

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ibn Tofaïl
Kénitra

Cours d'Analyse II

S2

**Filières : SMP /SMC (Deuxième semestre, première
année)**

Notes rédigées par :

M. BENELKOURCHI Slimane

Professeur à l'Université Ibn Tofaïl.

Mars 2011

Table des matières

Chapitre 1. Calcul Intégral	1
1.1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue	2
1.2. Premières propriétés de l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$	3
1.3. Intégrale d'une fonction bornée ¹	4
1.4. Dérivation et Intégration	5
1.5. Techniques de calcul d'intégral	6
1.6. Formules de la moyenne	9
1.7. Formule de Taylor–Lagrange avec reste intégral	10
1.8. Approximations d'Intégrales	11
1.9. Exercices	12
Chapitre 2. Intégrales généralisées	14
2.1. Définition des intégrales généralisées	14
2.2. Etude de la convergence	16
2.3. Calcul des intégrales généralisées	19
2.4. Exercices	19
Chapitre 3. Equations différentielles	21
3.1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1	21
3.2. Equations se ramenant à une équation linéaire	22
3.3. Équations différentielles à variables séparées, homogènes	24
3.4. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	27
3.5. Exercices	29

1. Cette section peut être omise en première lecture

CHAPITRE 1

Calcul Intégral

L'intégration est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires et de l'analyse, et utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques. L'intégration permet, entre autres, de calculer la surface de l'espace délimité par la représentation graphique d'une fonction f .

Les opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) et de calcul de probabilités étant souvent soumises à des calculs d'intégrales, l'intégration est un outil scientifique fondamental. C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.

L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et de tout temps, sa place prédominante a façonné l'analyse en offrant à qui une solution, à qui un problème. Le lustre des « méthodes intégrales » en Grèce antique l'atteste, et bien qu'il faille attendre le calcul infinitésimal pour une première formalisation, elles nous avaient déjà offert de profonds et beaux résultats : les Athéniens évaluèrent les grandeurs de l'espace puis en démontrèrent implicitement l'existence et l'unicité ; au XVII^e siècle naissent des méthodes générales de « calcul de l'infini » (rectification de courbes, quadratures, etc.) C'est alors que la méthode des indivisibles de Cavalieri voit le jour.

C'est Leibniz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration (*Geometria recondita*, 1686), perpétué jusqu'aujourd'hui, d'une part par un symbolisme inégalé reliant intégration et dérivation, d'autre part par la mise en place des principaux théorèmes.

La formalisation de cette théorie a revêtu diverses formes. Elle aboutit tardivement, à cause de la complexité des problèmes soulevés :

- que sont les fonctions ? les réels ? (ces questions ne furent pleinement élucidées que grâce au développement de l'analyse au 19^{ème} siècle).

- quelles fonctions peuvent s'intégrer ? (c'est la question de l'intégrabilité ; elle est liée, entre autres, à des problèmes de convergence).

L'intégrale de Riemann (Bernhard Riemann, 1854, publication posthume en 1867) puis l'intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) ont marqué les esprits par leur formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine ; en témoigne des extensions telles que l'intégrale d'Ito-, l'intégrale de Kurzweil-Henstock, ou la récente construction de Bongiorno (1996).

Le but du calcul intégral est de développer des méthodes permettant de calculer les intégrales. La principale méthode pour calculer une intégrale passe par la notion de primitive d'une fonction. La « primitivation » est l'opération qui, à partir d'une fonction f , donne une fonction F dérivable et dont la dérivée est égale à f : $F'(x) = f(x)$.

On montre que toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ admet des primitives, et que l'intégrale de a à b est égale à $F(b) - F(a)$, indépendamment de la primitive choisie. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

affirme que les deux approches de l'intégrale (« aire sous une courbe » et « primitivation »), sont sous certaines conditions les mêmes. Ces conditions peuvent varier selon le type d'intégrale considéré. Ici, on s'intéresse à l'intégration des fonctions continues par morceaux.

1.1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue

1.1.1. Cas d'une fonction positive.

DÉFINITION 1.1. Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient I, J, K les trois points du plan P définis par :

$$\vec{OI} = \vec{i}, \quad \vec{OJ} = \vec{j}, \quad \text{et} \quad \vec{OK} = \vec{i} + \vec{j}.$$

On appelle unité d'aire (notée en abrégé u.a.) l'unité de mesure des aires telle que :

$$\text{Aire}(\text{rectangle OIKJ}) = 1 \text{ u.a.}$$

♣♣♣ OIKJ peut être un carré lorsque le repère est orthonormé.

Si l'on a par exemple, $OI = 3\text{cm}$ et $OJ = 2\text{cm}$, alors une unité d'aire correspond à 6cm^2 .

DÉFINITION 1.2. Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction Continue (ou continue par morceaux) et positive sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle l'intégrale de f de a à b l'aire, exprimée en u.a., du domaine D délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$D = \{M(x, y) \in P; \quad a \leq x \leq b \text{ and } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

On note cette quantité : $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(s)ds$

Les réels a et b s'appellent les bornes de l'intégrale.

♣♣♣ La variable t (ou x ou autre) figurant dans l'intégrale est muette, elle peut être notée par toute autre lettre.

Le symbole dt (ou dx) ne joue aucun rôle pour le moment, si ce n'est de préciser quelle est la variable.

EXEMPLES 1.3. Rapportons le plan P à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$. Ainsi 1 u.a. correspond à 1cm^2 .

1- f est égale à une constante positive k sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b kdt = (b - a)k.$$

2- f affine : $f(x) = mx + p$ supposée positive sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) + p(b - a).$$

1.1.2. Cas d'une fonction de signe quelconque.

DÉFINITION 1.4. Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction Continue (ou continue par morceaux) et négative sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle l'intégrale de f de a à b l'opposé de l'aire, exprimée en u.a., du

domaine D délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$D = \{M(x, y) \in P; \quad a \leq x \leq b \text{ and } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

On note cette quantité : $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(s)ds$

Autrement dit, lorsque f est négative sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b |f(x)|dx.$$

Exercice : Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction Continue. On définit deux fonctions f^+ et f^- par

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1- Vérifier que f^+ est positive, f^- est négative et que $f = f^+ + f^-$ et $f^+ - f^- = |f|$.

2- Montrer que f^+ et f^- sont continues.

DÉFINITION 1.5. Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction Continue (ou continue par morceaux).

On appelle l'intégrale de f de a à b la quantité :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx.$$

En d'autres termes, $\int_a^b f(x)dx$ se calcule en comptant positivement l'aire des domaines où f est positive et négativement l'aires des domaines où f est négative.

1.2. Premières propriétés de l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$

PROPRIÉTÉ 1.6 (positivité de l'intégrale). Si f est continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

DÉMONSTRATION. C'est immédiat puisque une aire est positive. $\square$

PROPRIÉTÉ 1.7 (Compatibilité avec l'ordre). Si f et g sont continues sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors :

$$f \leq g \text{ sur } [a, b], \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

PROPRIÉTÉ 1.8 (Inégalité triangulaire). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)| \quad \forall t \in [a, b].$$

En intégrant les inégalité entre a et b , on obtient

$$- \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

D'où le résultat. $\square$

PROPRIÉTÉ 1.9 (Relation de Chales). Soient f une fonction continue sur un segment I $[a, b]$ et a, b et c trois points de I . Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

PROPRIÉTÉ 1.10 (Linéarité). Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Très délicat à prouver. A admettre. $\square$

1.3. Intégrale d'une fonction bornée¹

DÉFINITION 1.11. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée sur un intervalle borné $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$). On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$.

