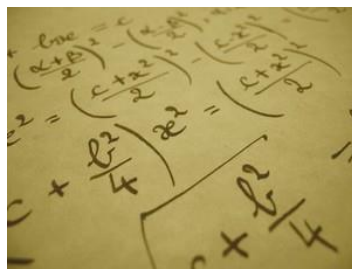


Chapitre 4: Réduction des matrices carrées - Algèbre semestre 2-SMPC



Filière DEUG :

SMP et SMC : Semestre 2



Cours D'Algèbre Filères SMP-SMC Abdelkhalek El ARNI et Brahim SADIK Semestre 2



مع تحيات فريق إعداد الامتحانات و المباريات
موقع طريق المعرفة

www.rapideway.org

أي ملاحظات أو مشاركات ترسل على :

rapideway@gmail.com

info@rapideway.org

Chapitre 4

Réduction des matrices carrées

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

4.1 Introduction

Dans plusieurs problèmes mathématiques on est amené à calculer une puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée A . Pour rendre cette tâche facile on procède à une réduction. Autrement dit, on cherche une matrice carrée B de même ordre que A , semblable à A et qui contient le maximum de zéros.

4.2 Vecteurs propres et valeurs propres

Définition 4.2.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $Av = \lambda v$. Le vecteur v est appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Proposition 4.2.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si λ est une valeur propre de A alors l'ensemble

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n : Av = \lambda v\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Remarque 4.2.1 Le sous-espace vectoriel E_λ est formé par le vecteur nul et les vecteurs propres de A associés à λ .

Exemple 4.2.1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il est clair que $Ae_2 = 2e_2$. Donc 2 est une valeur propre de A et on a :

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : Av = 2v \right\} \\ &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\} \\ &= \text{Vect} \{e_2\}. \end{aligned}$$

Proposition 4.2.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a les propriétés suivantes :

- 1) Si λ est une valeur propre de A alors E_λ est stable par A , c'est-à-dire $AE_\lambda \subset E_\lambda$,
- 2) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres,
- 3) Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Le résultat suivant donne une propriété importante des vecteurs propres d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 4.2.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de A distinctes deux à deux. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i} . Alors $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Le résultat suivant donne un moyen pratique pour le calcul des valeurs propres d'une matrice.

Théorème 4.2.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit I_n la matrice identité d'ordre n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) λ est une valeur propre de A ,
- 2) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
- 3) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

4.2. VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES

55

D'après ce théorème, λ est une valeur propre d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ si et seulement si elle est racine du polynôme

$$P_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - X \end{vmatrix}.$$

Définition 4.2.2 Le polynôme $P_A(X)$ défini ci-dessus est appelé polynôme caractéristique de la matrice A .

Exemple 4.2.2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 2 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(4-X) + 2 \\ &= X^2 - 5X + 6 \\ &= (X-2)(X-3) \end{aligned}$$

A admet donc deux valeurs propres réelles $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Remarque 4.2.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors :

- 1) $P_A(X)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n .
- 2) Si $P_A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ alors on a :

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \text{ et } a_0 = \det(A).$$
- 3) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- 4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors A admet au plus n valeurs propres qui sont les racines réelles de $P_A(X)$.
- 5) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors A admet au moins une valeur propre.

Exemple 4.2.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^2 + 1$. Donc A n'admet aucune valeur propre réelle. Par contre elle admet deux valeurs propres complexes i et $-i$.

Définition 4.2.3 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A . On appelle ordre de λ son ordre de multiplicité en tant que racine de $P_A(X)$. On parlera en particulier de valeurs propres simples, doubles et triples.

Exemple 4.2.4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $P_A(X) = (X - 4)^2$ donc 4 est une valeur propre double de A .

