et est unique.
Ce problème est important en pratique :
- En électrostatique, la formulation classique exprime le potentiel électrique V associé à une distribution connue de charges ρ (dans le vide) par la relation

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

Dans une région de l'espace où il n'a pas de charges électrique $\rho = 0$ donc :

$$div\,\vec{E} = 0$$

$\vec{E}$ est un flux conservatif $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ alors

$\Delta V = 0$ Equation de Laplace.

Exercice : Equation de Poisson.
Une distribution volumique à charge de symétrie sphérique de centre O créant en M un potentiel de forme $V = \dfrac{c}{r}.e^{-k.r}$ avec c et k des constantes.

1) Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en M.
2) Calculer la densité de charge ρ en M.

Corrigé :

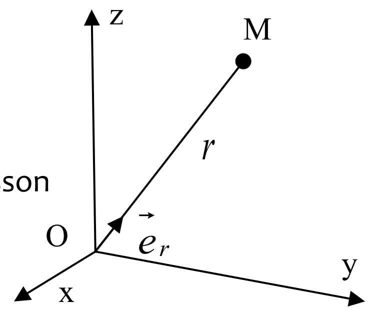
1) L'opérateur gradient en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\ f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}$$

On utilise la relation $E = -\overrightarrow{grad}\ V$ en coordonnée sphériques à une seule variable r

$E = -\dfrac{dV}{dr}$ avec $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{c}{r^2}e^{-kr} - \dfrac{ck}{r}e^{-kr} = -\dfrac{c}{r^2}(kr+1).e^{-kr}$

$\vec{E} = \dfrac{c}{r^2}(kr+1).e^{-kr}.\vec{e}_r$.



2) Expression local du théorème de Gauss ou Equation de Poisson

$$\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

L'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta \sin\vartheta)}{\partial\theta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

A une seule variable $\quad div\,\vec{E}_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r}\vec{e}_r$

$$r^2E = -c(kr+1).e^{-kr}$$

$$\frac{d(r^2E_r)}{dr} = \frac{d(c(kr+1).e^{-kr})}{dr} = kce^{-kr} - kc(1+kr)e^{-kr} = -k^2cre^{-kr}$$

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E_r)}{dr} = -\frac{1}{r^2}k^2cre^{-kr} = -\frac{k^2c}{r}e^{-kr} \quad \text{et} \quad div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\rho = -\varepsilon_0\frac{k^2c}{r}e^{-kr}}$$

Exemple : Calculer le flux du champ de vecteurs $E(x,y,z)$**.**

Montrer que le flux du champ $E(x,y,z) = 2z.e_x + 3.e_y + 2xy.e_z$ sortant à travers l'hémisphère (O,R) est le même que le flux rentrant à travers la base, surface du disque (O,R).

On peut parvenir à ce résultat si on peut montrer que le flux à travers la surface totale fermée est nulle.

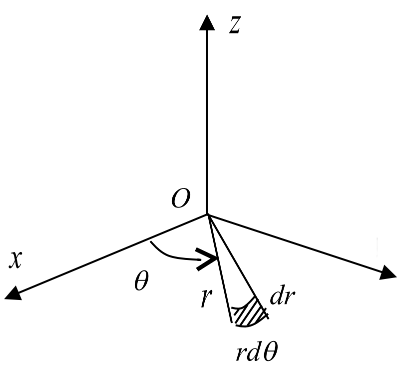
On utilise alors l'égalité $\boxed{\int_S E.dS = \int_{VOLUME} divE\,.d\tau}$ sachant que

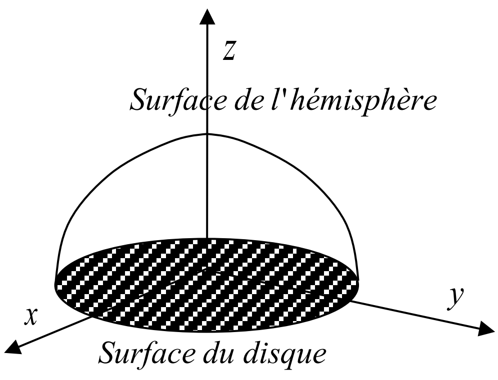
$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$ dans notre cas $div\,E = 0$.

Alors $\int_S E.dS = \int_{VOLUME} divE\,.d\tau = 0$

$$\phi_{E/S} = \int_S E.dS = \int_{Disque} E.dS + \int_{Hémisph} E.dS = \phi_{Disque} + \phi_{Hémisph} = 0$$

$$\phi_{Disque} = -\phi_{Hémisph}$$





Exercice : ddp d'une membrane.

Soit x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point, ρ et ρ' deux constantes algébriques et a et b deux constantes positives. La densité volumique de charge est nulle si $x < -a$ ou si $x > b$; elle vaut ρ si $-a < x < 0$ et ρ' si $0 < x < b$; il n'y a pas d'autres formes de charge et la charge totale est nulle.

1) Quelle est la relation entre a, b, ρ et ρ' qui traduit cette nullité de la charge totale ?

2) Qu'est-ce que la symétrie impose au champ électrique ? Préciser les symétries considérées.

3) Montrer que le champ électrique est nul si $x < -a$ ou si $x > b$ et calculer le champ électrique dans la région chargée. On choisira librement les intermédiaires de raisonnement, qui seront notés même si le problème n'est pas globalement résolu.

4) Une membrane peut être représentée par le schéma précédent. Calculer la différence de potentiel $U = V(b) - V(-a)$ entre ses deux faces en fonction de ρ', a et b.

Réponse

1) Une tranche de surface S contient la charge $\rho aS + \rho' bS$, donc $\rho a + \rho' b = 0$.

2) On peut répondre à cette question de plusieurs façons.

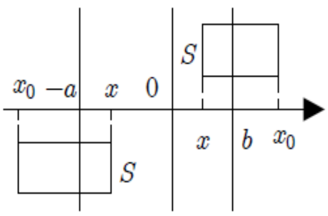
Première réponse possible : la distribution de charge est invariante dans toutes les translations perpendiculaires à l'axe Ox, donc $V = V(x)$; d'où $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = E(x)\vec{u}_x$.

Deuxième réponse possible : toute droite parallèle à l'axe Ox est un axe de révolution de la distribution de charge, donc porte $\vec{E}$. La distribution de charge est invariante dans toutes les translations perpendiculaires à l'axe Ox, donc le champ électrique ne dépend que de x.

3) Il existe plusieurs méthodes de résolution de cette question. En voici une.

Découpons la distribution de charge en tranches d'épaisseur dx ; chaque tranche équivaut à un plan chargé portant la densité superficielle de charge $\sigma = \rho dx$ et créant le champ $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\rho dx}{2\varepsilon_0}$. Le champ électrique s'obtient en ajoutant ces contributions. A l'extérieur de la distribution de charge, la somme de ces contributions est nulle parce que la charge totale est nulle.

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée formée par un cylindre de génératrices parallèles à Ox et de section S limité par deux sections d'abscisses x_0 et x :



Supposons que $x_0 < -a$ et $-a < x < 0$:

$$E(x)S = \frac{\rho(a+x)S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho(a+x)}{\varepsilon_0}$$

Supposons que $x_0 > b$ et $0 < x < b$:

$$-E(x)S = \frac{\rho'(b-x)S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho'(x-b)}{\varepsilon_0}$$

D'où :

Si $x \leq -a$ ou $x \geq b$, $E = 0$

Si $-a \leq x \leq 0$, $E = \dfrac{\rho(a+x)}{\varepsilon_0}$

Si $0 < x < b$, $E = \dfrac{\rho'(x-b)}{\varepsilon_0}$

4)

$$U = V(b) - V(-a) = -\int_{-a}^{b} E dx = \int_0^{-a} \frac{\rho(x+a)}{\varepsilon_0} dx - \int_0^{b} \frac{\rho'(x-b)}{\varepsilon_0} dx$$

$$= \int_a^0 \frac{\rho u du}{\varepsilon_0} - \int_{-b}^0 \frac{\rho' v dv}{\varepsilon_0} = \frac{-\rho a^2 + \rho' b^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho' b(a+b)}{2\varepsilon_0}$$

CH II

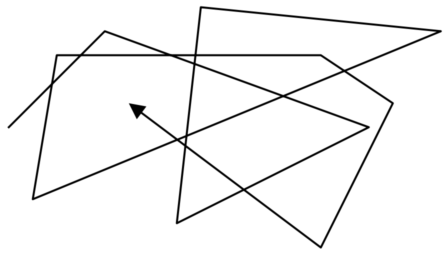
CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

I) CONDUCTEUR EN EQUILIBRE

a) <u>Equilibre électrique d'un conducteur en régime permanent.</u>

Les conducteurs sont en général des métaux, constitués d'atomes, d'ions ⊕ et d'électrons – libres.

La vitesse moyenne d'un électron en régime pérmanent est : $\vec{V}_j = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{j=n}\vec{V}_j = 0$.

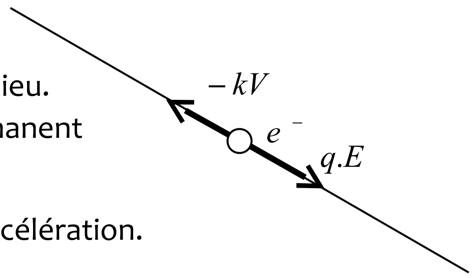


b) <u>Champ E dans un conducteur.</u>

Dans le conducteur, un électron sous l'action d'un champ électrique E est soumis à deux forces.

$q.E$: action de E sur l'électron.

$-kV$: force de frottement de l'électron avec le milieu.



La vitesse moyenne du conducteur en régime permanent Est nulle $V = 0$.

P.F.D $\sum_{extérier} f = m.\gamma$ avec m : la masse de e⁻ et γ : l'accélération.

Dans notre cas $q.E - kV = m.\gamma = 0 \Rightarrow q.E - kV = 0 \Rightarrow q.E = kV$

En régime permanent $V = 0 \Rightarrow q.E = kV = 0$.

En conclusion $E = 0$.

En régime permanent, le champ électrique $E(M)$ est nul en toute point intérieur du conducteur.

c) <u>Potentiel et répartition de charges dans un conducteur.</u>

Le champ électrique nul dans le conducteur, $E = 0$, entraîne :

1- <u>Potentiel du conducteur.</u>

$E = -\overrightarrow{grad}\ V$ puisque E=0 ⇒ V, le potentiel est constant en tout point du conducteur.

2- <u>Charge du conducteur.</u>

Si on applique le théorème de Gauss sur un conducteur en équilibre $\boxed{\Phi_{E/\text{int}} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0}$

car le champ électrique E=0 à l'intérieur de conducteur.

par conséquence $\boxed{\Phi_{E/\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0}$ et $\boxed{q_{\text{int}} = 0}$.

La charge intérieure d'un conducteur en équilibre est nulle, pourtant l'électroscope* montre qu'un métal en cuivre s'électrise par simple frottement. La charge de ce conducteur ne peut se trouver qu'en surface.

