Chap 4 : Formes bilinéaires et quadratiques.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- Formes linéaires :

soit E un espace-v sur $\mathbb{K}$.

Définition :

une forme linéaire sur E est une application linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple :

1- $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ $(a, b \in \mathbb{R})$ est un e-v sur $\mathbb{R}$.

l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$
$f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

φ est linéaire de $E \to \mathbb{K}$

Donc φ est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

2- soit E un ev sur $\mathbb{K}$, $\dim E = n$, $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ une base de E, alors la $j^{ème}$ projection.

$$P_j \quad E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow x_j$$

soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$$

$$P_j(x+y) = x_j + y_j = P_j(x) + P_j(y)$$

P_j est une forme linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

3- E e-v sur $\mathbb{K}$ $\dim E = n$ $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E et $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors.

$$\ell : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Théorème :

si E est un e-v sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ est une base de E, alors l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E noté E', est un e-v de dimension n de base $(P_1 \dots P_n)$ appellé base duale de $(e_1 \dots e_n)$.

$$P_j : E_n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow x_j$$

Preuve :

$\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

soit $\ell \in E'_n$ on a $\ell(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \ell(e_i)$

si on pose $\alpha_i = \ell(e_i)$, on a $\ell(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

on pose $L = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

$= (\ell(e_1) \;\ldots\; \ell(e_n))$

$$\forall x \in E \;,\; \ell(x) = L \cdot x = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

on a alors $\forall x \in E \;,\; \ell(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(x)$

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;;\; \alpha_i \in \mathbb{K} \;,\; \forall 1 \leq i \leq n$$

donc la famille $\{P_1 \ldots P_n\}$ génératrice de E'

Mq $\{P_1 \ldots P_n\}$ libre.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = 0 \Rightarrow \forall x \in E \;,\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \;\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \ell(e_i) x_i}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \qquad \cancel{= \ell\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)}$$

Donc $\{P_1 \ldots P_n\}$ est ~~générat~~ une base de E' d'où $\dim E' = n$

si $\{\ell_1, \ldots, \ell_p\}$ sont des formes linéaires sur E.

avec $B = \{e_1 \ldots e_n\}$ base de E.

$$\forall x \in E \;,\; \ell_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \;,\; 1 \leq i \leq p$$

$$\ell_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} P_j$$

$\{\ell_1, \ldots \ell_p\}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$ rg de A est P.

Exemple 3

$\ell_{j \; 1 \leq j \leq 3} \subset (\mathbb{K}^5)'$

$$\ell_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$\ell_2(x) = 3x_1 - 2x_3 + 2x_4 + x_5$$
$$\ell_3(x) = 3x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$A\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = 3$$

Définition :

on appelle hyperplan de E, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Théorème :

sur un espace vectoriel E de dimension n, un hyper plan est un sev de E de dimension $n-1$.

Preuve :

E e.v $\dim E = n$, $\{e_1 \ldots e_n\}$ base de E un hyperplan est l'ensemble des vecteurs $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ tq $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

où $\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ sont des scalaires non tous nuls.

Deplus ℓ est non nulle, d'après le Théorème du rang, on a :

$$\dim Im(\ell) + \dim(\ker \ell) = n$$

or $\quad Im(\ell) \subset \mathbb{K} \qquad (\ell : E \to \mathbb{K})$

$$\{0_E\} \not\subset Im\,\ell \subset \mathbb{K} \Rightarrow Im(\ell) = \mathbb{K}$$
$$dim(Im(\ell)) = 1$$

Donc $\quad dim(Ker(\ell)) = n-1$

$$dim(H) = n-1$$

Réciproquement, si H est un sev de E, de dimension $n-1$, H admet une base $\{f_1 \dots f_{n-1}\}$ qu'on complète pour avoir une base $\{f_1 \dots f_{n-1}, f_n\}$ base de E.

$$P_n : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \longrightarrow x_n \end{cases}$$

$Ker(P_n) = vect\{(f_1 \dots f_{n-1})\} = H$ D'où H hyperplan.

Théorème :

si H est un hyperplan d'un (ev) E il existe une droite D. tq : $E = H \oplus D$.

Preuve :

on a : $H = Ker(\ell)$, où ℓ forme linéaire non nulle sur E, $\exists a \in E$ tq $\ell(a) \neq 0$.

