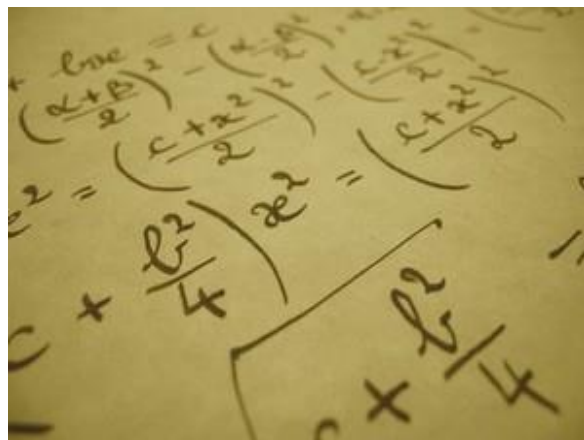


Chapitre 1: Résolution des systèmes linéaires - Algèbre semestre 2-SMPC



Filière DEUG :

SMP : Semestre 2



Cours D'Algèbre
Semestre 2



مع تحيات فريق إعداد الامتحانات و المباريات
موقع طريق المعرفة

www.rapideway.org

أي ملاحظات أو مشاركات ترسل على :

rapideway@gmail.com

info@rapideway.org

Chapitre 1

Résolution des systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Méthode de Gauss

Définition 1.1.1 Une équation linéaire en les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une relation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = d$$

où les scalaires $a_1, \dots, a_n, d$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Le scalaire d est le terme constant

de l'équation. Un n -uplet $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est une solution de cette équation si la relation

$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = d$ est vérifiée.

Définition 1.1.2 Soient m, n deux entiers positifs. Un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée de m équations linéaires en n variables, à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = d_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = d_m \end{cases} \quad (1.1)$$

Le n -uplet $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est une solution de ce système s'il est solution de toutes ses équations.

CHAPITRE 1. RÉOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Remarque 1.1.1 Les variables d'un système linéaire s'appellent aussi les inconnues du système.

Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

La méthode de Gauss permet de transformer le système en un autre système qui a les mêmes solutions et qui est facile à résoudre.

Théorème 1.1.1 (Méthode de Gauss) Si un système linéaire est transformé en un autre par l'une des opérations suivantes :

1. une équation est échangée avec une autre
2. une équation est multipliée par une constante non nulle
3. une équation est remplacée par la somme d'elle même et une autre équation multipliée par une constante non nulle

alors les deux systèmes ont les mêmes solutions. On dira alors que les deux systèmes sont équivalents.

Définition 1.1.3 Les trois transformations du théorème 1.1.1 s'appellent les transformations élémentaires, ou les transformations de Gauss.

Pour des raisons de simplicité on utilise la représentation matricielle d'un système linéaire. Le système linéaire (1.1) est représenté par la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & d_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & d_m \end{array} \right) \quad (1.2)$$

Etant donné un système linéaire, On parle d'équation ou de ligne et on note la i ème ligne par ℓ_i .

Exemple 1.1.1 Appliquons la méthode de Gauss au système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 4 & \ell_1 \\ 3x + 11y - 2z = 8 & \ell_2 \\ 5x + 16y - 7z = 12 & \ell_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 3 & 11 & -2 & 8 \\ 5 & 16 & -7 & 12 \end{array} \right) \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

1.1. MÉTHODE DE GAUSS

7

On multiplie la première ligne par $\frac{1}{2}$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 11 & -2 & 8 \\ 5 & 16 & -7 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

On remplace ℓ_2 par $\ell_2 - 3\ell_1$ et on remplace ℓ_3 par $\ell_3 - 5\ell_1$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 - 5\ell_1 \end{array}$$

On multiplie la deuxième ligne du système obtenu par $\frac{1}{2}$ et on retranche son opposé de la troisième ligne, on aura

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2 \end{array} \quad (1.4)$$

Le système correspondant à cette représentation matricielle est

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

La solution est maintenant facile à calculer. La troisième ligne montre que $z = 1$. On substitue le résultat dans la deuxième ligne et on obtient $y = -1$ et finalement on obtient $x = 7$.