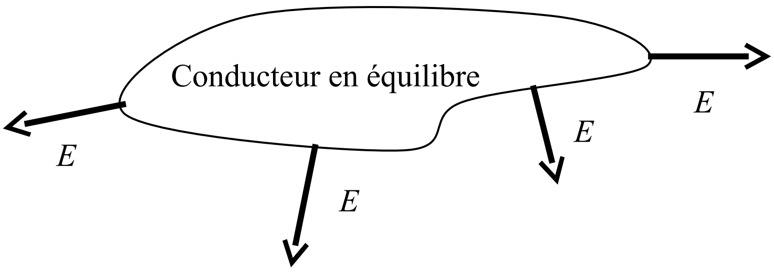
* :L'électroscope est un appareil simple pour mesurer la charge électrique d'un conducteur.

3) Lignes de champ.

Pour imaginer les lignes de champ dans un conducteur, il faut revenir sur les dérniers résultats du paragraphe b).

A l'intérieur du conducteur en équilibre le champ électrique $E = 0$. En surface le champ E peut être différent de zéro, mais son vecteur doit être perpendiculaire à la surface du conducteur.

Si on suppose qu'une composante de $E_{TANGENTIELLE} \neq 0$ alors les e^- seront en mouvement superficiel. Ceci est contraire aux conditions de l'équilibre d'un conducteur.



d) Relation entre la charge et le potentiel d'un conducteur.

V est le potentiel d'un conducteur et σ la densité superficielle.

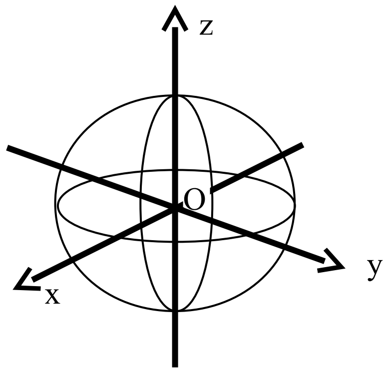
$$V = \int dV = K.\int_{CONDUCTEUR} \frac{\sigma(M).dS}{r}$$

Si on multiplie la densité par une constante, elle devient $\sigma' = \lambda.\sigma$, alors le potentiel devient $V' = \lambda.V$ et la charge électrique $Q' = \lambda.Q$.

On en déduit alors que la charge et le potentiel d'un conducteur sont proportionnels :

$$\boxed{Q = C.V}$$

C : capacité d'un conducteur est mesurée en Farad.



Exemple : Capacité d'un conducteur sphèrique.

Q : charge portée par la sphère.

S=4.πR² : surface de la sphère de rayon R.

$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4.\pi R^2}$: densité superficielle de la sphère.

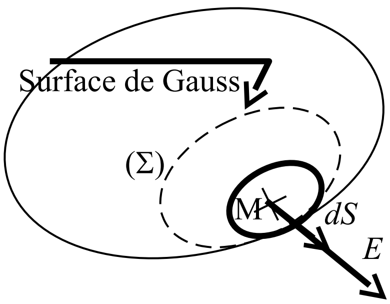
La charge Q crée un potentiel V au centre O.

L'expression de V s'écrit : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$.

La relation de proportionnalité $\boxed{Q = C.V}$ peut être comparée avec celle de dessus

$Q = 4\pi\varepsilon_0.RV$ alors la capacité C s'écrit : $\boxed{C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0.R}$

e) Champ en surface d'un conducteur.



$d\phi = E.dS = E.dS$ les deux vecteurs sont colinéaires

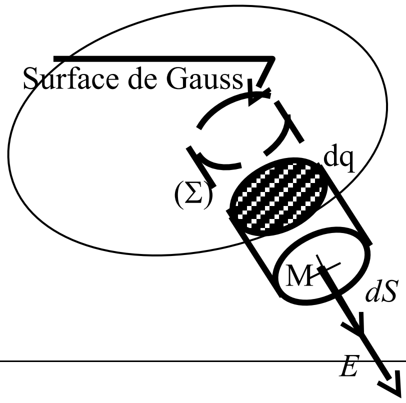
$$d\phi = \frac{dq_{SURFACE}}{2.\varepsilon_0} = \frac{\sigma.dS}{2.\varepsilon_0} = E.dS.$$

On déduit alors le champ électrique sur la surface d'un conducteur $\boxed{E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}}$ ou sous forme vecteur $\vec{E} = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\vec{u}$.

Au voisinage de la surface

$d\phi = \vec{E}.\vec{dS} = E.dS = \frac{dq_{INTERIEUR}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.dS}{\varepsilon_0}$.

Alors le champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur s'écrit : $\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$.

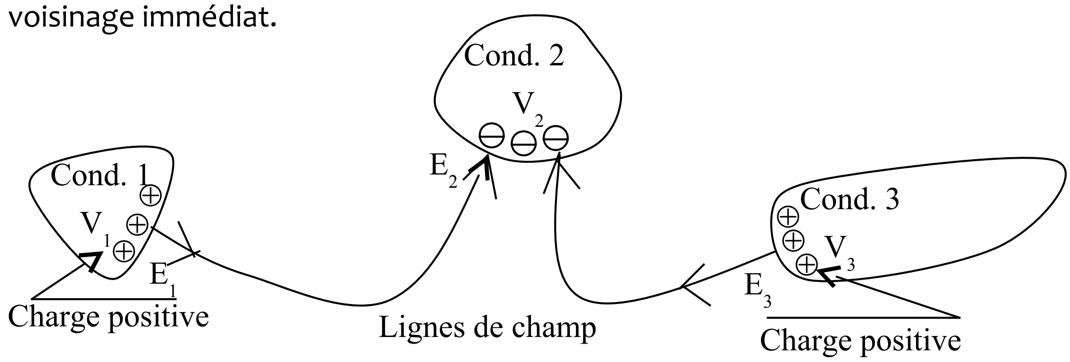


Théorème :
Le champ E est discontinu à la traversée de la surface du conducteur. Le champ passe d'une valeur nulle dans le conducteur à $E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}$ sur la surface puis $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ au voisinage immédiat de la surface.

II) Théorèmes généraux pour l'étude d'un système de conducteurs.

Dans le cas d'un ensemble de conducteurs, chaque conducteur est en équilibre.

- le champ électrique E est nul à l'intérieur de chaque conducteur.
- les lignes de champ sont $\perp$ aux surfaces des conducteurs.
- Le potentiel est constant dans chacun des conducteurs, avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$ au voisinage immédiat.



a) Théorème d'unicité.

n conducteurs chacun a un potentiel : V_1, V_2, … , V_n.

On prends comme conditions aux limites le potentiel à l'infini est nul , V_∞ .

$V(r)$ en tout point de l'espace est solution de l'équation de Laplace.

$\Delta V = 0$ ($\rho = 0$) avec les conditions aux limites $V_1 \rightarrow$ conducteur 1

$V_2 \rightarrow$ conducteur 2

…

Si on connaît le potentiel $V(r)$ en tout point de l'éspace, on peut en déduit la densité σ sur tout conducteur pa r la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$.

On peut aussi en déduire la charge $Q = Q_1+Q_2+\cdots+Q_n$
On peut démontrer que $V(r)$ est solution unique.

b) Théorème de superposition.

Soit un système de conducteurs. Dans un premier état sa charge est Q' et dans un deuxième état sa charge est Q''. Les densités correspondantes au point P du système sont $\sigma'(P)$ pour le premier état et $\sigma''(P)$ pour le deuxième état. Si la charge du système devient $\lambda'.Q'+\lambda''.Q''$, la nouvelle répartition de charge au point P sera $\lambda'.\sigma'+\lambda''.\sigma''$. Nous obtenons ainsi un nouvel équilibre dit par superposition d'état d'équilibre. Le potentiel du système devient alors $\lambda'.V'+\lambda''.V''=V$.

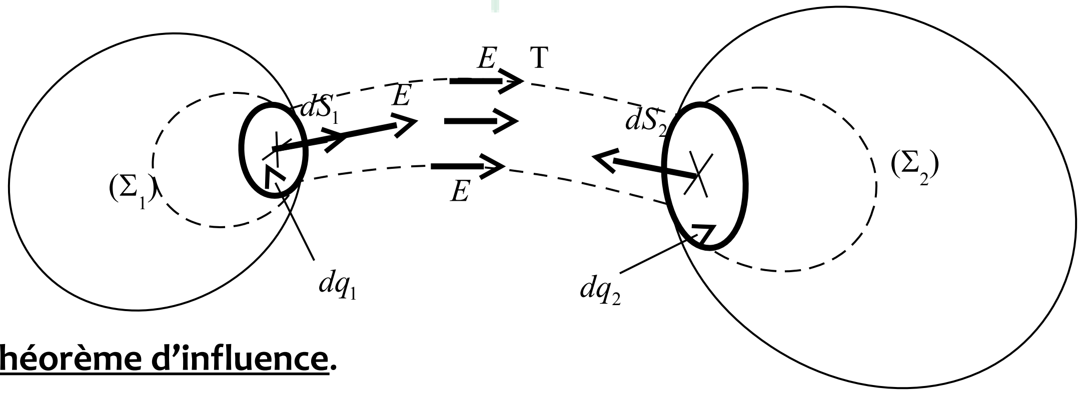
c) Théorème des éléments correspondants.

La surface fermée Σ composée de T (surface latérale) et Σ_1 à l'intérieur de S_1 et Σ_2 à l'intérieur de S_2, coupe S_1 en dS_1 et S_2 en dS_2.

Le champ E est nul en Σ_1 et Σ_2 et tangent en tout point du tube T. Le flux sortant de la surface fermée $\Sigma = \Sigma_1 + T + \Sigma_2$ est nul.
Dq1 et dq2 étant les charges des élément dS_1 et dS_2.
Si on applique le théorème de Gauss sur la surface fermée Σ, on écrit :

$$\Phi = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(dq_1 + dq_2) = 0 \Rightarrow (dq_1 + dq_2) = 0$$

dS1 et dS2 sont des élément correspondants.
Enoncé : Deux éléments correspondants portent des charges opposées.



d) Théorème d'influence.

Définition :En présence de plusieurs conducteurs, si des lignes de champ de l'un des conducteurs vont sur un autre, on dit qu'il y'a influence.

1) Coefficient d'influence.

V est le potentiel du système de composant du système, de composants $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$. Q est la charge de système de composantes $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$.

$\forall$ P un point pris sur le système S. Il y'a unicité de la répartition d'équilibre $\sigma(P)$ pour la charge du système Q donnée.

D'où la relation Q= C . V

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

$C_{11}, C_{22}, \ldots, C_{nn}$ représentent les coefficients de capacité de chaque conducteur en présence des autres.

C_{ij} : représentent les coefficients d'influence du conducteur j sur le conducteur i.

Les coefficients $C_{ii} > 0$ et les coefficients $C_{ij} < 0$.

2) Propriétés des coefficients d'influence

Cas de trois conducteurs C_1, C_2 et C_3. C_1 est porté au potentiel V_1 et V_2 et V_3 sont reliés au sol, ($V_2 = V_3 = 0$).

Le conducteur C_1 prend la charge Q_1.