Posons $D = vect(a)$. Montrons que $E = H \oplus D$

si $x \in H \cap D \Rightarrow x = \alpha a$ et $\ell(x) = 0$

$$\ell(x) = 0 = \ell(\alpha a) = \alpha \ell(a)$$

or $\ell(a) \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Donc $H \cap D = \{0_E\}$

$\forall x \in E.$

$$y = x - \frac{\ell(x)}{\ell(a)} a$$

on a : $\ell(y) = \ell(x) - \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)} \ell(a) = 0$

$\Rightarrow y \in Ker\,\ell = H$

$$x = \underbrace{y}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(a)} a}_{\in vect(a) = D} \Rightarrow E = H \oplus D.$$

on peut conclure qu'un hyperplan est un supplémentaire d'une droite

II- Formes bilinéaires :

Définition : une forme bilinéaire sur E (E ev sur $\mathbb{K}$) est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$
$(x,y) \longrightarrow \varphi(x,y)$

tq pour tout x dans E l'application $y \longrightarrow \varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $y \in E$ l'application $x \longrightarrow \varphi(x,y)$ est linéaire

Définition :

on dit qu'une forme linéaire φ sur E est symétrique si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, $\forall x,y \in E$.

Définition :

on dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est anti symétrique $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \quad \forall x,y \in E$.

Exemples :

si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E, alors
$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow \ell_1(x)\,\ell_2(x)$ est une forme bilinéaire sur E.

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \ell_1(x)\,\ell_2(y)$$

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \ell_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\,\ell_2(y)$$
$$= [\alpha_1 \ell(x_1) + \alpha_2 \ell_2(x_2)]\,\ell_2(y)$$
$$= \alpha_1 \ell_1(x_1)\ell_2(y) + \alpha_2 \ell_2(x_2)\ell_2(y)$$

De même $\varphi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \varphi(x, y_1) + \alpha_2 \varphi(x, y_2)$

2/

$E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire
$(f,g) \longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

En effet

$$\varphi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\,g(x)\,dx$$
$$= \left[\alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dx\right] \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,g(x)\,dx$$
$$= \alpha_1 \varphi(f_1, g) + \alpha_2 \varphi(f_2, g)$$

Expression matricielle des forme bilinéaires en dimension finie

on ~~pose~~ se place d'abord sur $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$

Soient $(x,y) \in E'$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$

on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2, y)$$
$$= x_1 \varphi(e_1, y) + x_2 \varphi(e_2, y)$$
$$= x_1 \varphi(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + x_2 \varphi(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$$
$$= x_1 y_1 \varphi(e_1, e_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) + x_2 y_2 \varphi(e_2, e_2)$$
$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Donc $\varphi(x,y) = X^t A Y$

avec $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) \end{pmatrix}$

Définition:

La matrice d'une forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ de E est la matrice carrée d'ordre n: $A\,(\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$

Théorème:

Soit φ une forme bilinéaire sur E est A la matrice de φ dans la Base B; $\forall$ tous vecteurs $x,y \in E$, on a

$$\varphi(x,y) = X^t A Y \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Preuve:

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i, y)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

or. $AY = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_1, e_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_n, e_j) \end{pmatrix}$

$$X^t A Y = X^t AY = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_i, e_j)$$
$$= \varphi(x, y)$$

Théorème 1

une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur E si, et seulement si, il existe une matrice $A = a_{ij}$ $1 \leq i,j \leq n$ linéairement indépendantes telles que $\forall (x,y) \in E \times E$

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \, l_i(x) \, l_j(y)$$

Preuve

si φ est bilinéaire, on a dans une base $B = \{e_1 \dots e_n\}$ de E
$\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j$

$$= \sum a_{ij} \, P_i(x) \, P_j(y)$$

avec P_i base duale de B $\{P_i \cdot (e_j) = \delta_{ij}\}$

$$P_j : \begin{cases} E_n \to \mathbb{K} \\ x = \sum x_i e_i \to x_j \end{cases}$$

Théorème

une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si sa matrice A dans une base quelconque B de E est symétrique. $A = (\varphi(e_i, e_j))$

Preuve :

si φ est symétrique alors $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ $\forall 1 \leq i,j \leq n$
donc A est symétrique

$\Leftarrow$ A symétrique, donc ${}^tA = A$
soient $(x,y) \in E$, $x = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

a $\varphi(x,y) = X^t A Y$ donc $\varphi(y,x) = Y^t A X$

mais $Y^t A X \in \mathbb{K}$

$$Y^t A X = (Y^t A X)^t \text{ car } Y^t A X \text{ est un scalaire}$$

$$\varphi(y,x) = Y^t A X = (Y^t A X)^t = X^t A^t Y = X^t A Y = \varphi(x,y)$$

D'où φ est symétrique.

