Arbres Binaires de Recherche (Binary Search Trees)

Pr F.Omary

2019-2020

Notion d'Arbre binaire de recherche

- **C'est un arbre binaire particulier :**
  - ***Permet d'obtenir un algorithme de recherche proche dans l'esprit de la recherche dichotomique ;***
  - ***Pour lequel les opérations d'ajout et de suppression d'un élément sont aussi efficaces.***
- **Cet arbre utilise l'existence d'une relation d'ordre sur les éléments, représentée par une fonction clé, à valeur entière.**

Arbre binaire de recherche Définition

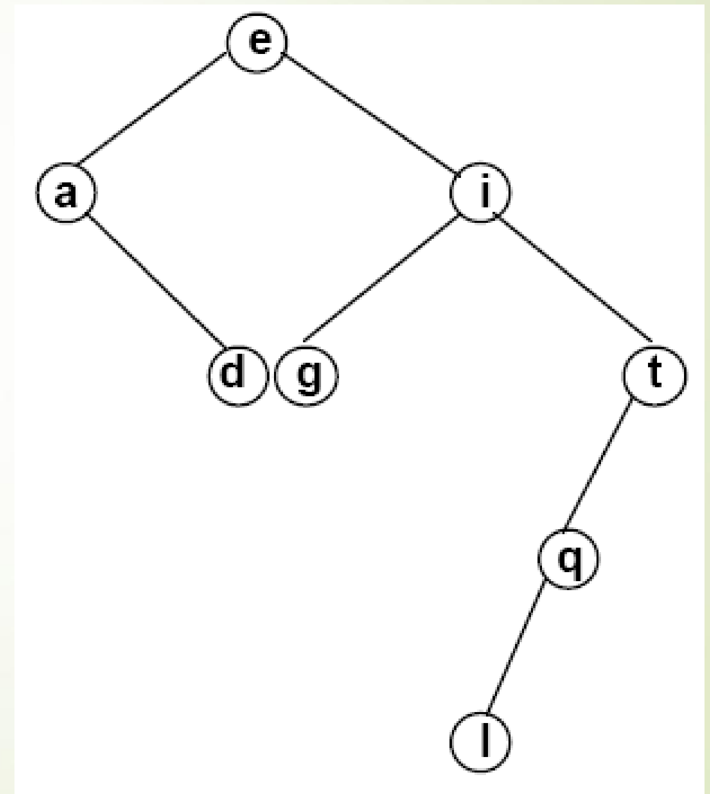
- **Un arbre binaire de recherche (*binary search tree* en anglais), en abrégé *ABR*, est un arbre binaire tel que pour tout nœud :**
  - ***les clés de tous les noeuds du sous-arbre gauche sont inférieures ou égales à la clé du nœud,***
  - ***les clés de tous les noeuds du sous-arbre droit sont supérieures à la clé du nœud.***

- ***Chaque nœud d'un arbre binaire de recherche désigne un élément qui est caractérisé par une clé (prise dans un ensemble totalement ordonné) et des informations associées à cette clé.***

- ***Dans toute illustration d'un arbre binaire de recherche, seules les clés sont représentées. On supposera aussi que toute clé identifie de manière unique un élément.***