Remarque 4.2.3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et elle est de même ordre que λ . De plus si $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et si

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_n \end{pmatrix} \text{ alors on a :}$$

$$v \in E_\lambda \iff \bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}.$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} v \in E_\lambda &\iff Av = \lambda v \\ &\iff \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \\ &\iff A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \text{ (car } A \in M_n(\mathbb{R})) \\ &\iff \bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Exemple 4.2.5 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

A admet deux valeurs propres complexes simples et conjugués i et $-i$.

$$E_i = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Av = iv \right\}$$

On a :

$$\begin{aligned} Av = iv &\iff \begin{cases} 2x - 5y = ix \\ x - 2y = iy \end{cases} \\ &\iff x = (2 + i)y \end{aligned}$$

$$E_i = \left\{ \begin{pmatrix} (2+i)y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.3. THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

57

On obtient directement $E_{-i} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Proposition 4.2.3 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A d'ordre m . Alors on a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m.$$

Remarque 4.2.4 Si λ est une valeur propre simple de A alors $\dim(E_\lambda) = 1$.

4.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit un polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{K}[X]$. On note par $P(A)$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_pA^p.$$

Exemple 4.3.1) Si $P = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $P(A) = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Soit $P(X) = -1 + 2X + X^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $P(A) = -I_3 + 2A + A^2 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3.1 (Théorème de Cayley-Hamilton) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P_A(X)$ son polynôme caractéristique. Alors

$$P_A(A) = 0 \quad \text{où } 0 \text{ est la matrice nulle.}$$

Remarque 4.3.1 On dira que la matrice A annule son polynôme caractéristique.

Application au Calcul de l'inverse d'une matrice : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.4. DIAGONALISATION

59

On attribue à X la valeur λ dans (4.3) puis on dérive la relation (4.3) $k - 1$ fois et on remplace X par λ après chaque dérivation. Ce processus nous donnera k équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients de $R(X)$. En l'appliquant pour toutes les valeurs propres de A , on obtient un système linéaire à n équations et n variables. Les coefficients de $R(X)$ sont déterminés par la résolution de ce système. La matrice A^m est égale à $R(A)$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

4.4 Diagonalisation

Définition 4.4.1 On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

où $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$.

Exemple 4.4.1 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$ sont diagonales.

Remarque 4.4.1 Si A est diagonale alors pour tout m positif on a

$$A^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^m \end{pmatrix}.$$

Définition 4.4.2 On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Autrement dit A est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 4.4.2 Diagonaliser une matrice A revient à chercher une matrice P inversible telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

- 2) Si $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale alors les éléments de la diagonale de D sont exactement les valeurs propres de A . Plus précisément si λ est une valeur propre d'ordre m de A alors elle apparaît m fois dans la diagonale de D . En effet si

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$P_A(X) = P_D(X) = (d_1 - X)(d_2 - X) \cdots (d_m - X).$$

Les deux théorèmes suivants donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Théorème 4.4.1 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ possède une base formée uniquement de vecteurs propres de A .

Théorème 4.4.2 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) Le polynôme caractéristique de A admet toutes ses racines dans $\mathbb{K}$,
- 2) pour chaque valeur propre λ d'ordre m , on a $\dim E_\lambda = m$.

Remarque 4.4.3 Pour qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ il suffit que A vérifie la deuxième condition du théorème précédent puisque la première condition est toujours vérifiée.

Exemple 4.4.2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)((3-X)(-X) + 2) \\ &= (1-X)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (1-X)^2(2-X). \end{aligned}$$

A admet deux valeurs propres réelles : $\lambda_1 = 1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple).

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : Av = v \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = -x \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

4.4. DIAGONALISATION

61

On a $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$. Donc les conditions du théorème 4.4.2 sont vérifiées et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.4.1 Si une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes deux à deux dans $\mathbb{K}$ alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. $P_A(X)$ admet n racines simples deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
Donc

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n).$$

La première condition du théorème 4.4.2 est vérifiée. D'autre part la proposition 4.2.3 entraîne

$$\dim E_{\lambda_i} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Par suite A est diagonalisable d'après le théorème 4.4.2. ♣

Exemple 4.4.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -2 & -X & 2 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 2 \\ -X & -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 2 \\ 0 & -2 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X(X^2 + 4). \end{aligned}$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la première condition du théorème 4.4.2 n'est pas vérifiée. Donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $P_A(X) = -X(X + 2i)(X - 2i)$ et A admet trois valeurs propres complexes distinctes deux à deux $0, 2i$ et $-2i$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ d'après le dernier corollaire.

4.5 Algorithme de diagonalisation

Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour étudier la diagonalisation de A on suit les étapes suivantes :

Etape 1 : On calcule $P_A(X)$.