Remarque : on a aussi

φ est alternée ou (anti-symétrique) si $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$ $\forall x,y \in E$
φ alternée si et seulement si la matrice A associée à φ est antisymétrique $(A^t = -A)$

Théorème :

Soient B_1 et B_2 deux bases de E et P la matrice de passage de B_1 à B_2 si A_1 et A_2 sont les matrices d'une forme bilinéaire φ sur E dans les bases B_1 et B_2 respectivement, on a alors.

$$A_2 = P^t A_1 P$$

Preuve :

Pour $x \in E$, on note respectivement X_1 et X_2. les vecteurs colonnes formés des composantes de x dans les bases B_1 et B_2 respectivement.

$\forall x,y \in E$ on a : $\varphi(x,y) = X_1^t A_1 Y_1 = (PX_2)^t A_1 P Y_2$

$$= X_2^t (P^t A_1 P) Y_2$$

$$= X_2^t A_2 Y_2$$

Donc $A_2 = P^t A_1 P$

Définition :

le discriminent dans une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E, d'une forme bilinéaire φ est le déterminant de la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))$ de φ dans cette base on note $\Delta_B(\varphi)$

III - Formes quadratiques :

définition

on appelle forme quadratique sur E, une application q définie de E dans $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = \varphi(x,x)$$

Définition :

Soit E un (e-v) $\dim E = n < +\infty$ et B une base de E. si q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ, on dit alors que la matrice de φ la base B est la matrice de q dans cette base.

Remarque :

Il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associés à une forme quadratique. Par exemple.

$$\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Définissent la même forme quadratique.

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Théorème :

si q est une forme quadratique sur E il existe alors une unique forme bilinéaire symétrique φ tq $q(x) = \varphi(x,x) \quad \forall x \in E$

Preuves :

la forme quadratique q définie par $q(x) = \varphi_0(x,x)$ $\forall x \in E$ où φ_0 est une forme bilinéaire sur E. l'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x,y) + \varphi_0(y,x)\right)$$

φ est bilinéaire symétrique avec $\varphi(x,x) = q(x)$ ce qui prouve l'existance de φ.

Comme φ est bilinéaire symétrique, on a $\forall x,y \in E$

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$$

$$= q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$$

Donc $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$

Définition :

on dit que φ la forme polaire de la forme quadratique q.

Remarque :

on a aussi $\forall x,y \in E$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

$$(*) \quad q(x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x,y)$$

$$(**) \quad q(x-y) = \varphi(x,x) - 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) = q(x) + q(y) - 2\varphi(x,y)$$

$$(*) - (**) \iff 4\varphi(x,y) = q(x+y) - q(x-y)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

II-1 Théorème de réduction de Gauss :

Théorème 2

Pour tout forme quadratique non nulle sur E, il existe une entier p ($1 \leq p \leq n$) et des scalaires non nules $\lambda_1 \dots \lambda_p$ et des formes linéaires $\ell_1 \dots \ell_p$ indépendants dans le dual de E. tels que :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2(x)$$

Cas particulier : Espace de dimension 2 :

soit E un (ev) sur $\mathbb{K}$, $\dim(E) = 2$, $B = (e_1, e_2)$ base de E.

$$\forall v \in E, \quad v = xe_1 + ye_2$$

Dans cette base, une forme quadratique s'écrit sous la forme

$$q(v) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$\text{car } q(v) = \varphi(v,v) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

la matrice de cette forme quadratique dans la base B est donc $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ on suppose que $q \neq 0$ (soit) $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

si $a \neq 0$ on a : $q(v) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$$q(v) = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right)$$

$$= a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{b}{a}y\right)^2 - \left(\frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{c}{a}y^2\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 + cy^2$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{ca - b^2}{a}\right)y^2$$

- si $ca - b^2 = 0$

$$q(v) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = a\,\ell_1(v)^2$$

où $\ell_1 : v \longrightarrow x + \frac{b}{a}y$ est une forme linéaire non null

- si $ac - b^2 \neq 0$

$$q(v) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{ca - b^2}{a}\right)y^2$$

$\ell_1 : v \longrightarrow x + \frac{b}{a}y \qquad \ell_2 : v \longrightarrow y$

sont deux formes linéaires indépendants.