Notons $S[a, b]$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. Pour chaque $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in S[a, b]$, notons

$$(1.1) \quad I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n \left[(a_i - a_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i[} f(x) \right]$$

et

$$(1.2) \quad J_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n \left[(a_i - a_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i[} f(x) \right].$$

Remarquons que si $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\delta = (b_j)_{0 \leq j \leq m}$ sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, on a toujours $I_\sigma(f) \leq J_\delta(f)$ (exercice : montrer pourquoi), donc

$$(1.3) \quad \sup_{\sigma \in S[a, b]} I_\sigma(f) \leq \inf_{\sigma \in S[a, b]} J_\sigma(f).$$

DÉFINITION 1.12. Si on a l'égalité $\sup_{\sigma \in S[a, b]} I_\sigma(f) = \inf_{\sigma \in S[a, b]} J_\sigma(f)$, alors on dit que f est *intégrable* (au sens de Riemann) sur l'intervalle $[a, b]$, et on note $\int_a^b f(x)dx$ la valeur commune.

DÉFINITION 1.13. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que f est continue sur tous les intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$. On dit que f est *bornée* s'il existe un nombre $N \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leq N$ pour tout $x \in [a, b]$.

THÉORÈME 1.14. Toute fonction bornée continue par morceaux sur un intervalle borné $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

1. Cette section peut être omise en première lecture

1.4. Dérivation et Intégration

1.4.1. Notions de primitive d'une fonction.

DÉFINITION 1.15. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *primitive de f sur I* toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur I et admet f pour fonction dérivée.

THÉORÈME 1.16. Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I . Soient F et G deux primitives de f sur I .

Alors F et G diffèrent d'une constante c.à.d. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I.$$

Primitives usuelles

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle I
$ax + b$	$\frac{a}{2}x^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega x + \varphi) \quad \omega \neq 0$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega x + \varphi) \quad \omega \neq 0$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln \cos x + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \tan \frac{x}{2} + c$	$]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2+a^2} \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2-x^2} \quad a > 0$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$] -\infty; -a[\text{ ou }] -a, a[\text{ ou }]a, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad a > 0$	$\arcsin \frac{x}{a} + c$	$] -a, a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad a > 0$	$\ln \left x + \sqrt{x^2-a^2} \right + c$	$] -\infty, -a[\text{ ou }]a, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad a > 0$	$\ln \left x + \sqrt{x^2+a^2} \right + c$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonctions	Un primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	—
ku'	ku	—
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq 0)$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$u'u^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq 0)$	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u > 0$ sur I ou $u < 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	—
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	—

1.4.2. Théorème fondamental du calcul Intégral.

THÉORÈME 1.17. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $a \in I$, l'application $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de f sur I .

THÉORÈME 1.18 (Formule de Newton-Leibniz ou encore Théorème fondamentale de l'analyse). Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une

fonction intégrable. Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $[a, b]$, on a :

$$(1.4) \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

♣♣♣ Ce théorème est fondamental parce qu'il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères : d'un côté les notions d'aire, d'intégrale ; de l'autre, la notion de primitive liée à la dérivation.

1.5. Techniques de calcul d'intégral

1.5.1. Intégration par parties.

THÉORÈME 1.19. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables sur I . Alors quels que soient $a, b \in I$ on a :

$$(1.5) \quad \int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. $g(t) = u(t)v(t)$ est continûment dérivable, de dérivée $u(t)v'(t) + u'(t)v(t)$, d'où le résultat. $\square$

1.5.2. Changement de variable.

THÉORÈME 1.20. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \rightarrow J$ une application continûment dérivable (de classe C^1) strictement monotone (croissante ou décroissante) et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, quelque soient $\alpha, \beta \in I$, on a :

$$(1.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy.$$

♣ ♣ ♣ En fait la formule de changement de variable n'est rien d'autre que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.

En pratique : Comment retrouver vite cette horrible formule du changement de variable ? Voici une méthode apparemment pas très rigoureuse, mais cela dit bien pratique.

On part de $t = \varphi(x)$. Alors $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, donc $dt = \varphi'(x)dx$. Du coup $f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Maintenant, pendant que x varie de a à b , $t = \varphi(x)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

DÉMONSTRATION. f continue sur J , donc y admet une primitive F et

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Or $F \circ \varphi$ est continûment dérivable sur I , de dérivée $(f \circ \varphi)\varphi'$, donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt,$$

d'où le résultat. $\square$

EXEMPLES 1.21. 1- L'aire d'un demi-disque de rayon 1 est égale à $\frac{\pi}{2}$. Du coup l'aire d'un disque complet de rayon 1 est égale à π .

En effet : Le cercle trigonométrique a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$. Son demi-cercle supérieur est donc le graphe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$, positive, et l'aire du demi-cercle associé est l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

La fonction cosinus est de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $[-1, 1]$, et la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. On pose $x = \cos t$. Donc

$$\begin{aligned} (1.7) \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-\sin t) dt = \int_{\pi}^0 |\sin t| (-\sin t) dt = \\ &= - \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2- Soient a et b deux réels, $a, b > 0$. Calculer

$$\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx \quad (\text{ind. poser } t = \ln x).$$

3- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$

COROLLAIRE 1.22 (Parité - Périodicité). 1- Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ avec $a > 0$: Alors

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= 0 \quad \text{si } f \text{ est impaire;} \\ \int_{-a}^a f(t) dt &= 2 \int_0^a f(t) dt \quad \text{si } f \text{ est paire.} \end{aligned}$$

2- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T . Alors

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. Exercice pour le lecteur. □

1.5.3. Calcul d'Intégrales de la forme $\int P(\cos x, \sin x) dx$. où P désigne un polynôme à deux variables.

On cherche à calculer des primitives de fonctions qui sont des sommes de termes de la forme $\sin^p x \cos^q x$ où p et q sont deux entiers naturels.

– si p est impair, le changement de variable $u = \cos x$ (donc $du = -\sin x dx$) conduit à une primitive de fonction polynomiale.

Exemple :

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (t^2 - 1)t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

– Si q est impair, on peut poser $t = \sin x$ (donc $dt = \cos x dx$).

Exemple :

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - t^2)^2 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = t - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

– Si p et q sont pairs, on linéarise.

Exemple :

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + c.$$

1.5.4. Calcul d'Intégrales de la forme $\int R(x)dx$. où R désigne une fraction rationnelle à une seule variables.

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}$, puis on intègre ces éléments simples. Seuls ceux qui sont de seconde espèce posent problème.

On doit donc intégrer des expressions comme

$$f(x) = \frac{\lambda x + \mu}{(x^2 + bx + c)^n}, \text{ où } b^2 - 4c < 0.$$

On écrit

$$f(x) = \frac{\lambda(2x + b)}{2(x^2 + bx + c)^n} + \frac{2\mu - \lambda b}{2(x^2 + bx + c)^n}.$$

La fonction $g(x) = \frac{\lambda(2x+b)}{2(x^2+bx+c)^n}$ s'intègre facilement car elle est du type $\frac{u'(x)}{u^n(x)}$.

Il reste à intégrer $h(x) = \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}$.

Or $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a^2$, avec $a = \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2}$.

Le changement de variable $x = t - \frac{b}{2}$ donne :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} =: I_n.$$

On est ainsi ramené à une intégrale qu'on sait calculer dans le cas $n = 1$.