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = C_{11} . V_1.$$

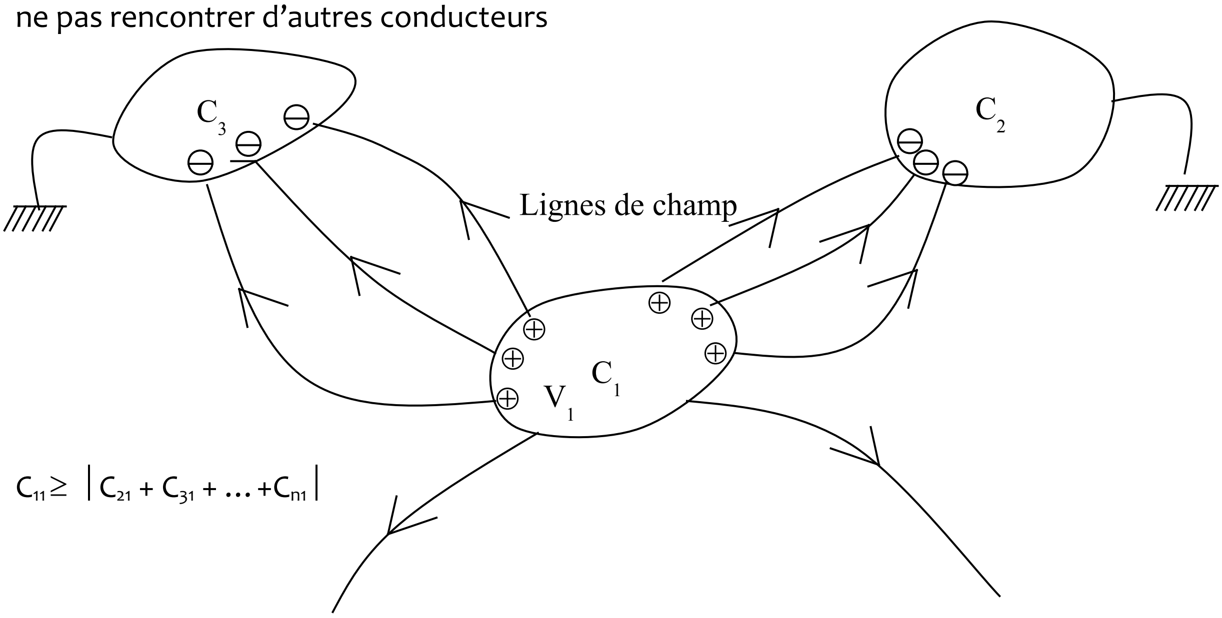
C_2 et C_3 sont chargés par influence.

$Q_2 = C_{21} . V_1$ et $Q_3 = C_{31} . V_1$.

Les lignes de champ sortent des charges + pour arriver sur des charges -.

D'après le théorème des éléments correspondants les conducteurs C_2 et C_3 sont de charges négatives.

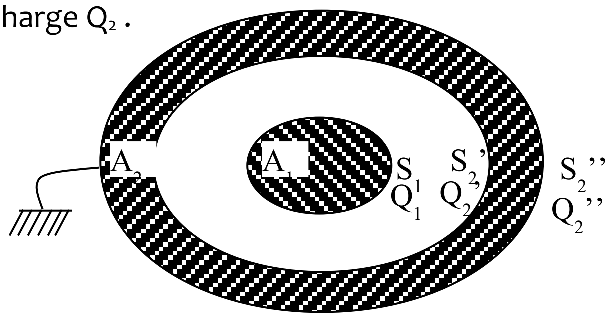
Certains lignes de champ issus du conducteur C_1 peuvent s'éloigner vers l'infini et ne pas rencontrer d'autres conducteurs



$C_{11} \geq |C_{21} + C_{31} + \ldots + C_{n1}|$

3) Cas de deux conducteurs en influence totale.

V_1 est le potentiel du conducteur A_1 de charge Q_1 répartie sur la surface S_1.
V_2 est le potentiel du conducteur A_2 de charge Q_2 .
$Q_2 = Q_2' + Q_2''$



1^er^ cas : Si $\mathbf{V_2 = 0}$

On relie A_2 au sol.

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

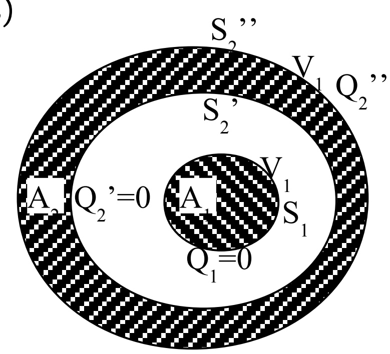
On en déduit que $Q_1 = C_{11} . V_1$ et $Q_2 = C_{21} . V_1$.
Les conducteurs sont en influence totale $Q_1 = -Q_2$. Le champ et le potentiel à l'extérieur sont nuls.
Il n'y a pas de charge sur S_2'' ce qui implique que $Q_2''=0$.
Par conséquence $Q_2 = Q_2' + 0 = Q_2' = -Q_1$.

$Q_2 = -Q_1$ et $\begin{cases} Q_1 = C_{11}.V_1 \\ Q_2 = C_{21}.V_1 \end{cases}$ il en résulte $\Rightarrow C_{11} = - C_{21}$.

C_{11} est positif et C_{21} est négatif.

2^eme^ cas : Si $\mathbf{V_1 = V_2 \neq 0}$.

Le potentiel de la cavité est uniforme, c'est une propriété d'un conducteur en équilibre, alors le champ électrique est nul $E = 0$.
On en déduit que A_1 n'est pas chargé (Théorème de Gauss)
$Q_1=0$ en même temps que $Q_2'=0$.



$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}.V_1 + C_{12}.V_1 = 0 \quad d'où\ C_{11} = -C_{12} \\ Q_2 = Q_2' = C_{21}.V_1 + C_{22}.V_2 \end{cases}$$

Dans le 1^er^ cas on a montré que : $C_{11} = - C_{21}$.
Et dans ce cas on montre que : $C_{11} = - C_{12}$.
Donc les deux coefficients $C_{12} = C_{21}$ sont égaux.

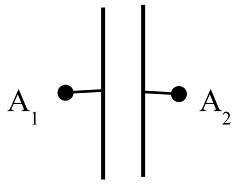
On montre d'une manière générale que $C_{ij} = C_{ji}$.
Dans ce cas l'ensemble se comporte comme un conducteur unique isolé de charge Q2'' de capacié C' défini par $C' = \frac{Q_2''}{V_2}$ avec $Q_2'' = (C_{21} + C_{22}). V_2$.

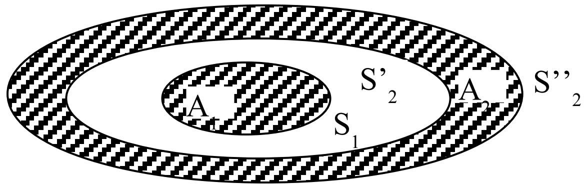
$$C' = C_{21} + C_{22} = C_{22} - C_{11}.$$

III) Condensateurs.

a) Définition :

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs A_1 et A_2 en état d'influence totale.





La capacité C d'un condensateur désigne le coefficient C_{11} de l'armature A_1 en présence de A_2.

La charge $Q=Q_1$ est la charge de A_1 et en même temps la charge du condensateur.

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_{11}\, V_1 + C_{12}\, V_2 \\ Q_2 = C_{21}\, V_1 + C_{22}\, V_2 \end{cases}$$

$Q = Q_1 = C_{11}\, V_1 + C_{12}\, V_2$ influence totale $C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$

$$Q = C\,(V_1 - V_2) \quad \begin{cases} Q'_2 : \text{charge intérieure de } A_2 \\ Q''_2 : \text{charge extérieure de } A_2 \end{cases}$$

$Q_2 = Q'_2 + Q''_2$

$Q'_2 = -Q = -C\,(V_1 - V_2) = C\,V_2 - C\,V_1.$

$Q''_2 = Q - Q'_2 = C_{21}\, V_1 + C_{22}\, V_2 - Q'_2 = (-C\,V_1 + C_{22}\, V_2) + C\,V_1 - C\,V_2 = V_2\,(C_{22} - C)$

$Q''_2 = C'\,V_2$ avec $C' = C_{22} - C$

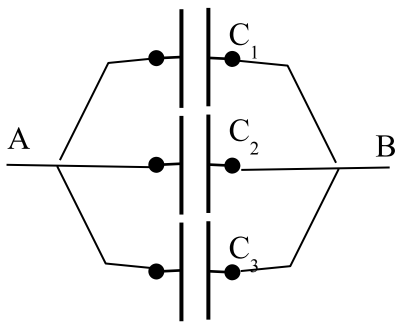
La charge extérieure de l'armature externe est indépendante de V_1 et de la forme des surfaces S_1 et S'_2.

Pour un condensateur, la matrice capacité conduit à

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C'-C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

b) Groupement de condensateurs

1) association en parallèle.



$Q_1 = C_1\,(V_1 - V_2)$

$Q_2 = C_2\,(V_1 - V_2)$

$Q_3 = C_3\,(V_1 - V_2)$

la somme totale devient

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sum Q_i = (V_1 - V_2)(C_1 + C_2 + C_3)$

$Q_{total} = (V_1 - V_2) \sum C_i = (V_1 - V_2)\, C_{total}.$

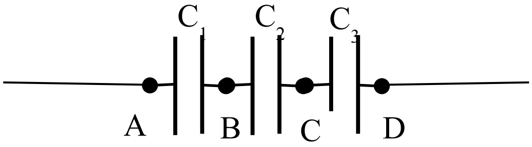
$$\boxed{C = \sum C_i}$$

2) association en série.

$Q = C_1\,(V_A - V_B)$

$Q = C_2\,(V_B - V_C)$

$Q = C_3\,(V_C - V_D)$



$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$ = (V_A-V_B+V_B-V_C+V_C-V_D) = (V_A-V_D)

Q($\Sigma\ \frac{1}{C_i}$)= (V_A-V_D)

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

IV) Energie électrique.

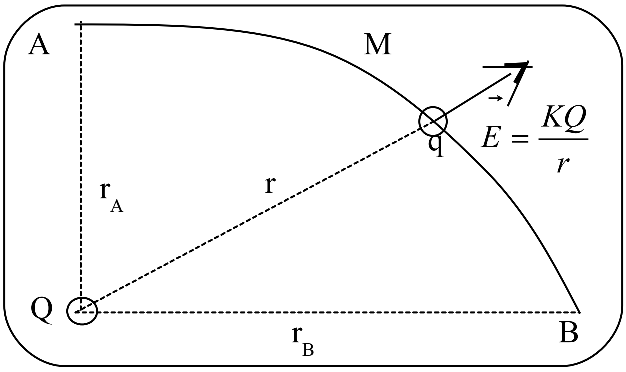
1) Energie d'une charge ponctuelle.

En un point M de Potentiel V(M), une charge q placé sous l'action un champ électrique E possède une énergie potentiel :

$$E_p(M) = q \cdot V(M)$$

Le déplacement de cette cherge entre deux points A et B effectue un travail

$$W_A^B = E_P(A) - E_P(B) \;=\; \frac{K.Q}{r_A}.q - \frac{K.Q}{r_B}.q$$



2) Energie d'un système de charges.

Pour deux charges ponctuelles , on écrit :

$E_P(1) = \frac{K.q_2}{r_{12}}.q_1 = V_1.q_1$ avec V_1 est le potentiel en 1 et V_2 le potentiel en 2.