(ℓ_1, ℓ_2) libre car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

si $a = 0$ et $c \neq 0$, on a:

$$q(v) = 2bxy + cy^2 = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 - \frac{b^2}{c}x^2$$

- si $b = 0$ alors $q(v) = cy^2 = c\,\ell_1^2(v)$

où $\ell_1 : v \longrightarrow y$

- si $b \neq 0$

alors $q(v) = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 - \frac{b^2}{c}x^2 = c\ell_1^2(v) - \frac{b^2}{c}\ell_2^2(v)$

ou $\ell_1 : v \longrightarrow y + \frac{b}{c}x$ $\quad \ell_2 : v \longrightarrow x$

(ℓ_1, ℓ_2) libre car $\begin{vmatrix} \frac{b}{c} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

- si $q(v) = 2bxy$

$$= \frac{b}{2}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(\ell_1^2(v) - \ell_2^2(v)\right)$$

où $\ell_1 : v \longrightarrow x + y$ $\quad \ell_2 : v_2 \longrightarrow (x - y)$

(ℓ_1, ℓ_2) libre car: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Preuve: (clu Th) on procède par récurence sur $n \geq 1$

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer
- Pour $n = 2$ il est déjà fait.

Hypotèse de récurence on suppose le résultat vrai pour $n-1$ soit E (e-v) sur $\mathbb{K}$ $\dim(E) = n \geq 3$. soit q une forme quadratique non nulle définie dans une base $\mathcal{B}$ de E par:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$$q(x) = \varphi(x, x) = X^t A X$$

$$q(x) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{31}x_1x_3 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_3 + a_{32}x_2x_3$$

$$+ a_{12}x_3x_1 + a_{23}x_3x_2 + a_{33}x_3^2$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Supposons qu'il existe $1\leqslant i\leqslant n$ tq $a_{ii} \neq 0$ $a_{1} \neq 0$
on regroupe les termes contenant x_1 on écrit alors :

$$q(x) = a_{11} x_1^2 + 2\sum_{j=2} a_{1j} x_1 x_j$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)$$

$$= a_{11}\left[\left(x_1 + \sum_{j=2} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2\right]$$

Donc :

$$q(x) = a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 + \tilde{q}(\tilde{x})$$

$$= a_{11}\, l_1^2(x) + \tilde{q}(\tilde{x})$$

où $l_1(x) = x_1 + \sum_{=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j$, $\tilde{q}$ la forme quadratique définie sur le s-ev ~~Hdetq~~
H de E engendré par $e_2 \dots e_n$ et $\tilde{x} = \sum_{i=2} x_i e_i$ si

si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

si $\tilde{q} = 0$ alors $q(x) = a_{11}\, l_1^2(x)$ avec a_{11} et l_1 non nuls

si $\tilde{q} \neq 0$, l'hypotèse de récurrence implique $\exists p \in \mathbb{N}$.
$2 \leqslant p \leqslant n$, des scalaires non nuls

$\lambda_2, \dots \lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes
$l_2, \dots, l_p$ définies sur H tq.

$$\forall \tilde{x} \in H \quad \tilde{q}(\tilde{x}) = \sum_{j=2}^{p} \lambda_j l_j^2(x)$$

et en prolongeant les formes linéaires $l_2, \dots, l_p$ à l'ev
E en posant $l_j(x) = l_j(\tilde{x})$

$$q(x) = a_{11} l_1^2(x) + \sum_{j=2}^{p} \lambda_j l_j^2(x)$$

Il reste à vérifier que les formes $l_1, l_2 \dots l_p$ sont linéairement indépendantes dans :

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \text{ appelé le dual de } E.$$

Si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i l_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i l_i(x) = 0$

si $x = e_1$ alors $\lambda_1 = 0$.

donc $\sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i = 0$

Or d'après l'hypothèse de récurrence on a :
$(l_2, \dots, l_p)$ libre, donc $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$

C/C : la famille $\{l_1 \dots l_p\}$ est libre.