- Si l'une des racines de $P_A(X)$ n'est pas dans $\mathbb{K}$ alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Si toutes les racines de $P_A(X)$ sont dans $\mathbb{K}$ on passe à l'étape suivante.

Etape 2 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de $P_A(X)$ dans $\mathbb{K}$, deux à deux distinctes et soient $m_1, \dots, m_p$ leurs ordres respectifs. Pour chaque valeur propre λ_i on détermine le sous-espace propre E_{λ_i} et une base $\mathcal{B}_i$ de ce sous-espace.

Etape 3 : Pour chaque valeur propre λ_i on compare son ordre et $\dim E_{\lambda_i}$.

- S'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\dim E_{\lambda_i} \neq m_i$ alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on a $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On passe alors à l'étape suivante.

Etape 4 : La famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A . Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale semblable à A . Chaque valeur propre λ_i apparaît m_i fois dans la diagonale principale de D .

Remarque 4.5.1 L'ordre des valeurs propres dans la diagonale de D est compatible avec celui des vecteurs propres dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 4.5.1 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$P_A(X) = X^2 + 1.$$

Il est clair que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme A admet deux valeurs propres complexes distinctes i et $-i$ alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit $E = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ sa base canonique.

$$\begin{aligned} E_i &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Av = iv \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : x = (i-1)y \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

4.5. ALGORITHME DE DIAGONALISATION

63

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$E_{-i} = \text{Vect}\{v_2\}.$$

La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de A .

Soit $P = \begin{pmatrix} i-1 & -i-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. La matrice

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale semblable à A .

Exemple 4.5.2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ X-1 & 2-X & 1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-X & 2 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)((3-X)(2-X) - 2) \\ &= (1-X)(X^2 - 5X + 4) \\ &= (1-X)^2(4-X) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ est une valeur propre double de A et $\lambda_2 = 4$ est une valeur propre simple de A .

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : Av = v \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect}\{v_1, v_2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : Av = 4v \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect}\{v_3\}. \end{aligned}$$

Les deux conditions du théorème 4.4.2 sont vérifiées donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E formée de vecteur propres de A . Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. La matrice

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale semblable à A .

4.6. APPLICATIONS

65

4.6 Applications

4.6.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et soit $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible telle que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Alors on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$A^m = PD^mP^{-1} \quad \text{avec} \quad D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.6.1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a vu que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$A^m = PD^mP^{-1}.$$

Calculons P^{-1} . On a :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = e_2 - e_3 \\ v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(2v_1 - v_2 - v_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(-v_1 + 2v_2 - v_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \end{cases}$$

et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A^m &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^m \\ 0 & 1 & 4^m \\ -1 & -1 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^m & -1+4^m & -1+4^m \\ -1+4^m & 2+4^m & 1+4^m \\ -1+4^m & -1+4^m & 2+4^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.6.2 Résolution d'un système différentiel homogène

La méthode de résolution est inspirée de l'exemple suivant :

Exemple 4.6.2 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \quad (4.4)$$

où y_1, y_2, y_3 sont des fonctions inconnues de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour résoudre ce système on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$. Alors le système (4.4) est équivalent à $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = PZ$ où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (z_1, z_2, z_3 sont les nouvelles fonctions inconnues).

4.6. APPLICATIONS

67

Alors on a :

$$\begin{aligned}(4.4) \Leftrightarrow Y' &= AY \\ \Leftrightarrow PZ' &= (PDP^{-1})PZ \\ \Leftrightarrow Z' &= DZ \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' &= z_1 \\ z_2' &= z_2 \\ z_3' &= 4z_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 &= c_1 e^t \\ z_2 &= c_2 e^t \\ z_3 &= c_3 e^{4t} \end{cases} \quad \text{où } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Comme $Y = PZ$ alors on a :

$$\begin{cases} y_1 &= z_1 + z_3 &= c_1 e^t + c_3 e^{4t} \\ y_2 &= z_2 + z_3 &= c_2 e^t + c_3 e^{4t} \\ y_3 &= -z_1 - z_2 + z_3 &= -c_1 e^t - c_2 e^t + c_3 e^{4t} \end{cases} \quad \text{où } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$