Étudions un autre exemple

Exemple 1.1.2 Soit le système

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 & \ell_1 \\ 2x + 2y - 2z = 0 & \ell_2 \\ y - z = 2 & \ell_3 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

On remplace ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \ell_2 - \ell_1$$

On multiplie la deuxième ligne du système obtenu par $\frac{1}{4}$ et on retranche son opposé de la troisième ligne, on aura

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{4}\ell_2 \\ \ell_3 - \frac{1}{4}\ell_2 \end{array}$$

Le système correspondant à cette représentation matricielle est

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

La troisième équation est contradictoire et donc le système n'admet pas de solutions.

Dans un système linéaire, on peut avoir plus d'équations que d'inconnues ou moins d'équations que d'inconnues.

Exemple 1.1.3 Le système

$$\begin{cases} 2x + 4y = -4 \\ x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

a trois équations et deux inconnues. Appliquons la méthode de Gauss à ce système.

La matrice augmentée du système est comme suit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

On multiplie la première ligne par $1/2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

On remplace ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$ et on remplace ℓ_3 par $\ell_3 + \ell_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array}$$

On multiplie ℓ_2 par $\frac{1}{5}$ et ℓ_3 par $-\frac{1}{4}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}\ell_2 \\ -\frac{1}{4}\ell_3 \end{array}$$

1.1. MÉTHODE DE GAUSS

9

La troisième équation du système correspondant est équivalente à la deuxième équation. On dit qu'elle est redondante et on peut l'éliminer du système. Notre système est transformé en ce qui suit :

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ -y = 1 \end{cases}$$

On obtient donc $y = -1$ et $x = 0$.

Un système linéaire peut avoir une infinité de solutions comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.4 Soit le système

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z + w = 1 \\ 2x + 2y - 2z - w = 0 \\ x + y - z + w = 1 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \frac{1}{2}\ell_1 \\ \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \begin{matrix} \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{matrix}$$

Le système correspondant à cette représentation matricielle est

$$\begin{cases} x - y + z + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2} \\ + y - z - \frac{1}{2}w = -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2}w = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est égal à l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ z + 1/12 \\ z \\ 2/3 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{K} \right\}$.

1.2 Ensemble des solutions d'un système linéaire

Définition 1.2.1 Dans un système linéaire, une équation est redondante si elle est le multiple d'une autre équation. Une équation est contradictoire si elle est de la forme $0 = c$, où c est une constante non nulle.

Définition 1.2.2 Etant donné un système linéaire. Un ordre sur les variables du système est un classement de ses variables. Dans une équation, la première variable à coefficient non nul est dite sa variable principale. Un système linéaire est dit en forme échelon si ses équations, qui ne sont ni redondantes ni contradictoires, ont des variables principales distinctes deux à deux.

Exemple 1.2.1 Regardons l'exemple 1.1.1 où on classe les variables selon l'ordre x, y, z . La variable x est la variable principale de toutes les équations du système en question, il n'est pas en forme échelon. Par contre le système correspondant à la représentation matricielle (1.4) est un système en forme échelon. La première équation (respectivement la deuxième et la troisième) admet la variable x (respectivement y et z) comme variable principale.

Théorème 1.2.1 Soit S_1 un système de la forme (1.1). Alors par les transformations élémentaires, le système S_1 se transforme en un système S_2 en forme échelon.

Soit le système linéaire à m équations en n variables :

$$S_1 \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = d_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = d_m \end{cases}$$

Le dernier théorème dit qu'en appliquant des transformations élémentaires à S_1 , on obtient un système linéaire S_2 en forme échelon et qui admet les mêmes solutions que S_1 :

$$S_2 \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_r \\ 0 = c_1 \\ \vdots \\ 0 = c_{m-r} \end{cases}$$

où $E_1, E_2, \dots, E_r$ sont des équations linéaires de variables principales distinctes deux à deux et $c_1, \dots, c_{m-r}$ sont des scalaires. On dit que S_2 est une forme échelon de S_1 .