Le cas $n \geq 2$, On effectue le changement de variable $x = a \tan t$. Ainsi $dx = a(1 + \tan^2 t)dt$. On trouve :

$$I_n = \int \frac{dt}{a^{2n-1}(1 + \tan^2 t)^{n-1}} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2} t dt.$$

On est ainsi ramené au calcul d'une intégrale de Wallis.

Remarque : si on ajoute à ce calcul le temps de la décomposition en éléments simples, il est clair que tout cela peut prendre beaucoup de temps.

1.5.5. Calcul d'Intégrales de la forme $\int R(\cos x, \sin x)dx$. où R désigne une fraction rationnelle à deux variables.

Le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ conduit à la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle.

En fait, il est souvent possible de faire les changements de variables $u = \tan x$, $u = \cos t$ ou $u = \sin t$.

Les règles suivantes, appelées règles de Bioche, permettent de choisir ces changements de variables.

– Si l'expression $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \mapsto -x$, on pose $u = \cos x$.

– Si l'expression $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \mapsto x + \pi$, on pose $u = \tan x$.

– Si l'expression $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \mapsto \pi - x$, on pose $u = \sin x$.

– Si les trois conviennent, on peut poser $u = \cos 2x$.

1.5.6. Intégration de fonctions rationnelles en e^x . Les changements de variable $u = e^x$ ou $t = \tanh \frac{x}{2}$ conduisent à la recherche d'une primitive d'une fonction rationnelle.

Dans certains cas, il est plus simple de faire les changements de variables $u = \tanh x$, $u = \cosh x$ ou $u = \sinh x$.

Pour déterminer le bon changement de variable, on utilise la règle qui suit :

On considère l'expression en sinus et cosinus obtenue en remplaçant $\cosh x$ par $\cos x$, et $\sinh x$ par $\sin x$, puis l'on utilise les règles de Bioche.

- Si le changement $u = \tan x$ convient, on pose $u = \tanh x$;
- Si le changement $u = \sin x$ convient, on pose $u = \sinh x$.
- Si le changement $u = \cos x$ convient, on pose $u = \tanh x$.

1.5.7. Calcul d'Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$. où R désigne une fraction rationnelle à deux variables.

Si la fonction à intégrer est rationnelle en x et en $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, le changement de variable $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ permet de se ramener à une fraction rationnelle.

EXEMPLES 1.23. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}; \quad b) \int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx; \quad c) \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

1.6. Formules de la moyenne

DÉFINITION 1.24. On appelle valeur moyenne de la fonction f continue par morceaux sur le segment $I = [a, b]$, la quantité :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

THÉORÈME 1.25. Soient f et g deux fonctions sur $[a, b]$, f continue et g continue par morceaux positive. Alors

a. Il existe $c \in [a, b]$, tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

b. On suppose de plus que g continue et strictement positive. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

c. On suppose de plus que f est de classe C^1 , positive et décroissante sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$$

DÉMONSTRATION.

□

1.7. Formule de Taylor–Lagrange avec reste intégral

Dans cette section, a et b désignent deux éléments d'un intervalle I et n est un entier naturel.

THÉORÈME 1.26. Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur I , on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{Reste intégral}}.$$

♣♣♣ Cette formule généralise celle de Newton–Leibniz (théorème fondamental de l'analyse), que l'on retrouve pour $n = 0$.

DÉMONSTRATION. Fixons l'intervalle I , les deux points a et b de I et raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\forall f \in C^{n+1}(I), \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Initialisation : Pour $n = 0$: si f est de classe C^1 sur I , la fonction f' est continue et donc par le théorème fondamental de l'analyse, on

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt.$$

En fait $\mathcal{P}_0$ est l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse, déjà démontré.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_n$ l'est alors. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I . Elle est alors de classe C^n , et l'hypothèse de récurrence nous donne :

$$(1.8) \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Intégrons par parties le terme complémentaire

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= -\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \end{aligned}$$

La relation (1.8) devient :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

ce qui démontre le résultat au rang n . □

EXEMPLE 1.27. En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

COROLLAIRE 1.28 (Inégalité de Taylor–Lagrange). Soient $f \in C^{n+1}(I)$ et $a, b \in I$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in (a,b)} |f^{(n+1)}(t)|,$$

où $\sup_{t \in (a,b)} |f^{(n+1)}(t)|$ désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de f sur le segment $[a, b]$, ou $[b, a]$.

DÉMONSTRATION. Exercice pour le lecteur. □

EXEMPLE 1.29. Montrer que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

1.8. Approximations d'Intégrales

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Pour calculer numériquement une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ on peut partager le segment $I = [a, b]$ à l'aide d'une subdivision à pas constant $u = (x_i)$ et, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, remplacer la fonction f par une fonction polynomiale dont on sait calculer l'intégrale. C'est la base des méthodes d'approximation d'intégrales étudiées dans cette section.

1.8.1. Sommes de Reimann.

DÉFINITION 1.30. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on appelle somme de Riemann de f la quantité :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

THÉORÈME 1.31. 1– Soit $f \in C([a, b])$ une fonction continue. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2– Si, $f \in C^1([a, b])$, alors l'erreur commise dans ces limites est un $O(\frac{1}{n})$, c.à.d. :

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

♣♣♣ En particulier, le théorème affirme l'existence des deux limites.

DÉMONSTRATION. A admettre. □

EXEMPLE 1.32.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

En effet

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

1.8.2. Méthode des trapèzes. Le calcul approché d'une intégrale au moyen des sommes de Riemann est généralement appelé la méthode des rectangles. Le théorème précédent, nous affirme que l'erreur commise était au plus de l'ordre $O(\frac{1}{n})$, si n est le nombre de termes sommés. Cette majoration de l'erreur n'est pas très bonne car la suite $\frac{1}{n}$ ne tend pas vers zéros rapidement lorsque n tend vers ∞ . La méthode d'approximation par les sommes de Riemann n'est donc pas pleinement satisfaisante.

Nous allons présenter ici une méthode proche de la précédente, mais la convergence accélérée $O(\frac{1}{n^2})$, appelée la méthode des trapèzes. Il existe bien d'autres méthodes encore meilleures.

THÉORÈME 1.33. 1- Soit $f \in C^2([a, b])$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) \right].$$

2- De plus l'erreur commise dans cette limite est un $O(\frac{1}{n^2})$, c.à.d. :

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}) = O(\frac{1}{n^2}).$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat n'est pas horrible à montrer. On l'admit. □

♣♣♣ Dans la somme de Riemann, on approxime f par des fonctions constantes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, et on approxime l'intégrale de f par la somme des aires des rectangles. Dans la méthode des trapèzes, on approxime f par des fonctions affine. Les rectangles sont ainsi remplacés par des trapèzes.

1.9. Exercices

EXERCICE 1.1. Déterminer les primitives suivantes :

- 1) $\int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$; 3) $\int x^2 \arctan x dx$; 4) $\int \cos(\ln x) dx$;
- 5) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$; 6) $\int e^{\arcsin x} dx$; 7) $\int e^x \cos x dx$; 8) $\int x e^x \sin x dx$;
- 9) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$; 10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$; 11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$; 12) $\int \frac{x+1}{(1-x)^3(1+x^2)} dx$;
- 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; 15) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}}$; 16) $\int \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1} e^x dx$;
- 17) $\int \frac{dx}{1 + 2\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)}$; 18) $\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{th}^2(x) + 1} dx$; 19) $\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}} dx$;
- 20) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$.