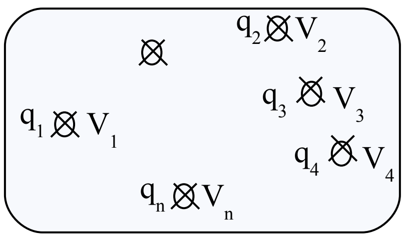
$E_P(2) = \frac{K.q_1}{r_{12}}.q_2 = V_2.q_2$

$E_P(1) = E_P(2)$, on écrit le résultat sous forme symétrique :

$$\boxed{E_P(1,2) = \frac{1}{2}V_1.q_1 = \frac{1}{2}V_2.q_2}.$$

a) Forme générale

Sous la forme générale l'énergie potentielle d'un système de charges s'écrit :



$$\boxed{E_P(1,2,\ldots n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} q_i\ V_i}$$

b) Distribution continue.

Dans le cas d'ine distribution de charge continue, l'énergie potentielle de cette charge

s'écrit : $$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\int V.dq}$$

Dans le cas d'un conducteur en équilibre, la charge électrique est en surface alors

$$E_P = \frac{1}{2}\int V.dq = \int V\ \sigma\ ds = \frac{V}{2}\int \sigma\ ds = \frac{V}{2}Q$$

$$\boxed{E_p = \frac{Q.V}{2}}$$

Pour un système de conducteurs en équilibre, l'énergie potentielle est la somme des énergies individuelle des conducteurs.

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\sum Q_i.V_i}$$

3) Application aux condensateurs.

Un condensateur est un ensemble de deux armatures

(V_1, Q)

$(V_2, Q'_2 + Q''_2) = (V_2, -Q + (C_{22}-C)V_2)$.

l'énergie du système :

$Ep = ½\ Q\ V_1 + ½\ [-Q+ (C_{22}-C)V_2]V_2 = ½\ Q\ V1 + ½\ [-Q+ (C')V_2]V_2$.

C'est l'énergie totale du condensateur.

En général Q''_2 est négligeable.

Alors $Ep = ½\ Q\ V_1 + ½\ [-Q]V_2 = ½\ Q\ (V_1 - V_2)$.

$$Ep = ½\ Q\ (V_1 - V_2).$$

Exercice (1)

Exercice (2)

Un câble coaxial infini chargé et constitué d'un cylindre central de rayon R_1 portant une densité de charge uniforme ρ_i et d'une gaine extérieure dont les limites R_2 et R_3 portant une densité de charge uniforme ρ_e (cf. fig. 1).

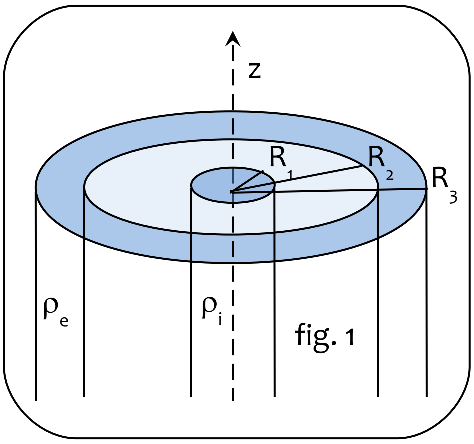


fig. 1

1) A partir de la symétrie de la distribution des charges, trouver la direction du champ électrique E ainsi que les variables pertinentes du problème.
2) Calculer le champ électrique E total en tout point $M(r,\theta,z)$ de l'espace.
3) Donner l'allure de E en fonction de la variable pertinente.
4) Calculer l'énergie électrostatique portée par le cylindre centrale du câble pour une longueur L sachant que $\rho_i = -\rho_e$.

CH III

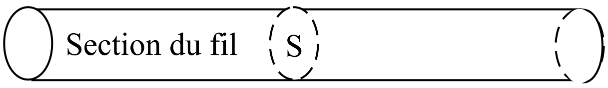
ELECTROCINETIQUE

A) Courant électrique

A l'instant t et pendant le temps dt à travers la section d'un fil électrique traverse la charge dq.

La définition du courant électrique est :

$I = \dfrac{dq}{t+dt-t} = \dfrac{dq}{dt}$ unité MKSA est l' Ampère (1 Ampère = $\dfrac{1 Coulomb}{1 \sec onde}$).

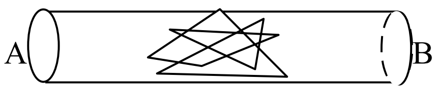


a) Courant continue.

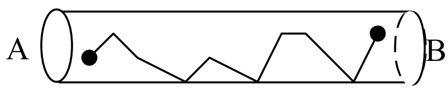
En régime permanent, on maintient en permanence une différence de potentielle entre deux point d'un circuit (V_A-V_B>0).

L'écoulement des charges est continue $\forall$ le temps. On dit que le courant est continue ou stationnaire.

Exemple : Pile chimique, générateur électrique continue.



V_A-V_B=0



V_A-V_B >0

b) Courant variable.

Si la ddp entre A et B change périodiquement de sens , on dit que le courant est périodique.

Si la ddp entre A et B change de valeur aléatoirement en fonction de temps, on dit que le courant est variable.

B) Loi d'Ohm.

a) Conducteur Ohmique

Un conducteur est Ohmique si la conduction des e est dû seulement à un champ électrique E obtenu en appliquant une ddp V_A - $V_B \neq$ 0.

b) Relation fondamentale Ohm – Kirchhoff.

En régime permanent $\sum F = 0$ et $e.E - \lambda.V = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{V} = \dfrac{e}{\lambda}.\vec{E}}$

λ : constante de frottement, ρ : charge de l'électron.

On démontre la relation relative à la densité du courant :

$\boxed{J = n.e.V}$ Démonstration à chercher.

Avec, *n.e :* la densité volumique de charge mobile

Sachant que : $J = \dfrac{dI}{dS}$ et $I = \iint J.dS$.

Si on remplace V par sa valeur , $\vec{V} = \dfrac{e}{\lambda}.\vec{E}$.

$$J = n.e.V = n.e.\frac{e}{\lambda}.\vec{E} = n.\frac{e^2}{\lambda}.\vec{E} = \gamma.E$$

avec $\boxed{\gamma = \frac{n.e^2}{\lambda}}$ la conductivité électrique, $\boxed{J = \gamma.E}$ la relation d'Ohm Kirchhoff.

$\boxed{E = \rho.J}$ avec ρ est la résistivité $\boxed{\rho = \frac{1}{\gamma}}$.

Quelques exemples : $\rho(Cu) = 1{,}69.10^{-8}\,\Omega.m$, $\rho(Or) = 2{,}44.10^{-8}\,\Omega.m$,

$\rho(Verre) = 10^{14}\,\Omega.m$ et $\rho(Semiconducteur) \approx 1\,\Omega.m$.

c) Résistance d'un conducteur.

Le rapport $\frac{V_A - V_B}{I} = R$ représente la résistance entre les points A et B.

La résistance R est une constante.

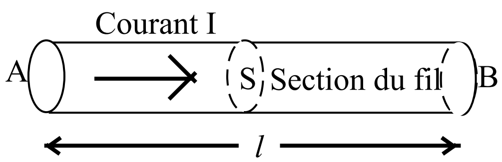
V_A et V_B sont les potentiels correspondants aux points A et B.

Remarque : La conduction dans un conducteur est dû seulement au champ E.

Cas d'un conducteur cylindrique.

$R = \frac{V_A - V_B}{I}$ avec $V_A - V_B = \int E.dl = \int E.dl = E\int dl = E.l$

$I = \iint J.dS = \iint J.dS = J\iint dS = J.S$



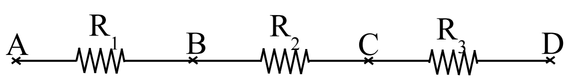
Alors $I = \frac{E.l}{J.S}$ et $J = \gamma.E$

On remplace J dans R, on obtient : $R = \frac{E.l}{\gamma.E.S} = \rho\frac{l}{S}$, ρ la résistivité du conducteur.

$$\boxed{R = \rho\frac{l}{R}}$$

d) Association des résistances.

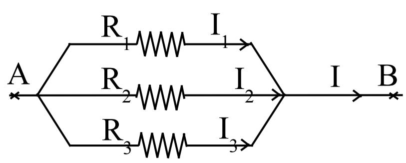
1) Résistances en série.



$\frac{V_A - V_D}{I} = \frac{V_A - V_B}{I} + \frac{V_B - V_C}{I} + \frac{V_C - V_D}{I} = R_{AB} + R_{BC} + R_{CD} = R_1 + R_2 + R_3$.

La résistance totale s'écrit : $R_S = R_1 + R_2 + R_3$.

2) Résistances en parallèles.



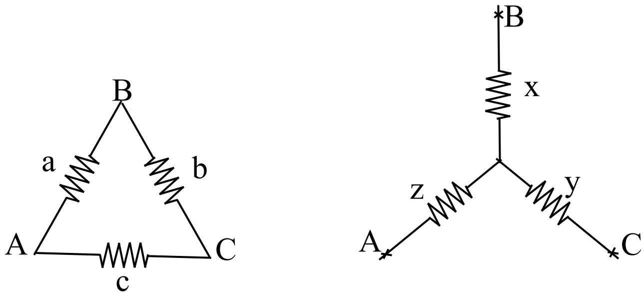
Sur le noed A : $I = I_1 + I_2 + I_3$.

$I = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{V_{AB}}{R_{équ}} = \frac{V_{AB}}{R_P}$.

On en déduit que $\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

3) <u>Théorème de Kenelly</u>.

Ce théorème permet de transformer la structure d'un réseau sous forme triangulaire en forme étoile.



$$\boxed{x = \frac{a\,.\,b}{a+b+c} \;,\; y = \frac{b\,.\,c}{a+b+c} \;\text{ et }\; z = \frac{a\,.\,c}{a+b+c}}$$

D) <u>Effet Joule</u>

a) <u>Energie électrique ou travail.</u>

Le déplacement d'une charge Q entre deux points A et B avec VA et VB les potentiels correspondants, s'accompagnent du travail électrique :

$W_A^B = Q.(V_A - V_B)$

b) <u>Puissance électrique.</u>

Si le déplacement se fait à travers une résistance R.

$R = \frac{V_A - V_B}{I} \;\Rightarrow\; V_A - V_B = R.I$

Q = I . t

$W_A^B = I.t.R.I = R.I^2.t$ Loi de Joule.

$$\boxed{W_A^B = R.I^2.t}$$

Le travail par unité de temps est la puissance $\boxed{P = R.I^2 = \frac{V^2}{R}}$

E) <u>Théorèmes généraux relatifs aux réseaux linéaires</u>

Circuit constitué uniquement de composants linéaires ; les composants pour lesquels la tension et l'intensité sont reliés soit par une relation affine soit par une équation différentielle linéaire

<u>Réseau de conducteurs.</u>

Un réseau de conducteur est constitué de branches, nœuds et mailles.

- Nœud : point de contact de plus de deux branches.
- Branches : portion de circuit entre de nœuds.
- Maille : un ensemble de branches formant un circuit fermé.