1.2. ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

11

Théorème 1.2.2 Soit S_1 un système linéaire et soit

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_r \\ 0 = c_1 \\ \vdots \\ 0 = c_{m-r} \end{array} \right.$$

une forme échelon de S_1 .

- Si l'un des scalaires $c_1, \dots, c_{m-r}$ est non nul alors le système n'admet pas de solutions.
- Si les scalaires $c_1, \dots, c_{m-r}$ sont tous nuls alors le système admet au moins une solution.

Exemple 1.2.2

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 2y & -3z & = & 4 & \ell_1 \\ & & y & + & 2z & = & 5 & \ell_2 \\ 3x & - & y & + & z & = & 2 & \ell_3 \\ x & & & + & z & = & 1 & \ell_4 \end{array} \right.$$

La matrice augmentée associée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{array}$$

On remplace ℓ_3 par $\ell_3 - 3\ell_1$ et on remplace ℓ_4 par $\ell_4 - \ell_1$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \\ \ell_4 - \ell_1 \end{array}$$

On remplace ℓ_3 par $\ell_3 + 7\ell_2$ et ℓ_4 par $\ell_4 + 2\ell_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 24 & 25 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 + 7\ell_2 \\ \ell_4 + 2\ell_2 \end{array}$$

On remplace ℓ_4 par $\ell_4 - \frac{1}{3}\ell_3$, le système se transforme en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 24 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 - \frac{1}{3}\ell_3 \end{array}$$

Le système correspondant à cette représentation matricielle est

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 5 \\ 24z = 25 \\ 0 = -4/3 \end{cases}$$

qui est en forme échelon. Ce système n'admet pas de solutions.

Définition 1.2.3 Dans une forme échelon d'un système linéaire, une variable qui n'est pas une variable principale s'appelle une variable indépendante du système.

Exemple 1.2.3 Dans l'exemple 1.1.4, la variable z n'est la variable principale d'aucune équation, c'est une variable indépendante.

Une variable utilisée dans la description des solutions d'un système linéaire s'appelle un paramètre.

Remarque 1.2.1 Une variable peut être un paramètre sans qu'elle soit indépendante. Dans l'exemple 1.1.4, on peut paramétriser l'ensemble des solutions par y en écrivant $z = y - 1/12$. Par contre une variable indépendante est toujours un paramètre.

Théorème 1.2.3 Soit S un système linéaire, de la forme (1.1), qui admet des solutions et soit k le nombre de ses variables indépendantes ($k \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe k éléments de $\mathbb{K}^n$, $v_1, \dots, v_k$ tels que l'ensemble des solutions de ce système est de la forme

$$\{v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\},$$

où $v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système.

Remarque 1.2.2 Les éléments $v_1, \dots, v_k$ du dernier théorème sont des solutions du système

$$S_h \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

1.2. ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

13

appelé système homogène associé à S .

Exemple 1.2.4 Pour l'exemple 1.1.4, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ z + 1/12 \\ z \\ 2/3 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/12 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{K} \right\}$$

Exemple 1.2.5 Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + w + 2t = 0 \\ -x - z - 3w + 5t = 0 \\ -x + y - 2z + w + t = 0 \end{cases}$$

Puisque les termes constants des équations du système sont tous nuls, on applique la méthode de Gauss à la matrice du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 + \ell_1 \\ \ell_5 + \ell_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 + \ell_2 \\ \ell_5 + 2\ell_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 - 2\ell_3 \\ \ell_5 - \ell_3 \end{matrix}$$

Une forme échelon de notre système est

$$\begin{cases} x + y + w = 0 \\ -y + z - 2w + t = 0 \\ -2w + 3t = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les équations 3 et 4 du dernier système sont redondantes. Les variables indépendantes sont z, t . L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{2}t \\ z - 2t \\ z \\ \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{K} \right\}$$

1.3 Calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss

1.3.1 Déterminant d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. En appliquant la méthode de Gauss à A , on obtient une matrice triangulaire supérieure T .