EXERCICE 1.2. Calculer

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx; \quad I_3 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\sin x| dx;$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx; \quad I_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx; \quad I_6 = \int_0^{5\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \frac{x}{1+3\cos^2 x} dx; \quad I_8 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos \theta \cos x} dx; \quad (\theta \in]-\pi, \pi[);$$

$$I_9 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}; \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$$

EXERCICE 1.3. Calculer $I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos ntdt$ pour n et m dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 1.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$. Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \max \left(\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t)dt, \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t)dt \right).$$

EXERCICE 1.5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b |f(x)|dx \text{ si et seulement si } f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0.$$

EXERCICE 1.6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt$.

EXERCICE 1.7. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{1/n} f(t)dt$.

EXERCICE 1.8. Soient f et g deux fonctions sur $[a, b]$, f continue et g continue par morceaux positive.

a. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$, tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

b. On suppose de plus que g continue et strictement positive. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$, tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

c. On suppose de plus que f est de classe C^1 , positive et décroissante sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$$

EXERCICE 1.9. Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$1) S_n = \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{k}, \text{ (avec } p \in \mathbb{N}^*); \quad 2) S'_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}; \quad S''_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}.$$

CHAPITRE 2

Intégrales généralisées

L'intégrale généralisée (ou impropre) désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par une forme de passage à la limite dans des intégrales. On note en général les intégrales impropres sans les distinguer des véritables intégrales ou intégrales définies, ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est un exemple très classique d'intégrale impropre convergente, mais qui n'est pas définie au sens de l'intégration usuelle (que ce soit l'intégration des fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Riemann, ou celle de Lebesgue).

Dans la pratique, on est amené à faire une étude de convergence d'intégrale impropre

- lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie,
- lorsqu'on intègre jusqu'à une borne en laquelle la fonction n'admet pas de limite finie,
- lorsqu'on englobe un point de non définition dans l'intervalle d'intégration.

Dans chaque cas, on évaluera l'intégrale définie comme une fonction d'une des deux bornes et on prendra la limite de la fonction obtenue lorsque l'argument tend vers la valeur de la borne.

L'intégrale impropre partage un certain nombre de propriétés élémentaires avec l'intégrale définie.

2.1. Définition des intégrales généralisées

Nous allons généraliser la définition de $\int_a^b f(x)dx$ au cas où f n'est pas forcément bornée et a, b peuvent être $\pm\infty$.

Nous supposons que f est *localement intégrable* sur $]a, b[$, c'est à dire pour tout sous-intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

En pratique, Les fonctions considérées sont souvent continues sur l'intervalle $]a, b[$ ce qui implique en particulier qu'elles sont localement intégrables.

2.1.1. Le cas $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit f localement intégrable sur $]a, b[$. On lui associe l'application $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(2.1) \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

DÉFINITION 2.1. Si $F(x)$ admet la limite $J \in \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow b$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* et on lui attribue la valeur J . Par contre, si $F(x)$ n'admet pas de limite ou tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow b$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*.

EXEMPLES 2.2. (i) $\int_0^x \cos t \, dt = -\sin x$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow \infty$, donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \cos t \, dt$ est divergente.

(ii) $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$ tends vers 1 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

(iii) La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est pas bornée sur l'intervalle $[0, 1[$. Cependant, pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^x = \arcsin x \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2}$. Donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et a pour valeur $\pi/2$.

2.1.2. Le cas $-\infty \leq a < b < \infty$. De façon similaire, dans ce cas, on associe à la fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $G :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(2.2) \quad G(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

Si $G(x)$ admet la limite $J \in \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow a$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est *convergente* et on lui attribue la valeur J . Par contre, si $G(x)$ n'admet pas de limite ou tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow a$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est *divergente*.

En fait $\int_x^b f(t) dt = \int_{-b}^{-x} f(-t) dt$; les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_{-b}^{-a} f(-t) dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence. C'est pourquoi on peut toujours se ramener au cas $-\infty < a < b \leq +\infty$ que nous reprenons dans toute la suite.

2.1.3. Convergence Absolue.

DÉFINITION 2.3. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. Lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente*.

2.1.4. Fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 2.4. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *convergente* si et seulement si les deux intégrales $\int_a^b \Re(f(t)) dt$ et $\int_a^b \Im(f(t)) dt$ sont convergentes et alors

$$(2.3) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re(f(t)) dt + i \int_a^b \Im(f(t)) dt.$$

($\Re$ designe la partie réelle et $\Im$ la partie imaginaire). On dirait aussi que $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente* si et seulement si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

2.1.5. Critère de Cauchy.

THÉORÈME 2.5. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si f vérifie la condition suivante, dite critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b[$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [c, b[$ on a $|\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt| \leq \varepsilon$.

DÉMONSTRATION. (i) Condition nécessaire. Supposons que $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, c'est à dire $\exists \lim_{x \rightarrow b} F(x) = I \in \mathbb{R}$ où $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Par définition, $\forall \varepsilon > 0 \exists c < b$ tel que $|F(x) - I| \leq \varepsilon/2 \forall x \in [c, b[$, donc $|\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt| = |F(x_2) - F(x_1)| \leq |F(x_1) - I| + |I - F(x_2)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \forall x_1, x_2 \in [c, b[$.

(ii) Condition suffisante. Supposons que la condition de Cauchy est satisfaite. Choisissons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arbitraire de nombres dans $[c, b[$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Alors la suite $F(x_n)$ est de Cauchy, donc convergente. Notons $I = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in [a, b[$ tel que $|F(x') - F(x'')| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t) dt \right| \leq \varepsilon/2 \quad \forall x', x'' \in [c, b[$, et $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|F(x_n) - I| \leq \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$. Prenons un $n \geq N$ tel que $x_n \in [c, b[$, alors $|F(x) - I| \leq |F(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - I| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall x \in [c, b[$. Cela veut dire que $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = I$. $\square$

COROLLAIRE 2.6. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. $\int_a^b f(t) dt$ absolument convergente $\implies \int_a^b f(t) dt$ convergente.

DÉMONSTRATION. Elle résulte immédiatement du critère de Cauchy et de l'inégalité triangulaire suivante :

$$(2.4) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt.$$

$\square$

2.1.6. Le cas de fonctions positives.

THÉORÈME 2.7. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si l'ensemble $\{\int_a^x f(t) dt; x \in [a, b[\}$ est majoré (i.e. il existe une constante réelle positive $M > 0$ tel $\int_a^x f(t) dt \leq M, \forall x \in [a, b[$); dans ce cas

$$(2.5) \quad \int_a^b f(t) dt = \sup_{x \in [a, b[} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est croissante, donc $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe toujours ; si elle est finie l'intégrale est convergente ; sinon elle est égale à $+\infty$. $\square$

2.2. Etude de la convergence

2.2.1. Critère de comparaison.

Rappel sur les notations de Landau. Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- On dit que $f = O(g)$ au voisinage de b s'il existe $c \in [a, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leq \alpha |g(t)| \quad \forall t \in [c, b[$. (Lorsque $b = +\infty$, cela signifie que $\forall t \geq c, f(t) \leq \alpha |g(t)|$).
- On dit que $f = o(g)$ au voisinage de b si $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b[$ tel que $|f(t)| \leq \varepsilon |g(t)| \quad \forall t \in [c, b[$.
- On dit que $f \sim g$ au voisinage de b si $f - g = o(g)$ au voisinage de b ($\iff f - g = o(f)$ au voisinage de b).

THÉORÈME 2.8. Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que : $\forall t \in [c, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors :

(i) $\int_a^b g(t) dt$ convergente $\implies \int_a^b f(t) dt$ convergente.

