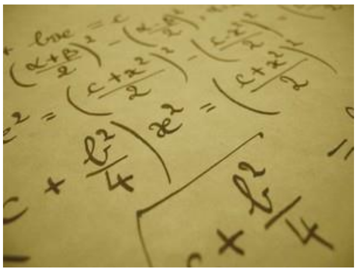
Chapitre 2 : Espace vectoriel - Algèbre semestre 2-SMPC

UNIVERSITE CADI AYYAD MARRAKECH جامعة القاضي عياض مراكش

FSSM كلية العلوم السملالية Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

Filière DEUG :

SMP : Semestre 2



Cours D'Algèbre

Filères SMP-SMC

Abdelkhalek El ARNI et Brahim SADIK

Semestre 2

Table des matières

3

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Structure d'espaces vectoriels

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne dans E est une application de $E \times E$ dans E.
Une loi de composition externe sur E est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Exemple 2.1.1 *1) L'addition des entiers est une loi de composition interne dans* $\mathbb{N}$.

2) La multiplication d'un polynôme par un réel est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Soit $E = \mathbb{R}^3$. *L'application notée* $\cdot$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.1.1 *On appelle espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *(ou* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel) un ensemble non vide* E *muni de deux lois :*

- *Une loi de composition interne, notée* $+$, *telle que :*

  i) $+$ *est associative :* $\forall u, v, w \in E \quad u + (v + w) = (u + v) + w$

  ii) E *possède un élément neutre* 0_E *pour* $+$ *:* $\forall v \in E \quad v + 0_E = 0_E + v = v$

  iii) Tout élément de E *admet un symétrique :* $\forall \ v \in E \ \exists \ w \in E \quad v+w = w+v = 0_E$

21

iv) + est commutative : $\forall v, w \in E \ \ v + w = w + v$.

- *Une loi de composition externe, notée* $\cdot$, *telle que :*

  i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in E \ \ (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

  ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v, w \in E \ \ \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

  iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in E \ \ \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$

  iv) $\forall v \in E \ \ 1 \cdot v = v$.

L'espace vectoriel E *muni de ces deux lois est noté* $(E, +, \cdot)$ *ou simplement* E *lorsqu'il n'y a pas de confusion. Le symétrique* w *d'un élément* v *de* E *pour* $+$ *est noté* $-v$.

Remarque 2.1.1 *1) Les éléments de* E *s'appellent des vecteurs et ceux de* $\mathbb{K}$ *s'appellent des scalaires.*

2) Lorsqu'il n'y a pas de confusion, l'élément neutre 0_E *est noté simplement* 0.

Exemple 2.1.2 *1) L'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *noté* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel pour les deux lois :*

- *La loi interne définie par* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \ : f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- *La loi externe définie par* $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \ \ : \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Pour tout entier positif n, *le produit* $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les deux lois :*

- *La loi interne définie par*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad a_i, b_i \in \mathbb{K}$$

- *La loi externe définie par*

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{K} \ \ a_i \in \mathbb{K}$$

3) L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les deux lois :*

- *La loi interne définie par :*

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X) \ \ P, Q \in \mathbb{K}[X]$$

– *La loi externe définie par :*

$$(\alpha \cdot P)(X) = \alpha P(X) \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad P \in \mathbb{K}[X]$$

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :

1) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v \in E \ \ (\alpha \cdot v = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $v = 0_E)$
2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \ \forall v \in E \ \ (\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v$. En particulier $(-1) \cdot v = -v$.
3) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \ \forall v, w \in E \ \ \alpha \cdot (v - w) = \alpha \cdot v - \alpha \cdot w$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille finie d'éléments de E. Une combinaison linéaire des éléments de cette famille est tout élément v de E de la forme

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \quad \text{où} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Exemple 2.1.3

1) Dans $\mathbb{R}^3$ *le vecteur* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une combinaison linéaire des deux vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *En effet*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Dans $\mathbb{R}[X]$, *un polynôme de degré inférieur ou égal à un entier* n *est une combinaison linéaire des éléments de la famille* $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.2.1 *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Une partie* F *de* E *est un sous-espace vectoriel de* E *si*

- F *est non vide,*
- $(F, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Théorème 2.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- *F est non vide,*
- *F est stable pour la loi $+$: $\forall v, w \in F \ \ v + w \in F$,*
- *F est stable pour la loi $\cdot$: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v \in F \ \ \alpha \cdot v \in F$.*

Démonstration.