- Si l'un des coefficients diagonaux de T est nul alors le déterminant de A est nul.
- Supposons que tous les coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de T sont non nuls et posons $D = t_{1,1}t_{2,2} \cdots t_{n,n}$. On détermine le déterminant de A comme suit : chaque fois que l'on échange une ligne avec une autre, on multiplie D par -1 et chaque fois que l'on multiplie une ligne par un scalaire non nul α on multiplie D par $\frac{1}{\alpha}$. Le scalaire obtenu est le déterminant de A .

Exemple 1.3.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de Gauss pour calculer le déterminant de A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{on échange } \ell_1 \text{ et } \ell_2 \text{ et on multiplie } \ell_1 \text{ par } \frac{1}{5}$$

1.3. DÉTERMINANT ET INVERSE D'UNE MATRICE

15

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -19/5 & 13/5 \end{pmatrix} \quad \text{on remplace } \ell_3 \text{ par } \ell_3 - 2\ell_1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{on remplace } \ell_3 \text{ par } \ell_3 + \frac{19}{5}\ell_2$$

Comme on a multiplié une ligne par $1/5$ on multiplie le déterminant de T par 5, ce qui donne 70 et comme on a échangé la ligne 1 avec la ligne 2, on doit multiplier notre résultat par -1 . Le déterminant de A est -70 .

1.3.2 Inverse d'une matrice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

une matrice inversible d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour $1 \leq i \leq n$, soit

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité d'ordre n .

La relation $AA^{-1} = I_n$ ramène le calcul de A^{-1} à la résolution de n systèmes linéaires donnés par

$$S_i : \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ dans la } i^{\text{ème}} \text{ position})$$

Le vecteur solution du système S_i représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} .

En pratique on augmente la matrice de A par la matrice identité et on applique la méthode de

Gauss. Après les calculs, la matrice A est transformée en une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux non nuls et la matrice identité est transformée en une matrice L .

La $i^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} est obtenue en résolvant le système linéaire $TX = L_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et L_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de L .

L'exemple suivant illustre cette méthode.

Exemple 1.3.2 Appliquons la méthode de Gauss pour calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On augmente la matrice A par I_3 , on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On applique maintenant la méthode décrite dans le paragraphe ci-dessus :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{on remplace } \ell_2 \text{ par } \ell_2 - 2\ell_1 \text{ et } \ell_3 \text{ par } \ell_3 - 2\ell_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right) \quad \text{on remplace } \ell_3 \text{ par } \ell_3 - 3\ell_2$$

La première colonne de A^{-1} est obtenue en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La deuxième colonne de A^{-1} est obtenue en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La troisième colonne de A^{-1} est obtenue en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4. ALGORITHME DÉCRIVANT LA MÉTHODE DE GAUSS

17

L'inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

1.4 Algorithme décrivant la méthode de Gauss

Soit à résoudre un système de la forme (1.1). On utilise la matrice augmentée correspondante (1.2), ce qui donne une matrice à m lignes et $(n + 1)$ colonnes. On note les lignes de cette matrice par $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ et après chaque transformation de Gauss elles seront encore notées $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$. L'algorithme suivant décrit les étapes à suivre pour résoudre un tel système linéaire en utilisant la méthode de Gauss. Cet algorithme se déroule en au plus $\inf(m, n)$ étapes.

Etape 1

Si $a_{1,1} = 0$ échanger la ligne ℓ_1 avec une ligne ℓ_j telle que $a_{j,1} \neq 0$.

Multiplier ℓ_1 par $\frac{1}{a_{1,1}}$.

Pour $j = 2, \dots, m$ remplacer ℓ_j par $\ell_j - a_{j,1}\ell_1$.

Etape 2

Si $a_{j,2} = 0$ pour $j = 2, \dots, m$

Si $\forall s \in \{3, \dots, n\} \forall j \geq 2 \quad a_{j,s} = 0$ Fin.