(ii) $\int_a^b f(t) dt$ divergente $\implies \int_a^b g(t) dt$ divergente.

DÉMONSTRATION. f et g étant intégrables sur $[a, c]$, il suffit d'étudier la convergence de $\int_c^b f(t) dt$ et de $\int_c^b g(t) dt$. Sachant que $\forall x \in [c, b[, 0 \leq \int_c^x f(t) dt \leq \int_c^x g(t) dt$ la conclusion résulte du Théorème 2.7. $\square$

COROLLAIRE 2.9. Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que f et g soient positives sur $[d, b]$ et que $f = O(g)$ au voisinage de b . Alors :

- (i) $\int_a^b g(t)dt$ convergente $\implies \int_a^b f(t)dt$ convergente.
- (ii) $\int_a^b f(t)dt$ divergente $\implies \int_a^b g(t)dt$ divergente.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe $c \in [d, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq f(t) \leq \alpha g(t) \forall t \in [d, b]$, et on applique le théorème. $\square$

COROLLAIRE 2.10. Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- (i) $\exists d \in [a, b]$ tel que $g(t) \geq 0 \forall t \in [d, b]$.
- (ii) $\exists \lambda \neq 0$ tel que $f \sim \lambda g$ au voisinage de b .

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

DÉMONSTRATION. Les intégrales de f et de $-f$ étant de même nature, on peut supposer $\lambda > 0$. Il existe alors $c \in [d, b]$ tel que

$$\forall t \in [c, b]: \frac{1}{2}\lambda g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}\lambda g(t).$$

Le résultat est alors une conséquence directe du théorème précédent. $\square$

2.2.2. Quelques fonctions de référence.

LEMME 2.11. Pour $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

DÉMONSTRATION. Pour $x \in [a, +\infty[$, $F(x) = \int_a^x t^{-\alpha} dt$ s'écrit $\frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}})$ si $\alpha \neq 1$; $\ln x - \ln a$ si $\alpha = 1$ d'où le résultat. $\square$

LEMME 2.12. Pour $-\infty < a < b < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

DÉMONSTRATION. Pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ s'écrit $\ln(b-a) - \ln(b-x)$ si $\alpha = 1$; $\frac{1}{1-\alpha}((b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha})$ si $\alpha \neq 1$ d'où le résultat. $\square$

2.2.3. Règles d'absolue convergence.

PROPOSITION 2.13. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application localement intégrable.

- (i) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$ tels que, au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim ct^\alpha$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$.
- (ii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ tel que, au voisinage de $+\infty$, $f(t) = O(t^{-\alpha})$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.
- (iii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 1$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^\alpha f(t) > 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

PROPOSITION 2.14. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) une application localement intégrable.

- (i) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$ tels que, au voisinage de b , $f(t) \sim c(b-t)^\alpha$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\alpha < 1$ et divergente si $\alpha \geq 1$.
- (ii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$ tel que, au voisinage de b , $f(t) = O((b-t)^{-\alpha})$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.
- (iii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$ tel que $\liminf_{t \rightarrow b} (b-t)^\alpha f(t) > 0$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

EXEMPLE 2.15. Etude de la convergence de $\int_{\pi}^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(\lambda t) dt$, avec $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. On a $|t^{-\alpha} \cos(\lambda t)| \leq t^{-\alpha}$ et $\int_{\pi}^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge. Donc $\int_{\pi}^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(\lambda t) dt$ converge absolument.

EXEMPLE 2.16. Etude de la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$. Le problème se pose au voisinage de 1 où l'on a $\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t+t^2}} \stackrel{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t)^{-1/2}$. L'intégrale est donc convergente, d'après la Proposition 2.14.

2.2.4. Règle d'Abel. Le théorème suivant permet souvent d'étudier la convergence des intégrales qui ne sont pas absolument convergentes.

THÉORÈME 2.17 (Règle d'Abel). Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ deux applications localement intégrables ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On fait les hypothèses suivantes :

(i) f est réelle positive, décroissante, et

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0.$$

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\left| \int_a^u g(t) dt \right| \leq K \quad \forall u \in [a, b[.$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la preuve, nous supposons que f est continûment dérivable. Notant $G(u) = \int_a^u g(t)dt$, on a $|G(u)| \leq K \quad \forall u \in [a, b[$. Comme f est décroissante, $f'(u) \leq 0 \quad \forall u \in [a, b[$. Utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\int_u^v f(t)g(t)dt = f(v)G(v) - f(u)G(u) - \int_u^v f'(t)G(t)dt \quad \forall a \leq u < v < b,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v f(t)g(t)dt \right| &\leq f(v)|G(v)| + f(u)|G(u)| + \int_u^v (-f'(t))|G(t)|dt \\ &\leq K[f(u) + f(v) + \int_u^v (-f'(t))dt] = 2Kf(u) \xrightarrow{u \rightarrow b} 0. \end{aligned}$$

Cela veut dire que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)g(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge. $\square$

EXEMPLE 2.18. Soit $\alpha > 0$. Etude de la convergence de $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(t)dt$.

(i) Pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ est convergente d'après le Lemme 2.11, donc $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(t)dt$ est absolument convergente par comparaison ($|t^{-\alpha} \cos(t)| \leq t^{-\alpha}$).

(ii) Supposons désormais $0 < \alpha \leq 1$. Alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(t)dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

Pour montrer la convergence simple, on peut appliquer la règle d'Abel, avec $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = \cos(t)$. En effet, $|\int_1^u \cos dt| = |\sin(u) - \sin(1)| \leq 2 \quad \forall u \in [1, +\infty[$.

Pour montrer la non-convergence absolue de $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(t)dt$, c'est à dire la divergence de $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} |\cos(t)|dt$, on peut utiliser l'inégalité

$$t^{-\alpha} |\cos(t)| \geq t^{-\alpha} \cos^2(t) = \frac{1}{2}[t^{-\alpha} + t^{-\alpha} \cos(2t)].$$

$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(2t) dt$ converge (pour les mêmes raisons que $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos(t) dt$), mais $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ diverge (quand $0 < \alpha \leq 1$), donc $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos^2(t) dt$ diverge, et par comparaison $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} |\cos(t)| dt$ diverge.

REMARQUE 2.19. Une intégrale généralisée convergente, mais pas absolument convergente, est dite aussi *semi-convergente*.

2.3. Calcul des intégrales généralisées

Pour calculer une intégrale généralisée ou étudier sa nature (absolue convergence, semi-convergence, divergence) on aura le plus souvent recours au calcul d'une primitive. On pourra aussi utiliser d'autres méthodes, par exemple, l'intégration par parties ou le changement de variable. On a en particulier :

THÉORÈME 2.20. Soit $\phi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection continûment dérivable strictement monotone et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ converge et dans ce cas

$$(2.6) \quad \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Utiliser la formule de changement de variable pour le cas "propre" (Théorème 1.20) et passer à la limite. $\square$

EXEMPLE 2.21. Soit $0 < \alpha < 2$. Etude de la convergence de

$$I = \int_0^1 s^{-\alpha} \cos(s^{-1}) ds.$$

Notons $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 s^{-\alpha} \cos(s^{-1}) ds$, $s = \phi(t) = 1/t$, $\phi'(t) = -1/t^2$.

$$I_\varepsilon = - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 t^\alpha \cos(t) \frac{-1}{t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} t^{-(2-\alpha)} \cos(t) dt.$$

D'après les résultats de l'Exemple 2.18, on obtient :

- Pour $0 < \alpha < 1$, $2 - \alpha > 1$ et I est absolument convergente.
- Pour $1 \leq \alpha < 2$, $0 < 2 - \alpha \leq 1$ et I est convergente mais pas absolument convergente.