Arbre binaire de recherche Exemple

- **L'arbre de la figure suivante est un arbre binaire de recherche**



- **Cet arbre représente l'ensemble :**

E = {a, d, e, g, i, l, q, t}

muni de l'ordre alphabétique

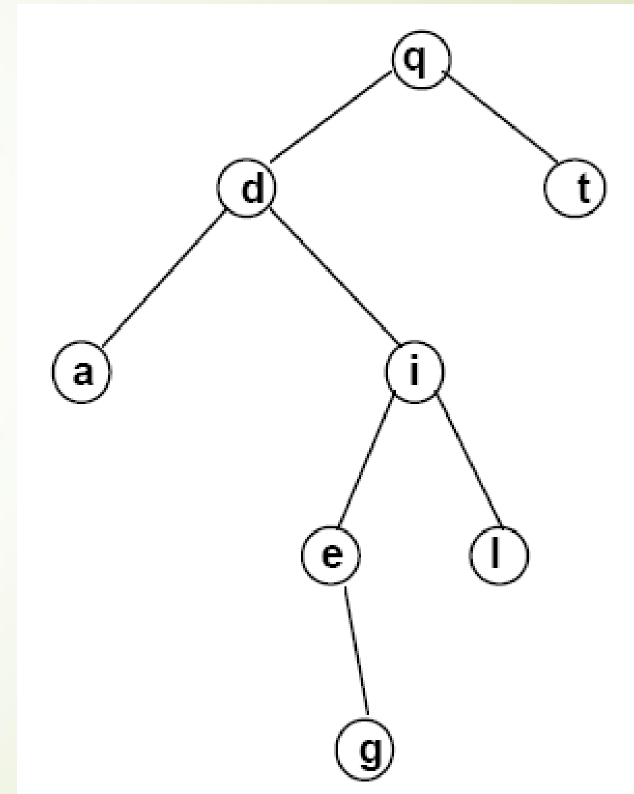
Arbre binaire de recherche Remarque

- **Plusieurs représentations possibles d'un même ensemble par un arbre binaire de recherche**

- **En effet, la structure précise de l'arbre binaire de recherche est déterminée :**
  - **par l'algorithme d'insertion utilisé,**
  - **et par l'ordre d'arrivée des éléments.**

- **Exemple :**
  - **L'arbre binaire de recherche de la figure qui suit représente aussi**

    E = {*a, d, e, g, i, l, q, t*}



Opérations sur les arbres binaires de recherche

- **Le type abstrait arbre binaire de recherche, noté `Arbre_Rech`, est décrit de la même manière que le type `Arbre_Binaire`**

- **On reprend les opérations de base des arbres binaires, excepté le fait que dans des arbres binaires de recherche, on suppose l'existence de l'opération clé sur le type abstrait `Element`**

- **On définit, en tenant compte du critère d'ordre, les opérations spécifiques de ce type d'arbre concernant :**
  - ***la recherche d'un élément dans l'arbre ;***
  - ***l'insertion d'un élément dans l'arbre ;***
  - ***la suppression d'un élément de l'arbre.***