- $\Longrightarrow$) Par hypothèse F est non vide. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ $v, w \in F$. Comme F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on a $v + w \in F$ et $\alpha \cdot v \in F$.
- $\Longleftarrow$) Pour montrer l'implication inverse, les seuls points à vérifier sont les points $ii)$ et $iii)$ de la loi interne $+$ (voir Définition 2.1.1).
  Prenons $\alpha = 0$ et $v \in F$, alors $\alpha \cdot v = 0_E \in F$ et donc F possède un élément neutre pour la loi $+$.
  Soit $v \in F$, par définition de E il existe $w \in E$ tel que $v + w = w + v = 0_E$, donc $w = -v = (-1) \cdot v \in F$.
  Comme F est non vide, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et donc F est un sous-espace vectoriel de E. ♣

On peut résumer ce théorème sous la forme suivante :

Corollaire 2.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- *F est non vide,*
- *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v, w \in F \ \ \alpha \cdot v + \beta \cdot w \in F$.*

Remarque 2.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $0_F = 0_E$ et $\forall v \in F$ on a $-v \in F$.*

Exemple 2.2.1 *1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le singleton $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

2) L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

4) L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5) L'esnemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à un entier n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 2.2.2 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie finie de E. En utilisant le dernier théorème, on montre que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de V est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie finie de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par V l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de V. On le note $\mathrm{Vect}(V)$.*

Remarque 2.2.3 *1) Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ alors*

$$\mathrm{Vect}(V) = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \ : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

2) Soit $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $W = \{w_1, \dots, w_q\}$ deux parties de E. Alors $\mathrm{Vect}(V) = \mathrm{Vect}(W)$ si et seulement si $V \subset \mathrm{Vect}(W)$ et $W \subset \mathrm{Vect}(V)$.

Exemple 2.2.2 *1) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(v_1, v_2) &= \{\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 \ : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \ : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \ : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

2) Dans $\mathbb{K}[X]$, soit V la famille $(1, X, X^2)$. Alors

$$\mathrm{Vect}(V) = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \ : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble

$$\begin{aligned} F + G &= \{v \in E \ / \exists v_1 \in F \ \exists v_2 \in G \ : v = v_1 + v_2\} \\ &= \{v_1 + v_2 \ / v_1 \in F, v_2 \in G\} \end{aligned}$$

est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle somme de F et G.

Remarque 2.2.4 *On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$.*

Exemple 2.2.3 *1) Soit $E=\mathbb{R}^2$. Soit $F=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}$. Alors*

$$F+G=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^2.$$

2) Soit $E=\mathbb{R}^3$. Soit $F=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Alors

$$F+G=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta+x\\y\end{pmatrix} : \alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\gamma\\y\end{pmatrix} : \alpha,\gamma,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3.$$

Définition 2.2.3 *La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est une somme directe si tout élément de $F+G$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Dans ce cas on écrit $F\oplus G$ au lieu de $F+G$.*

Théorème 2.2.2 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{0\}$.*

Démonstration.