2.4. Exercices

EXERCICE 2.1. Monter la divergence de :

$$\int_0^\infty \sin x \, dx, \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx, \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx, \int_0^1 \frac{dx}{1 - x^{1/2}}, \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$$

EXERCICE 2.2. Convergence absolue :

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx, \int_0^1 \sin(1/t) dt, \int_0^\infty 2^{-x} x^4 dx, \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}, \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

EXERCICE 2.3. Convergence simple (semi-convergence) :

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

EXERCICE 2.4. Etudier la convergence ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^\infty \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt, \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}, \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx, \int_0^\infty \cos(t^\alpha) dt$$

EXERCICE 2.5. Montrer la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}, \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}, \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{1+t^4}, \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$$

EXERCICE 2.6. Montrer la convergence et calculer

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1}, \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}$$

EXERCICE 2.7. Montrer la convergence et calculer

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt, \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0)$$

EXERCICE 2.8. Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, \quad J_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

CHAPITRE 3

Equations différentielles

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. On sait qu'une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$ est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle et une fonction f deux fois dérivable sur I est affine (c'est à dire a une expression de la forme $f(t) = at + b$) si, et seulement si, $f'' = 0$: Le cas réel a été vu dans les classes antérieures et le cas complexe s'en déduit en considérant les parties réelle et imaginaire.

En particulier, deux primitives sur I d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Enfin, on sait que toute fonction continue sur I admet une primitive.

3.1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Soient a, b, c trois applications continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$. Dans cette section, on note (E) l'équation : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

On dit que (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On note (H) l'équation différentielle : $a(x)y' + b(x)y = 0$ (équation homogène associée à (E) .)

***** Important :** Les résultats concernant (E) et (H) supposent qu'on se place sur un sous-intervalle J de I sur lequel la fonction $x \mapsto a(x)$ ne s'annule pas. Pour résoudre (E) ou (H) sur I tout entier, il faudra procéder intervalle par intervalle (entre deux zéros successifs de la fonction a), et vérifier en suite s'il est possible de "recoller" des solutions sur des intervalles consécutifs.

PROPOSITION 3.1 (solution générale de (H)). *On considère $(H) : a(x)y' + b(x)y = 0$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas. La solution générale de (H) sur I est donnée par $y(x) = \lambda e^{-B(x)}$, où B est une primitive particulière de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ sur I , et où λ est un scalaire quelconque.*

Remarques et exemples

– Le résultat précédent montre que l'ensemble S_H des solutions y de (H) sur I est égal à l'ensemble des multiples d'une solution particulière y_0 non nulle de (H) sur I . On exprime cette situation en disant que S_H est une *droite vectorielle*. On voit d'ailleurs qu'une solution de (H) sur I , si elle n'est pas la solution nulle, ne s'annule jamais sur I .

– Si on "devine" une solution non nulle de (H) sur I , alors on connaît la solution générale (sans avoir à passer par la formule précédente.)

On constate par exemple que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de $(H) : xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$.

Sur $I = \mathbb{R}^-$ ou $\mathbb{R}^+$, la solution générale de (H) est donc l'ensemble des $x \mapsto \lambda x$, ($\lambda \in \mathbb{K}$).

PROPOSITION 3.2 (solution générale de (E)). *On considère $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas. La solution générale de (E) sur I est donnée*

par $y(x) = (C(x) + \lambda)e^{-B(x)}$, où B est une primitive particulière de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ sur I , λ est un scalaire quelconque, et C est une primitive particulière de $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)}e^{B(x)}$ sur I .

Remarques – L'expression précédente montre que pour obtenir la solution générale S_E de (E) sur I , il suffit d'ajouter à une solution particulière de (E) sur I la solution générale de (H) sur I .

– Par exemple, une solution particulière de $(E) : xy' + y = 2x$ est l'application $x \mapsto x$. La solution générale de (E) sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ est donc $y(x) = x + \frac{\lambda}{x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

– Autre exemple : considérons l'équation $(E) : \cos(x)y' + \sin(x)y = 1$, sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Une solution particulière de (E) (resp. de (H)) sur I est $x \mapsto \sin(x)$ (resp. $x \mapsto \cos(x)$.) La solution générale de (E) sur I s'écrit donc $y(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $xy'(x) - y(x) = x^2e^x$.

PROPOSITION 3.3 (Problème de Cauchy). On considère $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas. Soit x_0 un point de I , et soit y_0 un élément quelconque de $\mathbb{K}$. Il existe une unique solution de (E) sur I satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Trouver cette solution, c'est résoudre le problème de Cauchy relatif à ces conditions initiales.

Interprétation

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (toutes les fonctions sont donc à valeurs réelles.) Les courbes représentatives des solutions de (E) sont appelées courbes intégrales de (E) . Par tout point $M(x_0, y_0)$ de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule courbe intégrale de (E) .

Méthode de variation de la constante

On considère les équations $(H) : a(x)y' + b(x) = 0$ et $(E) : a(x)y' + b(x) = c(x)$. On rappelle que les applications a, b, c sont continues, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On se place sur un intervalle I sur lequel l'application $x \mapsto a(x)$ ne s'annule pas. Soit $x \mapsto h(x)$ une solution de (H) sur I , non nulle (donc ne s'annulant pas sur I .) On sait que la solution générale de (H) sur I s'écrit $y : x \mapsto \lambda h(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour résoudre complètement (E) sur I , il suffit d'en connaître une solution particulière. On cherche une telle solution sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)h(x)$, où λ est maintenant une application dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ (on fait "varier la constante".)

Avec ces notations :

$$\begin{aligned} a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) &\Leftrightarrow a(x)(\lambda'(x)h(x) + \lambda(x)h'(x)) + b(x)\lambda(x)h(x) = c(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)a(x)h(x) = c(x) \quad (\text{car } a(x)h'(x) + b(x)h(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)h(x)}, \end{aligned}$$

(ce qui détermine λ une constante près).

Si on note Γ une primitive de $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)h(x)}$ sur I , la méthode de variation de la constante donne donc les solutions $x \mapsto y(x) = \Gamma(x)h(x) + \alpha h(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$. On a ainsi obtenu l'ensemble des solutions de (E) sur I .

3.2. Equations se ramenant à une équation linéaire

3.2.1. Equations de Bernoulli. L'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y(x)^m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Cette équation a été proposée par Jacques Bernoulli en 1695 et résolue un an plus tard par Leibniz grâce à un changement de variable qui ramène à une équation différentielle linéaire. C'est d'ailleurs la méthode encore employée aujourd'hui pour résoudre cette équation.

En effet

– Si $m = 1$ c'est une équation linéaire de premier ordre.

– Si $m \neq 1$. En supposant y strictement positif sur l'intervalle I , on peut diviser l'équation par $y^m(x)$ et on obtient

$$\frac{y'(x)}{y^m(x)} + a(x) \frac{1}{y^{m-1}(x)} = b(x)$$

On pose

$$u(x) = \frac{1}{y^{m-1}(x)}$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) &= y^{1-m}(x) \\ u'(x) &= (1-m)y'(x)y^{-m} \\ u'(x) &= \frac{(1-m)y'(x)}{y^m(x)} \end{aligned}$$

on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{1}{1-m} u'(x) + a(x)u(x) = b(x)$$

dont la solution générale est

$$u(x) = e^{-(1-m) \int a(t) dt} \left(C + (1-m) \int b(t) e^{(1-m) \int a(s) ds} dt \right)$$

ce qui donne pour la fonction $y = u^{\frac{1}{1-m}}$

$$y(x) = e^{-\int a(t) dt} \left(C + (1-m) \int b(t) e^{(1-m) \int a(s) ds} dt \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Si la fonction y passe par le point (x_0, y_0) alors la solution de cette équation est :

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \left(1 + (1-m) y_0^{m-1} \int_{x_0}^x b(t) \left(e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds} \right)^{m-1} dt \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Des solutions peuvent être cherchées parmi les fonctions qui ne sont pas partout positives dans leur domaine de définition, mais alors de nombreuses précautions doivent être prises quant aux domaines de validité des solutions.

