

Cours d'électricité

Théorème de Gauss

Dans ce chapitre nous allons introduire une formulation différente des lois de l'électrostatique.

Cette loi ne modifie en aucun cas les principes de base que nous avons développés d'après la loi de Coulomb, mais la formulation de Gauss permet un calcul plus focal et efficace des effets des charges électriques.

La formulation de Gauss repose sur la notion de flux.

I Flux d'un vecteur.

1° Flux à travers un élément de surface ds soit un vecteur $\vec{A}$

$$\text{On a } d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

2° Flux à travers une surface fermée.

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

II Flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle.

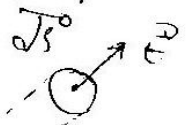
1° Flux à travers un élément ds.

Le flux élémentaire du champ $\vec{E}$ à travers ds est $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

$$= \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot \cos \theta$$

A partir du champ créé par une charge

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$



on obtient alors :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = d\Phi$$

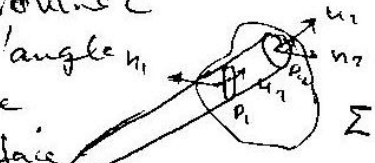
On voit à partir de $\cos$ l'élément de surface dS
 $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS$

Le flux dépend directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et inversement de la distance. $d\Omega > 0$ toujours.

2° Flux de E à travers une surface fermée

a) La charge q est à l'extérieur de Σ

considérons une charge ponctuelle q située au point O à l'extérieur de Σ (Σ enfermant un volume τ). Soit un tube de champ élémentaire d'angle η , solide élémentaire $d\Omega$. $d\Omega$ découpe sur la surface Σ deux éléments de surface dS_1 et dS_2 sont vues respectivement à partir de O avec le même angle $d\Omega$. Les vecteurs unitaires $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orientés vers l'extérieur.



Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers ces éléments de surfaces dS_1 , dS_2 sont :

pour dS_1 : $d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-d\Omega)$

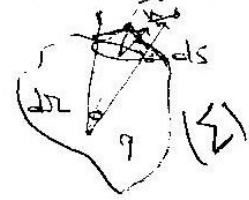
pour dS_2 : $d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2}{r_2^2} dS_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

$d\Phi$ est il en résulte que le flux sortant à travers dS_1 et dS_2 est : $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$

Il en est de même pour tous les cônes élémentaires qu'on peut former en balayant la surface fermée Σ par conséquent le flux totale Φ due par la charge q à travers Σ est nul $\Phi = 0$

b) La charge q est à l'intérieur de la surface fermée.
considérons une charge ponctuelle à l'intérieur de la surface fermée Σ

soit un tube de champs élémentaire qui découpe Σ en un élément dS sous un angle solide élémentaire $d\Omega$



le flux de E à travers dS est : $d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

le flux totale de $\vec{E}$ à travers Σ est $\Phi = \oint_{\Sigma} d\Phi$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_T$$

Ω_T est l'angle solide sous lequel la surface fermée Σ est vue depuis o où est placée la charge q , est égale à 4π

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \Rightarrow \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

c) cas générale
ces résultats se généralise à un ensemble quelconque de charges (charge ponctuelle continues) et peu n'importe quelle surface fermée entourant une distribution de charges.

considérons une surface fermée Σ , à l'intérieur de Σ il y a n charges ponctuelles $q_1, \dots, q_n$ et à l'extérieur

$$\Phi \text{ totale : } \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\text{d'où } \Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

avec $Q_i = \sum q_i$ est la somme des charges, pour distribution

$$Q_v = \iiint \rho d\tau \longrightarrow \text{distributions volumiques,}$$

$$Q_s = \iint \sigma dS \longrightarrow \text{surfaciques,}$$

$$Q_l = \int \lambda dl \longrightarrow \text{linéiques,}$$

30/ Enoncé du théorème de Gauss.
Le flux du champ électrostatique sortant à travers une surface fermée est égal au quotient

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

III Symétrie et surfaces de Gauss.

10/ Topographie du champ applique le th. de Gauss.
il faut connaître d'abord la direction, le sens du champ $\vec{E}$

Soit les règles suivantes pour déterminer le sens et la direction du champ $\vec{E}$

- le champ $\vec{E}$ a au moins la symétrie des charges qui le créent : symétrie, cylindrique, sphérique.
- le champ $\vec{E}$ est invariant dans une symétrie par rapport à un élément de symétrie
- on se place en un point M où on cherche le champ $\vec{E}$
- S'il passe un plan de symétrie ceci implique que le champ est porté par ce plan
- S'il passe un axe de symétrie ceci implique que le champ est porté par cet axe
- $\vec{E}$ est transformée en $\vec{E}$ dans une symétrie par rapport à un plan qui lui est perpendiculaire.



20/ choix de la surface de Gauss.

En général, le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée se calcule par la relation.

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

cette intégration permet être simplifiée par le choix de la géométrie de Σ qu'on appelle surface de Gauss

Surface de Gauss: surface imaginaire sert à faire le calcul

Cette surface est choisie de façon que les charges considérées représentent un élément de symétrie pour cette surface pour que :

- le champ $\vec{E}$ et l'élément de surface soient colinéaires ($\vec{E} \parallel d\vec{S}$) ou perpendiculaires ($\vec{E} \perp d\vec{S}$).