- $\Longrightarrow$) Soit $v\in F\cap G$, alors $v=v+0=0+v$ est une écriture de v comme somme d'éléments de F et G. Comme la somme est directe on a nécessairement $v=0$.
- $\Longleftarrow$) Soit $v\in F+G$, montrons qu'il se décompose d'une manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Supposons que

$$v=v_1+v_2=w_1+w_2 \text{ avec } v_1,w_1\in F \;\; v_2,w_2\in G$$

Alors $v_1-w_1=w_2-v_2$ est un élément de $F\cap G$. Comme $F\cap G=\{0\}$ on a $v_1-w_1=w_2-v_2=0$ et par suite $v_1=w_1$ et $v_2=w_2$. ♣

Lorsque la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est directe et $F+G=E$, on dit que F et G sont supplémentaires.

Exemple 2.2.4 *1) Dans $\mathbb{R}^3$ soit $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$. Montrons que la somme $\mathrm{Vect}(v_1)+\mathrm{Vect}(v_2)$ est directe. D'après le théorème 2.2.2, c'est équivaut à montrer que*

$\mathrm{Vect}(v_1) \cap \mathrm{Vect}(v_2) = \{0\}$. *Soit* $v \in \mathrm{Vect}(v_1) \cap \mathrm{Vect}(v_2)$ *alors il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$. *Donc* $\alpha = \beta = 0$ *et* $v = 0$. *La somme* $\mathrm{Vect}(v_1) + \mathrm{Vect}(v_2)$ *est donc directe.*

2) Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ *et* $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$. *Alors* $F + G$ *n'est pas directe car* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \cap G$.

3) Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(respectivement* $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

En effet, soit f *un élément de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors la fonction* f_1 *définie par* $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ *est une fonction paire et la fonction* f_2 *définie par* $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ *est une fonction impaire. La relation*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

implique que

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$ *la somme est directe et les deux sous-espaces vectoriels* $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *sont supplémentaires.*

2.3 Familles libres, liées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille d'éléments de E.

Définition 2.3.1 *La famille* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est dite libre si*

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} \;\; \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_p + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0.$$

On dira aussi que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ *sont linéairement indépendants.*

Définition 2.3.2 *La famille* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est dite liée si elle n'est pas libre, c'est à dire si*

$$\exists \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} \;\; \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_p + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = 0_E \;\; \text{et} \;\; \exists i \in \{1, \ldots, p\} \;\; \alpha_i \neq 0.$$

On dira aussi que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ *sont linéairement dépendants.*

Remarque 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors la famille (0_E) est liée.*

Exemple 2.3.1 *1) Soit* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Cette relation nous conduit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Donc les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$.*

2) Soit f_1, f_2 et f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : f_1(x) = \cos^2(x), \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad f_3(x) = 1$$

La relation $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ implique que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille liée dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

i) Soit v un vecteur de E. La famille (v) est libre si et seulement si $v \neq 0_E$.

ii) Une famille contenue dans une famille libre est libre.

iii) Une famille qui contient une famille liée est liée. En particulier toute famille qui contient 0_E est liée.

Théorème 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $p \geq 2$ un entier. Une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ d'éléments de E est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs, soit v_i, est combinaison linéaire des éléments de la famille $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_p + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = 0_E.$$

Soit i tel que $\alpha_i \neq 0$ alors

$$v_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} \cdot v_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_i} \cdot v_2 + \cdots + \frac{-\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot v_{i-1} + \frac{-\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot v_{i+1} + \cdots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_i} \cdot v_p.$$

Le vecteur v_i est donc une combinaison linéaire des éléments de la famille $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p)$.
$\Longleftarrow$) Supposons qu'un vecteur v_i s'écrit

$$v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_p \cdot v_p$$

alors

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} - v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = 0_E$$

Ceci implique que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille liée. ♣

Remarque 2.3.2 *Pour tout vecteur v et tout scalaire α, la famille $(v, \alpha v)$ est liée.*

Exemple 2.3.2 *1) Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ et donc la famille (v_1, v_2, v_3) est liée.*

2) Considérons les polynômes $P_1(X) = 1 + X$, $P_2(X) = -1 + 2X + 3X^2$, $P_3(X) = X + X^2$. On a $P_1(X) + P_2(X) - 3P_3(X) = 0$, ce qui implique que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.