Exemple Résoudre l'équation $y' - 2xy + 2xy^2 = 0$.

3.2.2. Equations de Riccati. Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$$

Où q_0 , q_1 , et q_2 sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun à valeurs réelles ou complexes.

Elle porte ce nom en l'honneur de Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) et de son fils Vincenzo Riccati (1707-1775).

Il n'existe pas, en général, de résolution par quadrature à une telle équation mais, il existe une méthode de résolution dès que l'on en connaît une solution particulière.

S'il est possible de trouver une solution y_1 , alors la solution générale est de la forme

$$y = y_1 + u$$

En remplaçant

$$y \text{ par } y_1 + u$$

dans l'équation de Riccati, on obtient :

$$y_1' + u' = q_0 + q_1(y_1 + u) + q_2(y_1 + u)^2$$

et comme

$$y_1' = q_0 + q_1 y_1 + q_2 y_1^2$$

on a :

$$u' = q_1 u + 2q_2 y_1 u + q_2 u^2$$

Or

$$u' - (q_1 + 2q_2 y_1)u = q_2 u^2$$

est une équation de Bernoulli . La substitution nécessaire à la résolution de cette équation de Bernoulli est alors :

$$z = u^{1-2} = \frac{1}{u}$$

Substituer

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

directement dans l'équation de Riccati donne l'équation linéaire :

$$z' + (q_1 + 2q_2 y_1)z = -q_2$$

La solution générale de l'équation de Riccati est alors donnée par :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

où z est la solution générale de l'équation linéaire citée ci-dessus.

Exemple Résoudre l'équation $y' + xy - y^2 = 1$ (Ind. $y_1(x) = x$ est une solution de l'équation).

3.3. Équations différentielles à variables séparées, homogènes

3.3.1. Équation différentielle d'ordre un à variables séparées. Une équation différentielle d'ordre un à variables séparées mais non nécessairement linéaire est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$y' = f(x)g(y).$$

On recherche dans un premier temps les solutions telles que $g(y)$ n'est jamais nul. De telles solutions sont dites régulières.

Cette présentation classique, notamment pour la résolution de problèmes appliqués, est difficile à justifier mathématiquement mais elle permet d'obtenir une bonne partie des solutions. Elle utilise les notations de Leibniz pour le calcul différentiel. Elle consiste à « séparer les différentielles » en écrivant

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$$

sous la forme

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

En intégrant séparément chaque membre :

$$H(y) = F(x) + K$$

où H représente une primitive de $1/g$ et F représente une primitive de f et K une constante arbitraire. En outre, la fonction H est continûment dérivable, strictement monotone, donc admet une fonction réciproque de sorte que la solution s'exprime comme

$$y = H^{-1}(F(x) + K).$$

Présentation alternative :

Le calcul utilisé précédemment ne possède un sens mathématique précis que si l'on a introduit la notion assez abstraite de différentielle. Il est possible d'en donner une version plus élémentaire, en primitivant chaque membre de l'expression

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x),$$

par rapport à la variable x , ce qui conduit à

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{g(y(u))} y'(u) du = \int_{x_0}^x f(u) du$$

Ce qui, après changement de variable, est de la forme

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(v)} dv = \int_{x_0}^x f(u) du$$

Et la conclusion est identique à celle du paragraphe précédent.

Exemples :

1- L'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y).$$

Si l'on suppose $f(x) = 1$ et $g(y) = y(1 - y)$, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme de l'équation ci-dessus. Ainsi, l'équation différentielle est séparable.

Comme montré au-dessus, on peut traiter dy et dx comme des variables séparées, ce qui fait que les deux membres de l'équation peuvent être multipliés par dx . En divisant par la suite les deux membres de l'équation par $y(1 - y)$, on obtient :

$$\frac{dy}{y(1 - y)} = dx.$$

On a donc séparé à ce moment les variables x et y l'une de l'autre, x apparaissant uniquement dans le membre de droite et y dans celui de gauche.

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\int \frac{dy}{y(1 - y)} = \int dx,$$

qui, en passant par des fractions partielles, devient :

$$\int \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} dy = \int dx,$$

puis :

$$\ln|y| - \ln|1 - y| = x + C$$

où C est la constante d'intégration. Quelques considérations algébriques donnent une solution pour y :

$$y = \frac{1}{1 + Be^{-x}}.$$

On peut alors vérifier cette solution en considérant la dérivée par rapport à x de la fonction trouvée, où B est une constante arbitraire. Le résultat devrait être identifiée au problème original. (On doit être attentif aux valeurs absolues lors de la résolution de l'équation ci-dessus. Il est évident que les signes différents de la valeur absolue contribuent aux valeurs positive et négative pour B , respectivement. Et le cas $B=0$ est appuyé par le cas où $y=1$, comme indique ci-dessous.)

2- La croissance d'une population est parfois modélisée par l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

où P est la population en fonction du temps t , k est le taux de croissance, et K la capacité de contenance de l'environnement.

La séparation des variables peut être utilisée pour résoudre cette équation différentielle.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} &= \int k dt \end{aligned}$$

Afin d'évaluer l'intégral du membre de gauche, on simplifie la fraction complexe :

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K - P)}$$

Puis on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP &= \int k dt \\ \ln |P| - \ln |K - P| &= kt + C \\ \left| \frac{K - P}{P} \right| &= e^{-kt - C} \\ \frac{K - P}{P} &= \pm e^{-C} e^{-kt} \end{aligned}$$

On pose $A = \pm e^{-C}$.

$$\begin{aligned} \frac{K}{P} - 1 &= Ae^{-kt} \\ P &= \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \end{aligned}$$

Puis, la solution à l'équation logistique est :

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

Pour trouver A , on considère l'étape suivante dans le processus de résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt}$$

On pose $t = 0$ et $P(0) = P_0$. On a alors :

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A.$$

3.3.2. Équation différentielle du premier ordre, homogène. Une équation différentielle du premier ordre mais non nécessairement linéaire est dite homogène si elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

grâce à la substitution

$$u(x) = \frac{y(x)}{x},$$

l'équation homogène se transforme en une équation à variables séparées :

$$\frac{u'(x)}{h(u(x)) - u(x)} = \frac{1}{x}.$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : $y'x^2 - 2xy + y^2 = 0$;

3.4. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette section, a, b, c sont trois éléments de $\mathbb{K}$, avec $a \neq 0$.

On se donne une application $d : I \rightarrow \mathbb{K}$, continue sur l'intervalle I .

On considère les équations $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$ et $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.

On dit que (H) est l'équation homogène associée à l'équation (E) .

