

<http://www.exomaroc.com/>

1/ $\int \ln(a+x) dx, a \geq 0$

Intégration par partie, on pose: $u(x) = \ln(a+x); v'(x) = 1$

2/ $\int P(x) \cdot \ln(a+x) dx; a \geq 0; d^0(P) = n \in \mathbb{N}^*$

I.P.P. on pose: $u(x) = \ln(a+x)$ et $v'(x) = P(x)$

3/ $\int P(x) \cdot e^{ax} dx; d^0(P) = n \in \mathbb{N}^*$

I.P.P, on pose: $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = e^{ax}$ [$n \Rightarrow$ I.P.P]

4/ $\int P(x) \cdot \cos(ax) dx$ ou $\int P(x) \cdot \sin(ax) dx; d^0(P) = n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$.

I.P.P: $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = \cos(ax)$ ou $\sin(ax)$ [$n \Rightarrow$ I.P.P]

<http://www.exomaroc.com/>

5/ $\int R(x) dx; R$: fonction Rationnelle.

On se Ramène à des formes Simples:

• $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + c$

• $\int \frac{u'(x) dx}{(u(x))^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{(u(x))^{\alpha-1}} + c \quad (\alpha \neq 1)$

• $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \text{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$

6/ $\int R(e^x) dx; R$: fonction Rationnelle en e^x

on pose le changement de Variable:

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; (on se Ramène à l'intégral 5).

formule de l'intégration par partie:

$\int u'v dx = [u \cdot v] - \int u v' dx$

7/ $\int P(\sin(x), \cos(x))$; P: Polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$$\Rightarrow \int \cos^p(x) \sin^q(x) dx \quad ; \quad p \text{ et } q \text{ deux éléments de } \mathbb{N}.$$

• Si : $q = 2k+1$ "impaire" [on pose : $u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x) dx$]

$$I = \int (\sin^2(x))^k \cos^p(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^k \cos^p(x) \sin(x) dx$$

• Si : $p = 2k+1$ "impaire" [on pose : $u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$]

• Si p et q les deux paires : Dans ce cas on a : $\cos(x) \sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

Δ En générale : $I = \int f(x) dx \Rightarrow w(x) = f(x) dx$ [f : $\begin{cases} \cos(x) \\ \sin(x) \end{cases}$]

- $u = \cos(x)$ Si $w(-x) = w(x)$
 - $u = \sin(x)$ Si $w(\pi - x) = w(x)$
 - $u = \tan(x)$ Si $w(\pi + x) = w(x)$
- } Les Règles de Briche.

8/ $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$; R: fonction Rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$:

on pose le changement de Variable :

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a les formules :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} ; dt = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

(et on se Ramène à 5)

9/ $\int R(\operatorname{Sh}(x), \operatorname{ch}(x))$; R: fonction Rationnelle en $\operatorname{Sh} x$ et $\operatorname{Ch} x$

on pose : $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} ; \operatorname{Sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} ; dt = \frac{2 dt}{1-t^2}$

• $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	• $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$
• $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$	• $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
• $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	• $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
• $\cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$	• $\sin(x) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
• $\operatorname{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	• $\operatorname{Sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
• $\operatorname{Ch}^2(x) - \operatorname{Sh}^2(x) = 1$	

10/ $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$; R: fonction Rationnelle contenant $\sqrt{x^2+1}$:

on pose: $x = \text{Sh}(t)$, $dx = \text{Ch}(t) dt \Rightarrow x^2 + 1 = \text{Ch}^2(t)$.
(et on se ramène à 9)

11/ $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$; R: " " contenant $\sqrt{x^2-1}$

on pose: $x = \text{Ch}(t)$; $dx = \text{Sh}(t) dt \Rightarrow x^2 - 1 = \text{Sh}^2(t)$
(et on se ramène à 9)

12/ $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$; R: " " contenant $\sqrt{1-x^2}$.

on pose: $x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$, $\begin{cases} dx = -\sin(t) dt \\ dx = \cos(t) dt \end{cases}$ ou
 $\Rightarrow 1-x^2 = \sin^2(t)$ ou $\cos^2(t)$

13/ $\underbrace{\int \cos^{2n}(x) dx}_{I'}$ ou $\underbrace{\int \sin^{2n}(x) dx}_{I''}$

$I' = \int \cos^{2n}(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))^n \cos(x) dx \Rightarrow$ on pose: $u = \cos(x)$.

$I'' = \int \sin^{2n}(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^n \sin(x) dx \Rightarrow$ on pose: $u = \cos(x)$.

14/ $\int \cos^{2n}(x) dx$ ou $\int \sin^{2n}(x) dx$

on utilise les formules de linéarisation:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}; \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Primitives usuelles

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + cte \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + cte$
- $\int u'(x) \cdot u^a(x) dx = \frac{1}{a+1} \cdot u^{a+1}(x) + cte \quad (a \neq -1)$
- $\int u'(x) \cdot e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + cte$
- $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + cte$
- $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = \frac{-1}{u(x)} + cte$
- $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + cte$
- $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + cte$
- $\int (1 + \tan^2(x)) dx = \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + cte$
- $\int \frac{u'}{1+u^2} du = \text{Arctan}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} du = \text{ArcSin}(u) + cte$
- $\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} du = \text{Arccos}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{1-u^2} du = \text{Argth}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} du = \text{ArgSh}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} du = \text{Argch}(u) + cte$

$$\bullet \int \frac{u'}{u^2 + a^2} du \quad (a > 0) = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$$

$$\bullet \int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$$

$$\bullet \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \operatorname{ArgSh}\left(\frac{u}{a}\right) + cte.$$

$$\bullet \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \operatorname{ArgCh}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$$

$$\bullet \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + cte.$$

والله ولي التوفيق
 « Abdellah Hazm »