2.4 Familles génératrices, Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille finie $V = (v_1, \dots, v_m)$ d'éléments de E telle que $E = \mathrm{Vect}(V)$. Dans ce cas on dit que la famille V est une famille génératrice de E ou que E est engendré par V.*

Exemple 2.4.1 *1) Soit $E = \mathbb{C}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (e_1, e_2) engendre E car pour tout élément $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in E$ on a $v = z_1 \cdot e_1 + z_2 \cdot e_2$.*

2) Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. Il est engendré par la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ dans la ième position})$$

3) L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Définition 2.4.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est libre et génératrice.*

Théorème 2.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.*

Définition 2.4.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal de l'une des bases de E s'appelle la dimension de E. La dimension d'un sous-espace vectoriel de E est sa dimension en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Remarque 2.4.1 *Par convention la dimension du sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est égal à 0.*

Exemple 2.4.2 *1) Soit $E = \mathbb{C}^3, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.*

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ dans la ième position})$$

est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi la dimension de $\mathbb{K}^n$ est n.

3) Dans $\mathbb{K}[X]$ considérons le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$. La famille $(1, X, X^2)$ est libre alors elle constitue une base de F. Donc la dimension de F est 3. En général, pour un entier n, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition 2.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Soit v un vecteur de E. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, elle est génératrice. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Supposons qu'il existe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que v s'écrit aussi $v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$. Par soustraction, on obtient la relation $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est libre on a nécessairement $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq n$. ♣

Théorème 2.4.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors*

1) *Toute famille libre à n éléments est une base de E.*

2) *Toute famille génératrice à n éléments est une base de E.*

Exemple 2.4.3 *1) Dans $\mathbb{C}^3$, soit* $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \\ 1 \end{pmatrix}$. *La famille (v_1, v_2, v_3) est libre et comme elle est à trois éléments, elle forme une base de $\mathbb{C}^3$.*

Remarque 2.4.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G admettent une base commune alors $F = G$.*

Théorème 2.4.3 (Théorème de la base incomplète) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit p un entier vérifiant $1 \leq p < n$. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de E, alors il existe $v_{p+1}, \ldots, v_n$ des éléments de E tels que la famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ est une base de E. Autrement dit toute famille libre de E est contenue dans une base de E.*

Théorème 2.4.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

1) $\dim(F) \leq \dim(E)$,

2) Si $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $E = F$.

Démonstration.

1) Soit $\mathcal{B}$ une base de F. La famille $\mathcal{B}$ est libre dans E. Par le théorème da la base incomplète, elle est contenue dans une base de E. Donc $\dim(F) \leq \dim(E)$.

2) Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E qui contient n éléments. Elle est donc une base de E. D'où $E = F$. ♣

Théorème 2.4.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si la somme $F + G$ est directe alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 2.4.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 2.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.*

Exemple 2.4.4 *Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $G = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Alors $E = F \oplus G$. En effet, $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3$.*

En dimension 2 et 3, nous avons une caractérisation de l'indépendance linéaire par les déteminants.

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Alors

   i) Un vecteur $v = ae_1 + be_2$ est linéairement indépendant si et seulement si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

   ii) Deux vecteurs $v_1 = ae_1 + be_2$ et $v_2 = ce_1 + de_2$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Alors

   i) Un vecteur $v = ae_1 + be_2 + ce_3$ est linéairement indépendant si et seulement si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

   ii) Deux vecteurs $v_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ et $v_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

   iii) Trois vecteurs $v_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $v_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ et $v_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exemple 2.4.5 *1) Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ sont linéairement indépendants parceque*

$$\begin{vmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants parceque*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

3) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants parceque*

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

2.5 Calcul pratique de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.5.1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. On appelle rang d'une famille* $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_p)$ *d'éléments de* E, *qu'on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{V})$, *la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$.