PROPOSITION 3.4 (Equation caractéristique). *Soit t un élément de $\mathbb{K}$. L'application $y : x \mapsto e^{tx}$ est solution de (H) si et seulement si $at^2 + bt + c = 0$. L'équation $at^2 + bt + c = 0$ est appelée équation caractéristique de (H) et (E) .*

PROPOSITION 3.5 (Solution générale de (H) dans le cas complexe). *On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on reprend les notations précédentes.*

On note C l'équation caractéristique, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

– Si $\Delta \neq 0$, l'équation C possède deux solutions complexes distinctes r et s .

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

– Si $\Delta = 0$, l'équation C possède une solution double r dans $\mathbb{C}$.

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

PROPOSITION 3.6 (Solution générale de (H) dans le cas réel). *On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.*

– Si $\Delta > 0$, l'équation C possède deux solutions réelles distinctes r et s .

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

– Si $\Delta = 0$, l'équation C possède une solution double r dans $\mathbb{R}$.

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

– Si $\Delta < 0$, l'équation C possède deux solutions complexes conjuguées distinctes r et $\bar{r}$.

Posons $r = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^$.*

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarques

– Dans tous les cas, la solution générale y de (H) s'écrit sous la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$, où y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (H) non nulles et non proportionnelles.

On exprime cette situation en disant que la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel, dont une base est constituée des applications y_1 et y_2 .

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a deux cas particuliers importants. Soit ω un réel strictement positif.

♦ La solution générale de $y'' + \omega^2 y = 0$ s'écrit $y(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

♦ La solution générale de $y'' - \omega^2 y = 0$ s'écrit $y(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Elle s'écrit aussi $y(x) = \cosh \omega x + \mu \sinh \omega x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode de variation des constantes

Soit (h_1, h_2) une base de solutions de l'équation (H).

On cherche une solution de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)h_1(x) + \mu(x)h_2(x)$.

Les applications $x \mapsto \lambda(x)$ et $x \mapsto \mu(x)$ sont ici supposées dérivables sur $\mathbb{R}$. On impose la condition supplémentaire :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)h_1(x) + \mu'(x)h_2(x) = 0.$$

Cette condition conduit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \lambda(x)h_1'(x) + \mu(x)h_2'(x).$$

Dans ces conditions

$$ay'' + by' + cy = d(x) \Leftrightarrow \lambda'(x)h_1'(x) + \mu'(x)h_2'(x) = \frac{1}{a}d(x) \quad (2).$$

On vérifie que le déterminant du système

$$\begin{cases} \lambda'(x)h_1(x) + \mu'(x)h_2(x) &= 0 \\ \lambda'(x)h_1'(x) + \mu'(x)h_2'(x) &= \frac{1}{a}d(x) \end{cases}$$

ne s'annule pas.

Ce système fournit donc $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ de façon unique.

On en déduit chacune des fonctions $x \mapsto \lambda(x)$ et $x \mapsto \mu(x)$ à une constante près.

Notons $x \mapsto \lambda(x) = \lambda_0(x) + \lambda$ et $x \mapsto \mu(x) = \mu_0(x) + \mu$ les fonctions ainsi obtenues.

On a donc trouvé les solutions suivantes, pour l'équation (E) :

$$x \mapsto y(x) = \lambda_0(x)h_1(x) + \mu_0(x)h_2(x) + \lambda h_1(x) + \mu h_2(x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}.$$

Si on note y_0 l'application $x \mapsto \lambda_0(x)h_1(x) + \mu_0(x)h_2(x)$ (solution de (E) obtenue par la méthode précédente avec $\lambda = \mu = 0$), on peut donc énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.7 (Solution générale de (E)). *L'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.*

Plus précisément, si y_0 est l'une de ces solutions, et si (h_1, h_2) est une base de solutions de (H) sur $\mathbb{R}$, alors la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit $y = y_0 + \lambda h_1 + \mu h_2$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Autrement dit, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 3.8 (Problème de Cauchy). *Soit x_0 un réel, et (y_0, m) un élément quelconque de $\mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution de (E) satisfaisant aux conditions initiales*

$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= m \end{cases}.$$

Trouver cette solution, c'est résoudre le problème de Cauchy relatif à ces conditions initiales.

Interprétation

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (toutes les fonctions sont donc à valeurs réelles).

Par tout point $M(x_0, y_0)$ il passe une courbe intégrale unique avec une pente donnée m .

Recherche d'une solution particulière de (E)

Il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre complètement l'équation différentielle (E).

– Si on "devine" une solution particulière de (E), on l'ajoute à la solution générale de (H).

Par exemple, une solution particulière de $y'' + y = 1$ est évidemment $y = 1$. La solution générale de (E) est donc donnée par $y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + 1$.

– Principe de superposition des solutions

On suppose que le second membre de (E) s'écrit $d(x) = \lambda d_1(x) + \mu d_2(x)$.

Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de (E) pour les seconds membres d_1 et d_2 .

Alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de (E) pour le second membre d .

– Supposons que l'application $x \mapsto d(x)$ soit à valeurs complexes, mais que a, b, c soient réels.

Soit $x \mapsto y(x)$ une solution particulière de $ay'' + by' + cy = d(x)$.

Alors l'application $x \mapsto \bar{y}(x)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \bar{d}(x)$.

Une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \operatorname{Re} d(x)$ est $x \mapsto \operatorname{Re} y(x)$.

– Si le second membre est de la forme $d(x) = P(x)e^{mx}$, où P est un polynôme et où m est un scalaire, alors l'équation (E) possède une solution de la forme :

◊ $y(x) = Q(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m n'est pas racine de l'équation caractéristique ;

◊ $y(x) = xQ(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m est racine simple de l'équation caractéristique.

◊ $y(x) = x^2Q(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m est racine double de l'équation caractéristique.

– Si le second membre est de la forme $d(x) = e^{ux}(\cos vxP(x) + \sin vxQ(x))$ avec a, b et c réels

Comme $\cos vx$ et $\sin vx$ sont des combinaisons linéaires de e^{ivx} et e^{-ivx} , en utilisant le principe de superposition, on se ramène à la résolution d'équations différentielles avec un second membre de la forme $e^{(u+iv)x}P(x)$, où P est un polynôme, et il suffit d'utiliser les résultats précédents.

On passe ainsi provisoirement au domaine complexe avant de revenir au cas réel par des combinaisons linéaires, ou en prenant, selon les cas, la partie réelle ou la partie imaginaire.

3.5. Exercices

EXERCICE 3.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y' = y^2 e^{-x}$;

ii) $x^2 y' = 1 + y$.

EXERCICE 3.2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y = \frac{y}{x+y}$;

2) $(x - 2y)y' = 2x - y$.

EXERCICE 3.3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

- a) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
- b) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$
- c) $(x \ln x)y' - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$
- d) $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$
- e) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
- f) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$
- g) $2xy' + y = x^n, n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3.4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $xy' + y = y^2 \ln x$;
- 2) $y - \frac{x}{2}y' = \sqrt{y}$;
- 3) $y' - y = xy^6$;
- 4) $y' = \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + 1$;
- 5) $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$ (ind. $y_p = -x^2$).

EXERCICE 3.5. Intégrer les équations suivantes :

- a) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
- b) $y'' + y' = 3 + 2x$
- c) $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$
- d) $y'' - 4y' + 4y = x \cosh 2x$
- e) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$
- f) $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x - 4e^{-x} \sin 2x$.

EXERCICE 3.6. Résoudre sur $\mathbb{R}$

- 1) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$.
- 2) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$.
- 3) $y'' - 2y' + y = (x-1)e^x$.
- 4) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1) \sinh x$.
- 5) $y'' - 4y' + 3y = xe^x \cos x$.
- 6) $y''(x) + y(x) = \sin^3 x$.