Sinon soit s le plus petit entier tel qu'il existe $j > 2$ vérifiant $a_{j,s} \neq 0$.

échanger ℓ_2 avec ℓ_j .

multiplier ℓ_2 par $\frac{1}{a_{2,s}}$.

Pour $j = 3, \dots, m$ remplacer ℓ_j par $\ell_j - a_{j,s}\ell_2$.

Sinon si $a_{2,2} = 0$ échanger la ligne ℓ_2 avec une ligne $\ell_j, j > 2$, telle que $a_{j,2} \neq 0$.

Multiplier ℓ_2 par $\frac{1}{a_{2,2}}$.

Pour $j = 3, \dots, m$ remplacer ℓ_j par $\ell_j - a_{j,2}\ell_2$.

Etape i ($3 \leq i \leq \inf(m, n)$)

Si $a_{j,i} = 0$ pour $j = i, \dots, m$

Si $\forall s \in \{i+1, \dots, n\} \forall j \geq i \quad a_{j,s} = 0$ Fin.

Sinon soit s le plus petit entier tel qu'il existe $j > i$ vérifiant $a_{j,s} \neq 0$.

échanger ℓ_i avec ℓ_j .

multiplier ℓ_i par $\frac{1}{a_{i,s}}$.

Pour $j = (i+1), \dots, m$ remplacer ℓ_j par $\ell_j - a_{j,s}\ell_i$.

Sinon si $a_{i,i} = 0$ échanger la ligne ℓ_i avec une ligne $\ell_j, j > i$, telle que $a_{j,i} \neq 0$.

Multiplier ℓ_i par $\frac{1}{a_{i,i}}$.

Pour $j = (i+1), \dots, m$ remplacer ℓ_j par $\ell_j - a_{j,i}\ell_i$.

On continue ce processus jusqu'à une étape k , où $k < \inf(m, n)$, telle que après les transformations de Gauss on ait : $a_{j,s} = 0$ pour $j = (k+1), \dots, m$ et $s = (k+1), \dots, n$.

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le déterminant de A par deux méthodes différentes.
- 2) Calculer la comatrice de A .
- 3) Déterminer l'inverse de A .

Exercice 2

Utiliser la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires suivants :

Dans $\mathbb{R}$:

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 3x - y + 2z + w = 2 \\ 2x + 2y + 4z - 5w = 5 \\ 2x + 3y + z - w = 4 \end{cases}$$

Dans $\mathbb{C}$:

$$(S_4) \begin{cases} ix + y + z = 1+i \\ x - iy + z = 1 \\ -ix + y + z = i \end{cases} \quad (S_5) \begin{cases} ix - y + z + iw = 1 \\ (1+i)x - iy + z + w = 1+i \\ ix + y + z + iw = 2 \end{cases}$$

Exercice 3

soit l'équation linéaire suivante

$$(E) \quad 3x + 4y + 5z = 2$$

Décrire l'ensemble des solutions de (E)

- 1) en utilisant l'ordre x, y, z .
- 2) en utilisant l'ordre z, y, x .

Exercice 4

Soit le système

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z + 2w = 0 \\ 3x - 2y + 3z - w = 1 \\ x + w = 2 \end{cases}$$

On choisit l'ordre x, y, z, w .

1.4. ALGORITHME DÉCRIVANT LA MÉTHODE DE GAUSS

19

- 1) Déterminer une forme échelon de S .
- 2) Quelles sont les variables indépendantes du système?
- 3) Décrire l'ensemble des solutions de S en prenant w comme paramètre.
- 4) Décrire l'ensemble des solutions de S en prenant x comme paramètre.

Exercice 5 Soit le système

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z + 2w - t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2w + 4t = 1 \\ x + z + w + t = 2 \\ 2x + 2y + 2z + w + 3t = -1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 19 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ est une solution particulière de S .
- 2) Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène associé à S .
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de S .

Exercice 6

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le déterminant de A par la méthode Gauss.
- 2) Calculer l'inverse de A par la méthode de Gauss.