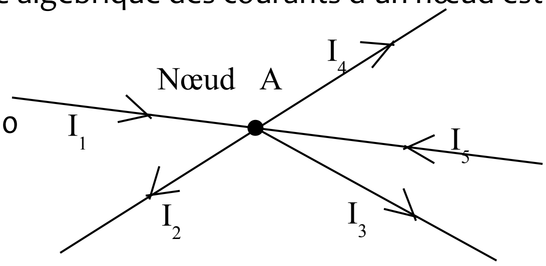
a) **Lois de Kirchhoff**.

Le calcul des courants d'un réseau se fait à l'aide de deux groupes de lois.

∗ **<u>Loi de nœuds</u>** : la somme algébrique des courants d'un nœud est nulle .

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0}$$

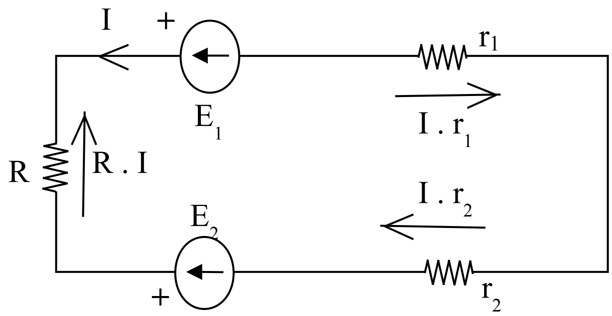
exemple : $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$



∗ **<u>Loi de maille</u>** : la somme algébrique des tensions d'une maille est nulle

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} V_i = 0}$$

Exemple : $E_2 - r_1.I - R.I - E_2 - r_2.I = 0$ Loi dePouillet.



b) **<u>Théorème de Thevenin</u>**.

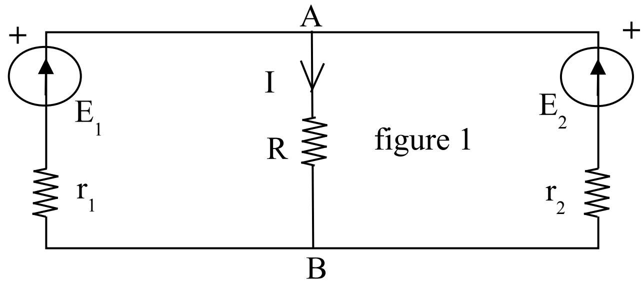
Le théorème consiste à remplacer un circuit électrique en deux parties :

- Une partie ative comportant un génerateur de f.e.m équivante E_{Th} et une résistance équivalente R_{Th}.
- Une autre partie quelconque.

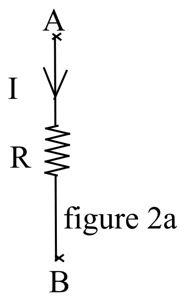
Ce théorème permet de remplacer un circuit complexe par un circuit équivalent simple.

Exemple :

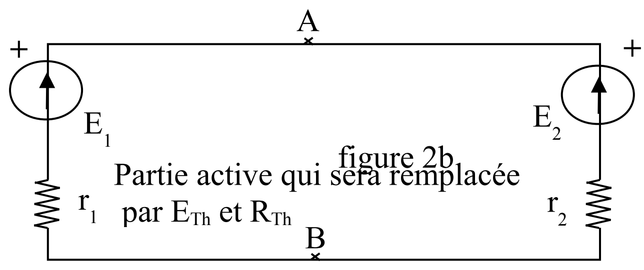
On propose de calculer le courant I de la branche AB du schéma en desous, en utilisant le théorème de Thevenin.



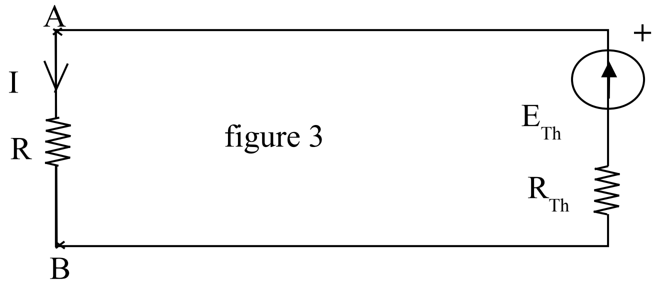
La partie quelconque est la branche AB. Le reste représente la partie active.



Partie quelconque qui sera gardée du circuit d'origine



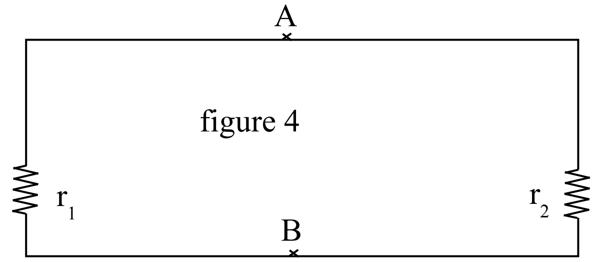
Le résultat du remplacement donera le schéma équivalent suivant :
Pour utiliser ce schéma équivalent, nous somme invités à calculer E_{Th} et R_{Th}.



🏛 <u>Calcul de R_{Th}.</u>
D'abord, on court-circuite les générateurs de tension et on ouvre les générateurs de courant.
Dans notre cas, on court-circuite les générateurs E_1 et E_2 de la figure 2b pour obtenir le schéma de la figure 4.

$R_{Th} = r_1 // r_2 = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

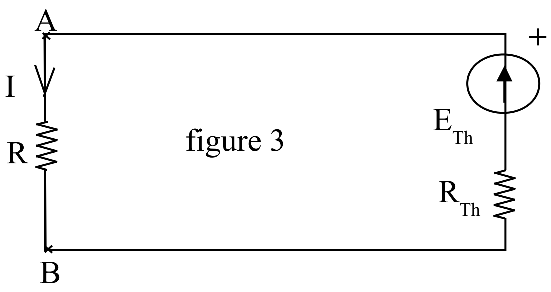
$$\boxed{R_{Th} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}}$$

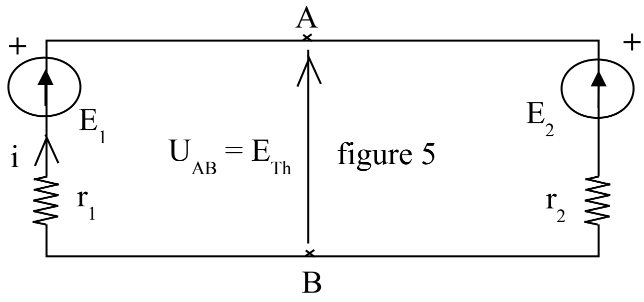


🏛 <u>Calcul de E_{Th}.</u>
A partir du schéma de la figure 2b, on mesure la tension $U_{AB} = E_{Th}$ qui représente la f.e.m de Thévenin. Pour cela, on propose un courant i quelconque circulant dans le circuit.

D'après la loi de **Pouillet**, le courant $i = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$ (fig 5). Pour déterminer E_{Th}, il suffit de calculer la tension U_{AB} sur l'une des branches sur le circuit de la figure 5. $U_{AB} = E_2 + r_2 i$ ou $U_{AB} = E_1 - r_1 i$

$E_{Th} = U_{AB} = E_2 + r_2 \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \dfrac{E_1 . r_2 - E_2 . r_1}{r_1 + r_2}$





Notre but est de calculer le courant I de la branche AB en utilisant le circuit de la figure 3 construit à partir du théorème de Thevenin.

$U_{AB} = R \cdot I = E_{Th} - R_{Th} \cdot I \quad \Rightarrow I = \dfrac{E_{Th}}{R + R_{Th}} = \dfrac{E_1.r_2 - E_2.r_1}{r_1 + r_2} \cdot \dfrac{1}{R + R_{Th}} =$

$$\frac{E_1.r_2 - E_2.r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{R + \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{E_1.r_2 - E_2.r_1}{R.(r_1 + r_2) + r_1.r_2}$$

$$\boxed{I = \frac{E_1.r_2 - E_2.r_1}{R.(r_1 + r_2) + r_1.r_2}}$$

c) **<u>Théorème de Norton</u>.**

De la même façon que le théorème de Thévenin, ce théorème permet de remplacer un circuit complexe en un autre plus simple :

- Une partie active entre deux points choisis A et B.
- Un autre partie quelconque.

La partie active est remplacée par un générateur de courant en parallèle avec la résistance équivalente. Le courant I_0 de court-circuit est trouvé par le court-circuit des points A et B.

Exemple :

Cherchons le courant I de la branche AB du même circuit de l'exemple précédant en utilisant cette fois ci le théorème de Norton.

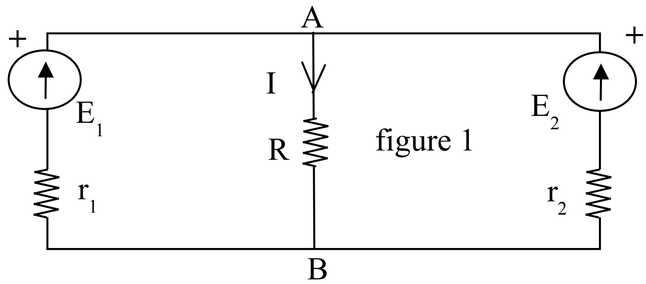


figure 1

De la même façon qu' au théorème de Thevenin, on sépare la partie active de l'autre quelconque.

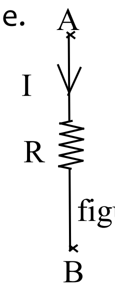


figure 2a

Partie quelconque qui sera gardée du circuit d'origine

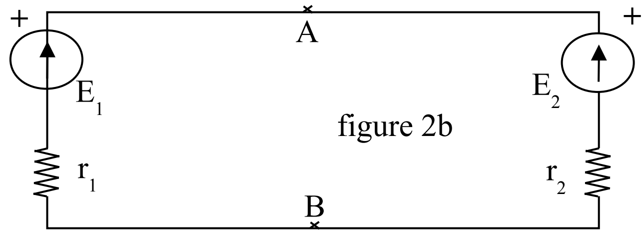


figure 2b

Partie active qui sera remplacée par I_0 et R_N

<u>Calcul de R_N</u>. Résistance équivalente de la partie active.

D'abord, on court-circuite les générateurs de tension et on ouvre les générateurs de courant.

Dans notre cas, on court-circuite les générateurs E_1 et E_2 de la figure 2b pour obtenir le schéma de la figure 3.

$R_N = r_1 // r_2 = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

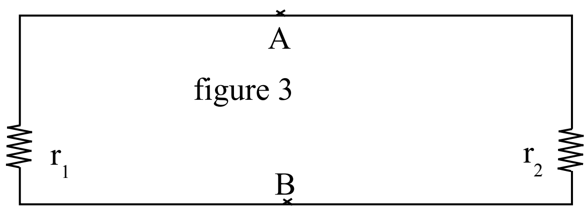
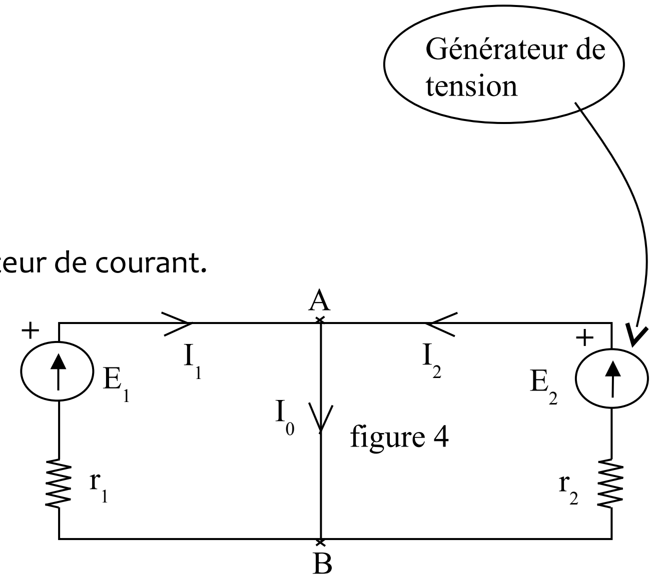


figure 3

$$\boxed{R_N = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}}$$

Même résultat qu'en Thévenin.