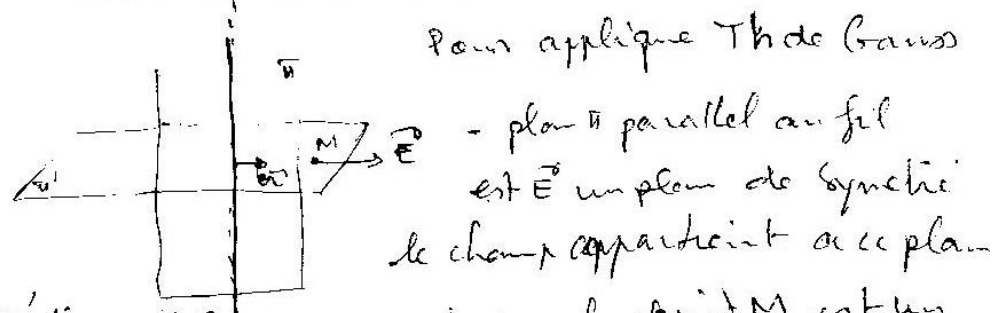
C'est-à-dire
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm E dS & \vec{E} \parallel d\vec{S} \\ \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 & \vec{E} \perp d\vec{S} \end{cases}$$

- La surface de Gauss ne doit pas passer par les charges dans une distribution de charges ponctuelles
- Pour une distribution linéique ou surfacique la surface de Gauss ne doit pas être confondue avec la ligne (fil infini...) ou la surface chargée (sphère chargée en surface)

* pour une distribution volumique aucune introduction (exemple sphère chargée en volume)

IV Application du Th de Gauss.

Détermination du champ créé par un fil infini chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$



- le plan π' à l'axe du fil et passant par le point M est un plan
- Il en résulte que $\vec{E}$ appartient à l'intersection des deux plans. Donc $\vec{E}$ est toujours perpendiculaire au fil le champ $\vec{E}$ est radial ($r = 0$)
- On a donc une symétrie cylindrique
- La surface de Gauss est constituée donc

d'un cylindre fermé par une surface une surface latérale et 2 base.

La surface de Gauss est un cylindre d'une
le fil infini de rayon r et de hauteur h

1°/ Calcul du flux.

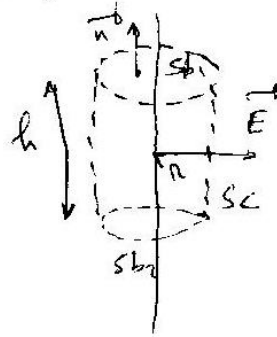
Le Flux Φ de $\vec{E}$ à travers la surface fermée peut
être décomposé en trois contribution.

le Flux Φ_1 à travers la base supérieure (S_{b1})
et le flux Φ_2 à travers la base (S_{b2})
et le Flux Φ_c à travers la surface S_c
(S_c surface latérale)

On a donc $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_c$

$$= \iint_{S_{b1}} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_{b2}} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_c} \vec{E} d\vec{S}$$

$\vec{E} \perp \vec{n} \quad \vec{E} \perp \vec{n}$



$$\Rightarrow \Phi = \iint_{S_c} \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \int_{S_c} E dS = E \int_{S_c} dS = E 2\pi r h$$

$$\boxed{\Phi = E 2\pi r h} \quad (1)$$

2°/ Calcul de la charge intérieure à la surface S
de Gauss

$$Q_i = \int \lambda dl = \lambda h = Q_i$$

App. des Th de Gauss

la relation (1) = $\frac{\text{La relation 2}}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r}$$

II Equations locaux pour le champ et le potentiel

considérons une surface fermée S , on a d'après le Th de Gauss de la divergence

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_Z \operatorname{div} \vec{A} dZ$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_Z \operatorname{div} \vec{E}(M) dZ$$

Z étant le volume limité par la surface S et dZ élémentaire de volume.

Supposons que les charges sont réparties d'une façon continue dans le volume Z intérieur à la surface S d'après le Th de Gauss.

$$\Phi = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0} \quad \sum Q_i = \iiint_Z \rho dZ \quad \rho \text{ étant la densité volumique de charges.}$$

$$\text{D'autre part } \Phi = \iiint_Z \operatorname{div} \vec{E} dZ$$

$$\Rightarrow \iiint_Z \operatorname{div} \vec{E} dZ = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_Z \rho(M) dZ$$

Ceci donne $\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ forme locale du th de Gauss.

2°/ Equation de Poisson.

Le potentiel V et le champ $\vec{E}$ sont reliés par la relation $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E}(M) = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} V(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

or $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$ laplacien

$$\Rightarrow -\Delta(V(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0}$$

Equation de Poisson

3°/ Equation de Laplace:

En un point où il n'y a pas de charges
 $P(M)=0 \Rightarrow \boxed{\Delta V(M)=0}$ Equation de Laplace.