2ème Cas si q est sans termes carrés

$$q(x) = 2\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Supposons que $a_{12} \neq 0$ on regroupe dans l'expression de q les termes contenant x_1 et x_2.

$$A = a_{12}\, x_1 x_2 + x_1 \sum_{j=3}^{n} a_{1j} x_j + x_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\, x_j$$

$$= \left(a_{12} x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\, x_j \right)\left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right) - \left(\sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j\right)\left(\sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j\right)$$

Ce qui donne :

$$q(x) = 2\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\, x_i x_j$$

$$= 2A + 2\sum_{3\leq i,j\leq n} a_{ij}\, x_i x_j$$

$$= 2L_1(x)\, L_2(x) + \tilde{q}(\tilde{x})$$

où $L_1(x) = a_{12} x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\, x_j$ et $l_2(x) = x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j$

et $\tilde{q}$ est une forme quadratique définie sur le sev H de E engendré par $e_3 \dots e_n$ et $\tilde{x} = \sum_{i=3}^{n} x_i e_i$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

En écrivant que $2L_1(x)\, L_2(x) = \frac{1}{2}\left(L_1(x) + L_2(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(L_1(x) - l_2(x)\right)^2$

$$= \frac{1}{2} l_1^2(x) + \frac{1}{2} l_2(x)^2$$

on a : $q(x) = \frac{1}{2} l_1^2(x) - \frac{1}{2} l_2^2(x) + \tilde{q}(\tilde{x})$

si $\tilde{q}(\tilde{x}) = 0$ alors $q(x) = \frac{1}{2} l_1^2(x) - \frac{1}{2} l_2^2(x)$

* l_1, l_2 ? $\lambda_1 l_1(x) + \lambda_2 l_2(x) = 0, \ \forall x \in E$

$x = e_1 \Rightarrow \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{12} = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
$x = e_2 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

* si $\tilde{q} \neq 0$ alors l'hypothèse de récurrence implique

$\exists\, \lambda_3, \dots \lambda_p$ non nuls et des formes linéaires $l_3 \dots l_p$ linéairement indépendants dans E' tq

$$\forall \tilde{x} \in H \qquad H = \text{vect}\{e_3 \dots e_n\}$$

$$\tilde{q}(\tilde{x}) = \sum_{j=3}^{p} \lambda_j\, l_j^2(\tilde{x})$$

En prolongeant les formes linéaire $l_3 \dots l_p$ à E on a

$$q(x) = \frac{1}{2} l_1^2(x) - \frac{1}{2} l_2^2(x) + \sum_{j=3}^{p} \lambda_j\, l_j^2(x)$$

Il reste à vérifier que $l_1 \dots l_p$ sont linéairement indépendants.

si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ alors $\forall x \in E$ $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i l_i(x) = 0$

$x = e_1$ et $x = e_2 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=3}^{p} \lambda_i l_i = 0$

D'aprés l'H.R on a $\lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0$

D'où $\{l_1 \dots l_p\}$ libre.

Théorème :

avec les notations précédent la forme polaire φ de q est alors définie par $\forall (x,y) \in E \times E$

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j l_j(x) l_j(y)$$

Preuve :

φ bilinéaire symetrique et $\varphi(x,x) = q(x)$

les formes linéaires $l_1 \dots l_p$ sont linéairement indépendants. D'aprés le Théorème de la base incomplète, il existe $l_{p+1}, \dots, l_n$ des formes linéaires sur E tq $\{l_1 \dots l_p, l_{p+1} \dots l_n\}$ base de E' (le dual de E)

Théorème :

Etant donnée une base $(l_i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'ev E' (des formes linéaires sur E) il existe une base f_i $_{1 \leq i \leq n}$ de E tq $l_i(f_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

fstg

TRAVAUX DIRIGES

EXO

TD'S

fstg

CONTROLES

TD

EXERCICES

SHARE

ELECTRICITE

INFORMATIQUE

DOCUMENT

CC'S

TD'S

CC'S

COURS

www.facebook.com/FSTG.SHARE