🏛 <u>Calcul de I_o</u>. Courant de court-circuit du générateur de courant.



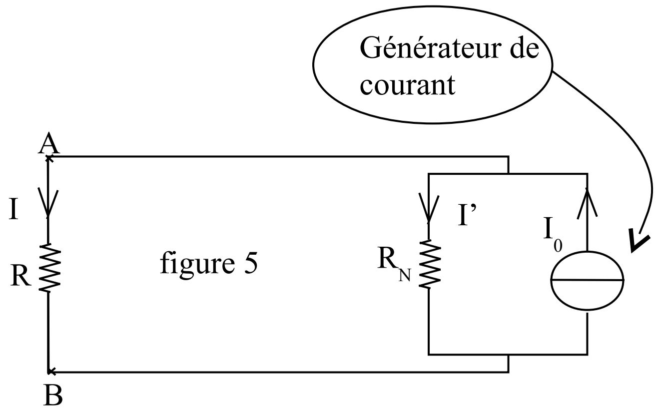
Comme il a été déjà dit au dessus,
On court-circuite les points A et B
Pour calculer le courant I_o du fil AB de court-circuit.

$I_o = I_1 + I_2$

Avec $I_1 = \dfrac{E_1}{r_1}$ et $I_2 = \dfrac{E_2}{r_2}$

Alors $I_0 = \dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2} = \dfrac{E_1 \cdot r_2 + E_2 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_2}$

🏛 Circuit équivalent :



🏛 <u>Calcul de I de la branche AB</u>:

$U_{AB} = R \cdot I = R_N \cdot I'$
$I_o = I + I'$
$I' = I_o - I$
$U_{AB} = R \cdot I = R_N \cdot (I_o - I)$.

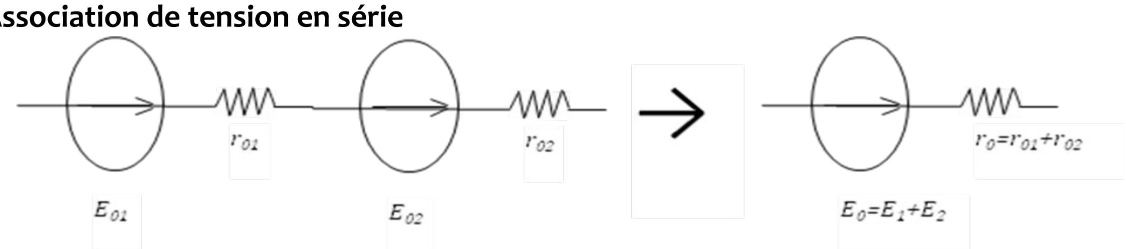
$(R + R_N) \cdot I = R_N \cdot I_o$

$$I = \frac{R_N}{R + R_N} \cdot I_0 = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot I_0}{R(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} \cdot \frac{E_1 \cdot r_2 + E_2 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

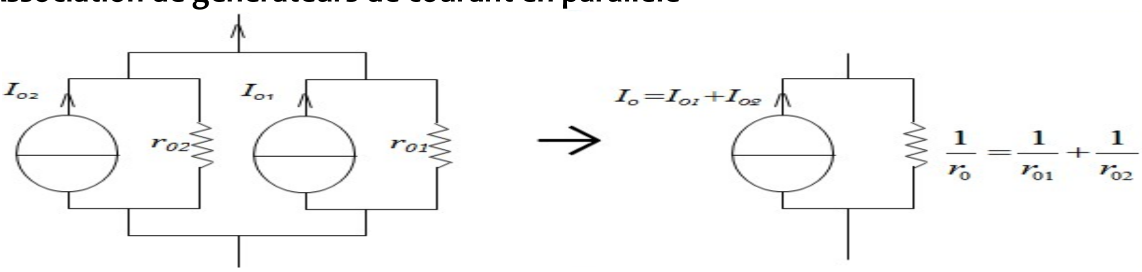
$$\boxed{I = \frac{E_1 . r_2 - E_2 . r_1}{R.(r_1 + r_2) + r_1 . r_2}}$$

e) **Association des générateurs de tensions.**

***Association de tension en série**

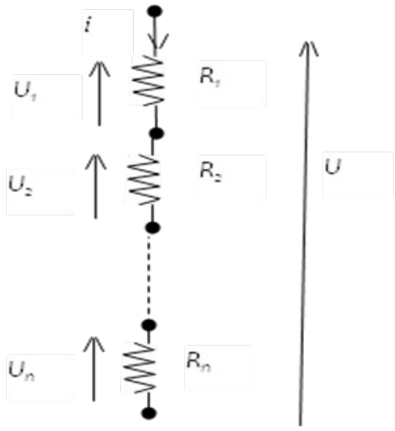


***Association de générateurs de courant en parallèle**



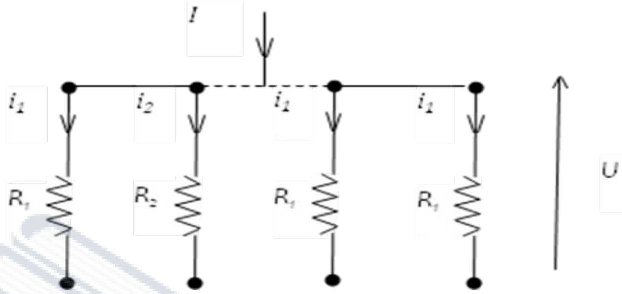
f) Diviseur de tension

$$U_n = R_n.i = R_n.\frac{U}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} = R_n.\frac{U}{\sum R_i}$$



g) Diviseur de courant.

$$i_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{1}{R_1}.R_e.I \qquad\qquad i_k = \frac{U}{R_k} = \frac{1}{R_k}.R_e.I$$



Pour deux résistances en //.

$$i_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{1}{R_1}\frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}.I = \frac{R_2}{R_2 + R_1}.I$$

Cas particulier.

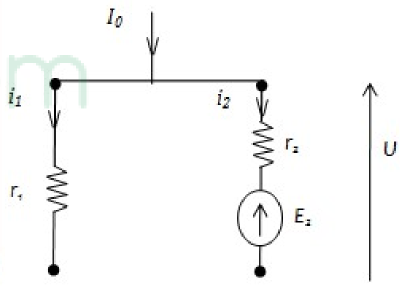
$$I_0 = i_1 + i_2$$

$$U = E_2 + r_2.i_2 = E_2 + r_2.(I_0 - i_1)$$

$$i_1.r_1 = U = E_2 + r_2(I_0 - i_1)$$

$$i_1(r_1 + r_2) = E_2 + r_2 I_0 \qquad i_1 = \frac{E_2 + r_2 I_0}{r_1 + r_2}$$

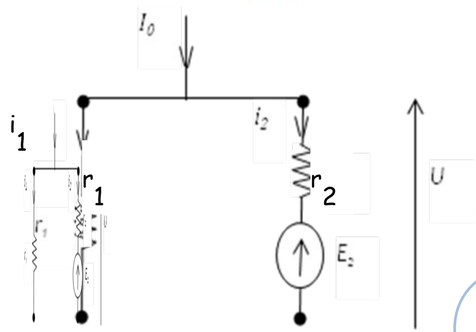
Pour comparer avec le cas de deux résistances en //: $i_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{r_2.I_0}{r_2 + r_1}$



$$E_2 + r_2 i_2 = r_1.i_1 = r_1.(I_0 - i_2) \longrightarrow i_2.(r_1 + r_2) = r_1 I_0 - E_2$$

$i_2 = \frac{r_1 I_0 - E_2}{r_1 + r_2}$ Pour comparer avec le cas de deux résistances en //: $i_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{r_1.I_0}{r_2 + r_1}$

Exercice : Trouver les deux courants i_1 et i_2 en fonction de I_0 , E_1 E_2 , $r_1$et r_2 dans le cas suivant.

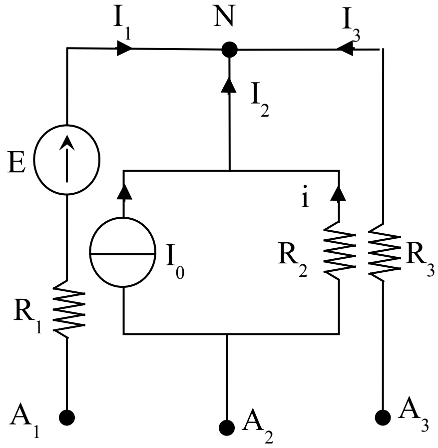


Rép : $i_1 = \dfrac{r_2 I_0 + E_2 - E_1}{r_1 + r_2}$ et $i_2 = \dfrac{r_1 I_0 + E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$

f) Théorème de Millman (Loi des nœuds en termes de potentiels).

Le théorème de Millman est une réexpression de la loi des nœuds.

On va faire une application sur un circuit, c'est la loi des nœuds en termes de potentiels puis on va généraliser l'expression.



<u>Le courant I_1 sur la branche A_1N.</u>

$U_N - UA_1 = E - R_1.I_1$

$I_1 = 1/R_1.(E + (U_{A1} - U_N))$

$I_1 = G_1.(E_1 + (U_{A1} - U_N))$ avec $G_1 = 1/R_1$.

<u>Le courant I_2 sur la branche A_2N.</u>

$U_N - UA_2 = - R_2.i$ avec $I_2 = I_o + i$ et $i = I_2 - I_o$.

$U_N - UA_2 = - R_2.(I_2 - I_o) = R_2.I_o - R_2.I_2)$

$I_2 = I_o + 1/R_2.(U_{A2} - U_N)$.

$I_2 = I_o + G_2.(U_{A2} - U_N)$ avec $G_2 = 1/R_2$.

<u>Le courant I_3 sur la branche A_3N.</u>

$U_N - UA_3 = - R_3.I_3$ avec $I_3 = 1/R_3.(U_{A3} - U_N)$.

$I_3 = G_3.(U_{A3} - U_N)$ avec $G_3 = 1/R_3$.

on appliqué la loi des nœuds sur N $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ et en général $\Sigma I_K = 0$.

$I_1 + I_2 + I_3 = 0 = G_1.E_1 + G_1.(U_{A1} - U_N) + I_o + G_2.(U_{A2} - U_N) + G_3.(U_{A3} - U_N)$

Pour généraliser on ajoute le terme $\varepsilon_k = \pm 1$ devant E et I_o.