Exemple 2.5.1 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *On a* $v_3 = v_1 + v_2$ *donc* $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. *De plus* (v_1, v_2) *est libre donc* $\mathrm{rg}(v_1, v_2) = 2$.

Proposition 2.5.1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $(v_1, \ldots, v_p)$ *une famille d'éléments de* E. *Alors on a :*

1) $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leq \min(n, p)$,

2) $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) = p \iff (v_1, \ldots, v_p)$ *est libre.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Un vecteur v de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ s'appelle vecteur des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.

Exemple 2.5.2 *Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Soit $P = 1 - X + 2X^2$, alors le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est le vecteur des coordonnées de P dans $\mathcal{B}$.*

Remarque 2.5.1 *Si $E = \mathbb{K}^n$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ alors tout vecteur v de E coincide avec le vecteur de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.*

Soit maintenant $V = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E. La matrice de V dans $\mathcal{B}$ est la matrice, à n lignes et à p colonnes, dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur des coordonnées du vecteur v_j. Pour $j = 1, \dots, p$, le vecteur v_j s'écrit

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \quad : (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}) \in \mathbb{K}^n$$

Alors la matrice de V dans $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^V$, est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^V = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.5.3 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. Soit $V = (P_1, P_2)$ où $P_1 = 1 - X - X^2$ et $P_2 = 2 + X - 3X^2$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.5.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $V = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire homogène correspondant à la matrice de V dans $\mathcal{B}$. Alors le rang de V est égal à $n - q$ où q est le nombre des variables indépendantes de $\mathcal{S}$.*

Exemple 2.5.4 *Dans $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, soit*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice des coordonnées de la famille $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ dans $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de variables indépendantes est 2 (voir Exemple 1.2.5). Donc le rang de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est 3.

Remarque 2.5.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit V une famille finie de vecteurs de E.*

1) Si on connaît une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Vect}(V)$ alors le rang de la famille V est égal au cardinal de $\mathcal{B}_1$.

2) Si V est formée de n éléments alors V est libre si le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{V}$ est non nul. Dans ce cas V est aussi une base de E.

Exercice 1

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v \in E\quad (\alpha \cdot v = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $v = 0_E)$.
2) $\forall v \in E\quad (-1) \cdot v = -v$.
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \forall v \in E\quad (\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v$.
4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \ \forall v, w \in E\quad \alpha \cdot (v - w) = \alpha \cdot v - \alpha \cdot w$.

Exercice 2

Dans les cas suivants, F est-t-il un sous-espace vectoriel de E?

1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 1 \right\}$.
2) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et F est formé des suites réelles croissantes.
3) E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E)\quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Montrer que

1) l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2) l'ensemble des solutions du système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & 2w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \\ x & & & & & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

1) Soit P une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $i = 1 \cdots n$, soit C_i le vecteur correspondant à la $i^{\text{ème}}$ colonne de P. Montrer, en utilisant la définition, que la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est libre si et seulement si P est inversible.
2) Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs v_1, v_2, v_3, de $\mathbb{R}^3$, sont-t-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

1) Montrer que la famille $(1, X, X^2)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les éléments $1, X, \ldots, X^n$ sont linéairement indépendants.
3) Soit $a \in \mathbb{K}$, montrer que la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 6

1) Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et calculer sa dimension.
3) Soit $a \in \mathbb{K}$, Montrer que $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 7

Donner une base de l'ensemble des solutions du système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & 2w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \\ x & & & & & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $n \geq 2$ et soit $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. Soit

$$E_a = \{P \in E \ : \ P(a) = 0\} \text{ et } E_b = \{P \in E \ : \ P(b) = 0\}.$$

1) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que : $1 = \alpha(X - a) + \beta(X - b)$.
2) Montrer que $E = E_a + E_b$.
3) La somme est-elle directe?

Exercice 9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

1) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F et $\mathcal{B}_2$ est une base de G alors la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
2) En déduire que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice 10
Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ -22 \\ 20 \end{pmatrix}.$$