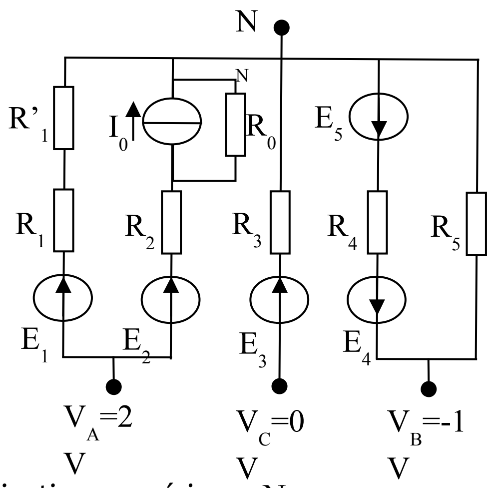
$\varepsilon_k = +1$ sens du courant de A_k vers N et $\varepsilon_k = -1$ dans le sens opposé.

$\Sigma I_K = 0 = \Sigma G_k.[\varepsilon_k E_k + (U_{Ak} - U_N)] + \Sigma \varepsilon_k I_{ok}$

$0 = - \Sigma G_k.U_N + \Sigma G_k.[\varepsilon_k E_k + U_{Ak}] + \Sigma \varepsilon_k I_{ok}$

$\Sigma G_k.U_N = \Sigma G_k.[\varepsilon_k E_k + U_{Ak}] + \Sigma \varepsilon_k I_{ok}$

$$U_N = \frac{\sum G_k [\varepsilon_k E_k + U_{Ak}] + \sum \varepsilon_k I_{0k}}{\sum G_k}$$



Entre deux points M et N

$$U_N - U_M = \frac{\sum G_k \varepsilon_k E_k + \sum \varepsilon_k I_{0k}}{\sum G_k}$$

Exercice d'application :

Déterminer l'expression du potentiel U_N puis faire l'application numérique

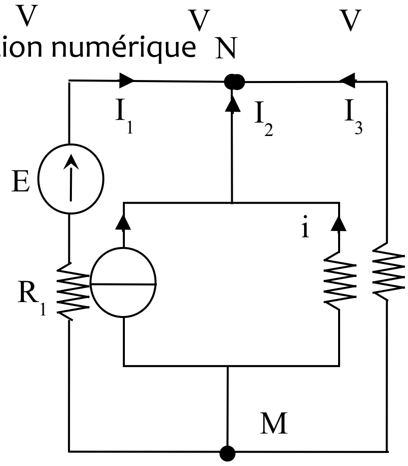
Avec :

$I_o = 2A$, $E_1 = 5V$, $E_2 = 1V$, $E_3 = 3V$, $E_4 = 2V$,

$E_5 = 6V$, $R_o = 2\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $R'_1 = 4\Omega$,

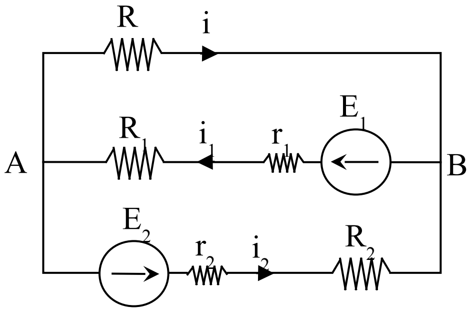
$R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 10\Omega$.

Réponse :

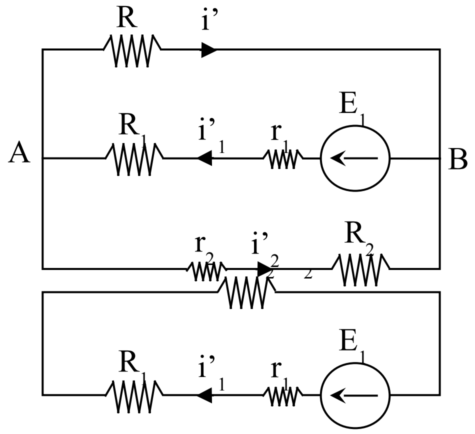


$$U_N = \frac{\frac{5+2}{2+4}+\frac{1+2x2+2}{2+2}+\frac{3}{2}-\frac{2+6+1}{2}}{\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} = -\frac{5}{79}$$

.



la méthode de superposition consiste à calculer les courants produits dans chaque branche par chaque f.é.m. prise individuellement, en court-circuitant les autres f.é.m. Ensuite, pour chaque branche, on ajoute les courants dus à chaque f.é.m. présente dans le circuit, en tenant compte de leur signe. Cette méthode est justifiée par la linéarité d'un tel circuit qui ne comporte que des résistances ohmiques.



1ERE étape : Calcul des courants du générateur E_1.

Calculons d'abord les courants dus à E_1, en court-circuitant E_2, ce qui donne le circuit suivant :

Calcul de i'_1:

Il est plus simple de chercher d'abord le courant i'_1.

R en parallèle avec (R_2+r_2) et d'après la loi des nœuds $i'_1=i'+i'_2$.

Une seule maille alors un seule courant c'est la loi de Pouillet. $i'_1 = \frac{E_1}{R_1+r_1+R//(R_2+r_2)} = \frac{E_1}{R_1+r_1+\frac{R(R_2+r_2)}{R+R_2+r_2}}$

$$i'_1 = \frac{(R+R_2+r_2)E_1}{(R_1+r_1)(R+R_2+r_2)+R(R_2+r_2)} = \frac{(R+R_2+r_2)E_1}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

Pour calculer les autres courants i'_2 et i' , on utilise le théorème de Millman afin de déterminer d'abord U_A-U_B.

$$U_A - U_B = \frac{\frac{E_1}{R_1+r_1}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1+r_1}+\frac{1}{R_2+r_2}} = \frac{R.(R_2+r_2)E_1}{(R_1+r_1).(R+R_2+r_2)+R.(R_2+r_2)}$$

$$U_A - U_B = \frac{R.(R_2+r_2)E_1}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

Calcul de i'_2 :

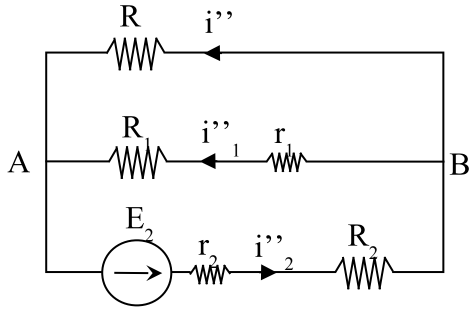
Alors $i'_2 = \frac{U_A - U_B}{R_2+r_2} = \frac{RE_1}{(R_1+r_1).(R+R_2+r_2)+R.(R_2+r_2)} =$

$$\frac{RE_1}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

<u>Calcul de i'</u>:

Alors $i'=\dfrac{U_A - U_B}{R}=\dfrac{(R_2+r_2)E_1}{(R_1+r_1).(R+R_2+r_2)+R.(R_2+r_2)}=$

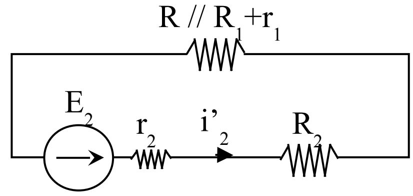
$$i'=\frac{(R_2+r_2)E_1}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$



2EME étape : <u>Calcul des courants du générateur E_2</u>.

Calculons d'abord les courants dus à E_2, en court-circuitant E_2, ce qui donne le circuit suivant :

<u>Calcul de i''$_2$</u>:



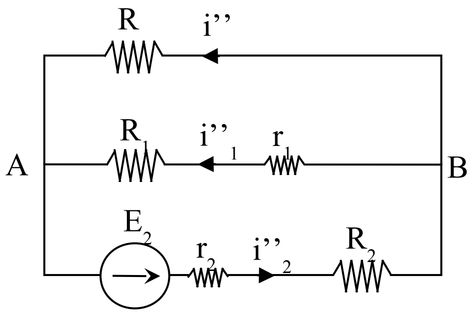
Il est plus simple de chercher d'abord le courant i''$_2$.

R en parallèle avec (R_1+r_1).

Une seule maille alors un seule courant c'est la loi de Pouillet. $i''_2=\dfrac{E_2}{R_2+r_2+R//(R_1+r_1)}=\dfrac{E_2}{R_2+r_2+\dfrac{R(R_1+r_1)}{R+R_1+r_1}}$

$$i''_2=\frac{(R+R_1+r_1)E_2}{(R_2+r_2)(R+R_1+r_1)+R(R_1+r_1)}=\frac{(R+R_1+r_1)E_2}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

Pour calculer les autres courants i''$_1$ et i'' , on utilise de nouveau le théorème de Millman afin de déterminer d'abord U_B-U_A.



$$U_B - U_A=\frac{\dfrac{E_2}{R_2+r_2}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_1+r_1}+\dfrac{1}{R_2+r_2}}=$$

$$U_B - U_A=\frac{R.(R_1+r_1)E_2}{(R_2+r_2).(R+R_1+r_1)+R.(R_1+r_1)}$$

$$U_B - U_A=\frac{R.(R_1+r_1)E_2}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

<u>Calcul de i''$_1$</u>:

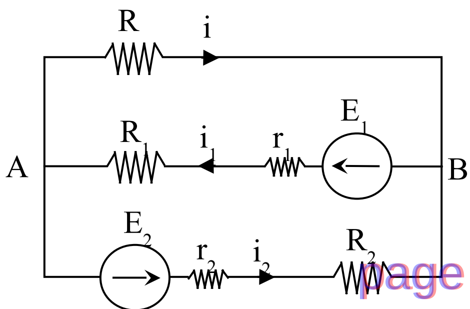
Alors $i''_1=\dfrac{U_B - U_A}{R_1+r_1}=\dfrac{RE_2}{(R_2+r_2).(R+R_1+r_1)+R.(R_1+r_1)}=$

$$\frac{RE_2}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$

<u>Calcul de i''</u>:

Alors $i''=\dfrac{U_B - U_A}{R}=\dfrac{(R_1+r_1)E_2}{(R_2+r_2).(R+R_1+r_1)+R.(R_1+r_1)}=$

$$\frac{(R_1+r_1)E_2}{R(R_1+r_1+R_2+r_2)+(R_1+r_1)(R_2+r_2)}$$



Calcul des trois courants i_1, i_2 et i :

Superposition des courants

$i = i' - i''$ puis $i_1 = i_1' + i_1''$ et $i_2 = i_2' + i_2''$.

Le courant i :

$$i = i' - i'' = \frac{(R_2 + r_2)\mathrm{E}_1}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)} - \frac{(R_1 + r_1)\mathrm{E}_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

$$i = \frac{(R_2 + r_2)\mathrm{E}_1 - (R_1 + r_1)\mathrm{E}_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

Le courant i_1 :

$$i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{(R + R_2 + r_2)E_1}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)} + \frac{\mathrm{RE}_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

$$i_1 = \frac{(R + R_2 + r_2)E_1 + \mathrm{RE}_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

Le courant i_2 :

$$i_2 = i_2' + i_2'' = \frac{\mathrm{RE}_1}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)} + \frac{(R + R_1 + r_1)E_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

$$i_2 = \frac{\mathrm{RE}_1 + (R + R_1 + r_1)E_2}{R(R_1 + r_1 + R_2 + r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}$$

Conclusion :

Le nombre de courants à déterminer est de plus en plus important si le montage électrique compte un nombre important de générateurs.
Il faut déterminer le courant de chaque branche en gardant un seul générateur dans le montage à la fois.
Finalement le courant de chaque branche est la superposition (en valeur algébrique) de l'ensemble des courants trouvés individuellement.
Cette méthode devient lourde et compliquée si le nombre de générateurs est important.

UNIVERSITE ABDELMALEK ESAADI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
TETOUAN

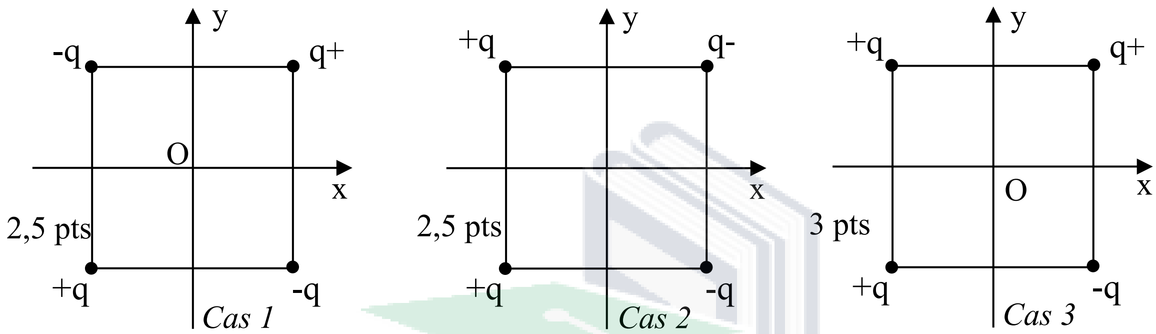
ANNEE UNIVRSITAIRE 2012/2013
MODULE PHY2, SMPC
Avril 2011

CONTROLE D'ÉLECTRICITÉ

Durée 1h

EXERCICE 1

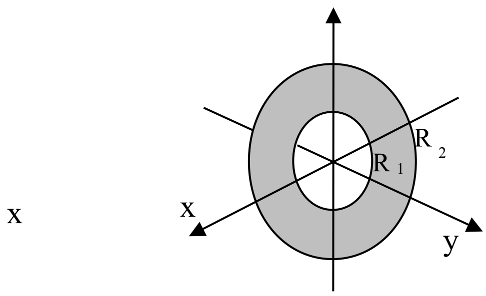
On considère quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré dont la longueur de la diagonale est $2a$. Calculer le champ $\vec{E}$ et le potentiel électrostatiques V au centre $O(0,0)$ du carré dans les 3 cas suivants :



EXERCICE 2

Dans un disque de centre O, la densité électrique σ constante, est répartie entre deux rayons
R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ voir la figure en dessous.

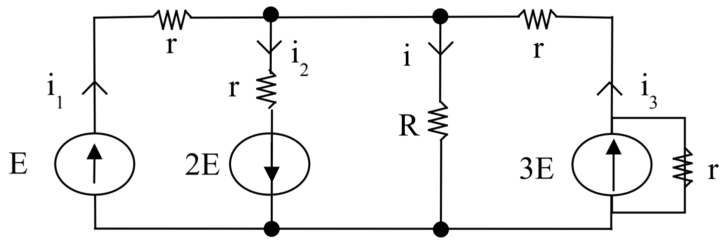
1) Calculer le potentiel électrique $V(y)$ en un point M de son axe oy.
2) Déduire le champ électrique $E(y)$.
3) Déduire le champ E(y) et le potentiel $V(y)$ en un point M de son axe crée par un disque de rayon R et de densité σ constante.
4) Tracer les allures de $E(y)$ et $V(y)$ du disque de rayon R. Conclusion.
5) Déduire le champ créé par un plan de densité σ constante.



EXERCICE, RATTRAPAGE D'ÉLECTRICITÉ juillet 2013

On veut déterminer les expressions littérales des quatre courants du circuit ci-dessous moyennant la démarche suivante :

1) Appliquer le théorème de Norton pour calculer le courant $\mathbf{i_2}$.
2) Appliquer le théorème de Thevenin pour calculer le courant $\mathbf{i_1}$.
3) A l'aide de la loi des mailles, en déduire les courants **i** et $\mathbf{i_3}$, en fonction de $\mathbf{i_1}$.

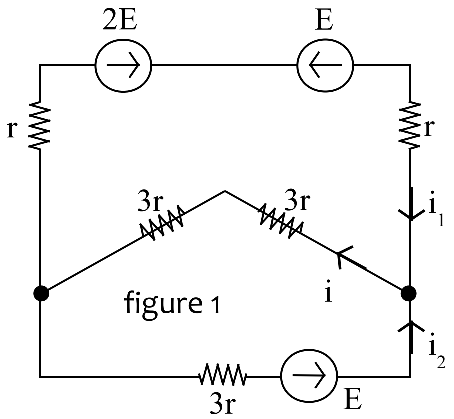


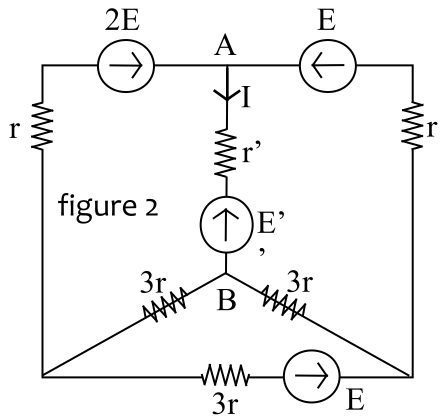
EXERCICE CONTROLE D'ÉLECTRICITÉ Mai 2014

1) Déterminer les trois courants i1, i2 et i circulant dans le circuit de la figure 1.

A l'aide du théorème de Thévenin, on veut calculer le courant I sur le circuit de la figure 2. Après avoir enlevé la branche AB du circuit, on procède à la détermination de son circuit équivalent de Thévenin .

2) Donner le circuit équivalent de Thévenin.
3) donner l'expression du courant I de la branche AB en fonction de ET, RT, E' et r'.
4) Calculer RT la résistance équivalente de Thévenin.
5) A l'aide de la première question, calculer ET (force électromotrice) du générateur équivalent de Thévenin.
6) Déduire le courant I en fonction de E, r, E' et r'.





UNIVERSITE ABDELMALEK ESAADI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
TETOUAN

ANNEE UNIVRSITAIRE 2013/2014
MODULE PHY2, SMPC
01 juillet 2014

x

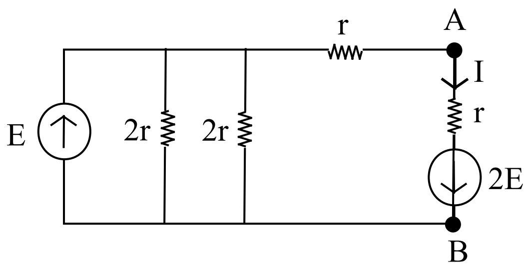
CONTROLE RATTRAPAGE D'ÉLECTRICITÉ

Durée 1h

EXERCICE 1

Pour le circuit de la figure en dessous, déterminer le courant I circulant dans la branche AB en utilisant :

1. Le théorème de Thévenin.
2. Le théorème de Norton.



EXERCICE 2

Pour tout l'exercice, l'origine des potentiels est prise à l'infini.

1. Calculer le potentiel V_1 de la sphère métallique $\mathbf{S_1}$ de rayon $\mathbf{R_1}$ portant la charge Q_1.

La sphère $\mathbf{S_1}$ est maintenant entourée d'une sphère conductrice creuse $\mathbf{S_2}$ isolée, concentrique de rayon intérieur R_2 ($R_2>R_1$) et de rayon extérieur R_3. **La charge initiale de la sphère S_2 est $-Q_1$.**

2. Calculer le potentiel V_2 de la sphère creuse $\mathbf{S_2}$.
3. Calculer le nouveau potentiel V'_1 de la sphère $\mathbf{S_1}$.
4. Calculer la capacité C du condensateur formé par S1 et S2.

On branche en parallèle à ce condensateur Chargé un autre de capacité 3C, initialement neutre :

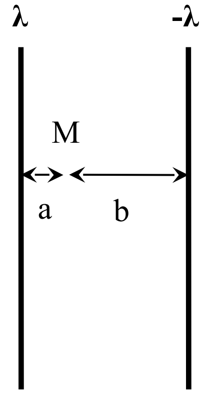
5. Déduire la capacité équivalente.
6. Calculer la charge et le potentiel de chaque condensateur.

Exercice

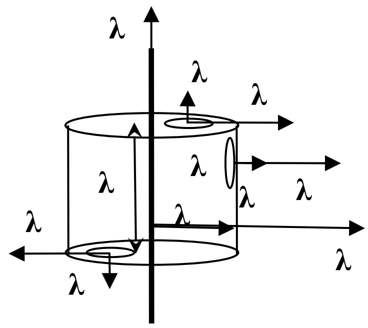
Soit un fil infini uniformément chargée avec une densité linéaire λ.

1) En utilisant la méthode directe la méthode de Gauss, calculer le champ E à une distance x de ce fil.

2) On dispose maintenant d'un deuxième fil infini pourtant une densité linéaire -λ et disposé par rapport au premier fil comme l'indique la figure ci-dessous. En supposant que le point M se trouvant dans le plan formé par les deux fils, donner la valeur du champ au point M.



Corrigé :



$$\phi_{E/S} = \int_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \phi_{E/S.Bas1} + \phi_{E/S.Bas2} + \phi_{E/S.lat}$$

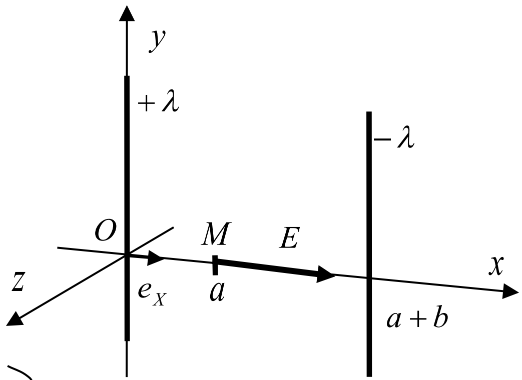
$\phi_{E/SB1} = \phi_{E/SB2} = 0$ car $E \perp dS$ alors $\phi_{E/S} = \phi_{E/S.lat} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

$\phi_{E/S} = \phi_{E/S.lat} = \iint E.dS = \iint E.dS$ car E *coolinière avec dS*

$= E \iint_{S.lat} dS = ES._{lat} = E.2\pi.a.h = \dfrac{h\lambda}{\varepsilon_0}$ E st constante sur Slat.

$$E.2\pi.a.h = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}}$$

Pour les deux fils ensemble de densité λ et –λ (voir figure en dessus)



$$E = E_\lambda + E_{-\lambda}$$

$$\vec{E}_\lambda = \frac{\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}\vec{e}_X \text{ et } \vec{E}_{-\lambda} = \frac{\lambda}{2b\pi\varepsilon_0}\vec{e}_X$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}\vec{e}_X + \frac{\lambda}{2b\pi\varepsilon_0}\vec{e}_X = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]\vec{e}_X$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]\vec{e}_X = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a+b}{ab}\right]\vec{e}_X$$