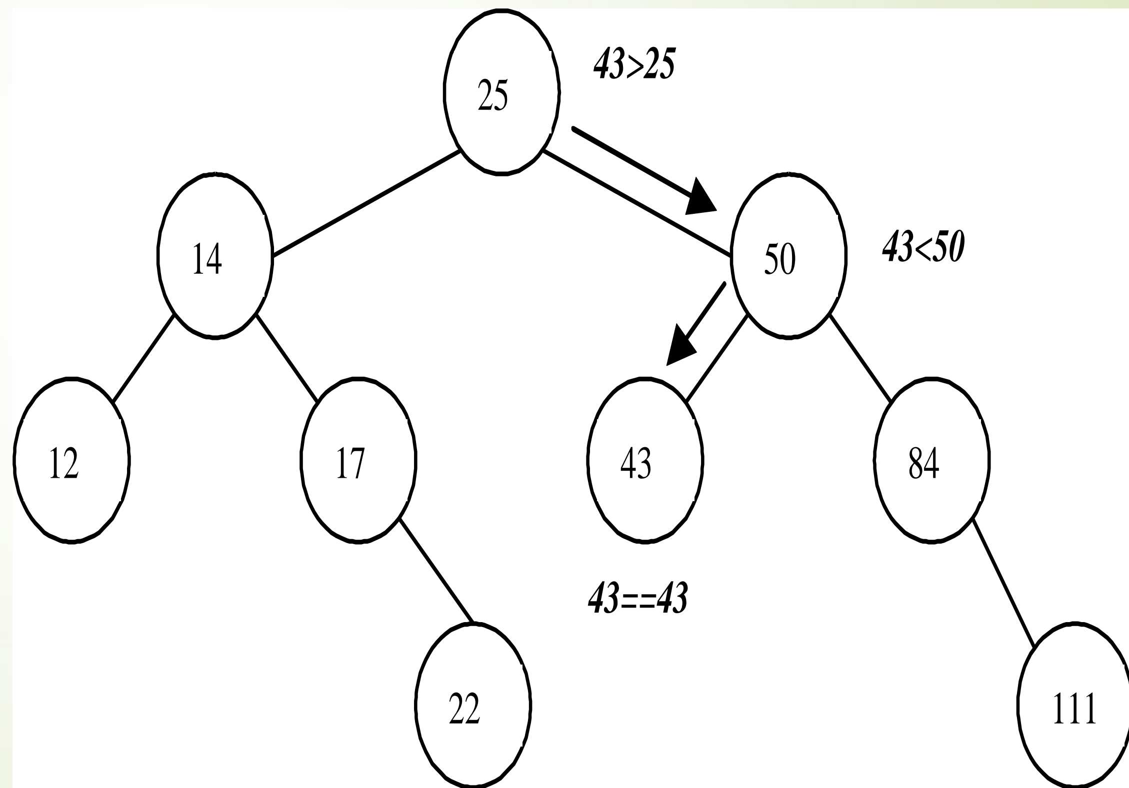
Recherche d'un élément

- **Principe de l'algorithme :**
  - On compare la clé de l'élément cherché à la clé de la racine de l'arbre ;
  - Si la clé est supérieure à la clé de la racine, on effectue une recherche dans le fils droit ;
  - Si la clé est inférieure à la clé de la racine, on effectue une recherche dans le fils gauche ;
  - La recherche s'arrête quand on ne peut plus continuer (*échec*) ou quand la clé de l'élément cherché est égale à la clé de la racine d'un sous arbre (*succès*).

Recherche d'un élément
Exemple

- **la figure suivante illustre la recherche de l'élément de clé 43 dans un arbre binaire de recherche.**

- **Les flèches indiquent le chemin de la recherche**



Recherche d'un élément Spécification

```
Extension Type Arbre_Rech
Utilise Elément, Booléen
Opérations
  Rechercher : Elément x Arbre_Rech → Booléen
Axiomes
  Soit, x : Elément, r : Nœud, G, D : Arbre_Rech

  Rechercher(x, arbre_vide) = faux
  si clé(x) = clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = vrai
  si clé(x) < clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = Rechercher(x,
  G)
  si clé(x) > clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = Rechercher(x,
  D)
```

Recherche d'un élément
Réalisation en C

```
Booleen Rechercher (Arbre_Rech A, Element e) {
 if ( est_vide(A) == vrai )
   return faux; // e n'est pas dans l'arbre
 else {
   if ( e == A->val )
      return vrai; // e est dans l'arbre
   else if ( e < A->val )
              // on poursuit la recherche dans le SAG
   du
              // noeud courant
              return Rechercher(A->fg , e);
         else
              // on poursuit la recherche dans le SAD
   du
              // noeud courant
              return Rechercher(A->fd , e);
   }
}
```

Recherche d'un élément Autre Spécification

```
Extension Type Arbre_Rech
Utilise Elément
Opérations
  Rechercher : Elément x Arbre_Rech → Arbre_Rech
Axiomes
  Soit, x : Elément, r : Nœud, G, D : Arbre_Rech

  Rechercher(x, arbre_vide) = arbre_vide
  si clé(x) = clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = <r, G, D>)
  si clé(x) < clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = Rechercher(x, G)
  si clé(x) > clé(contenu(r))
   alors Rechercher(x, <r, G, D>) = Rechercher(x, D)
```

Ajout d'un élément

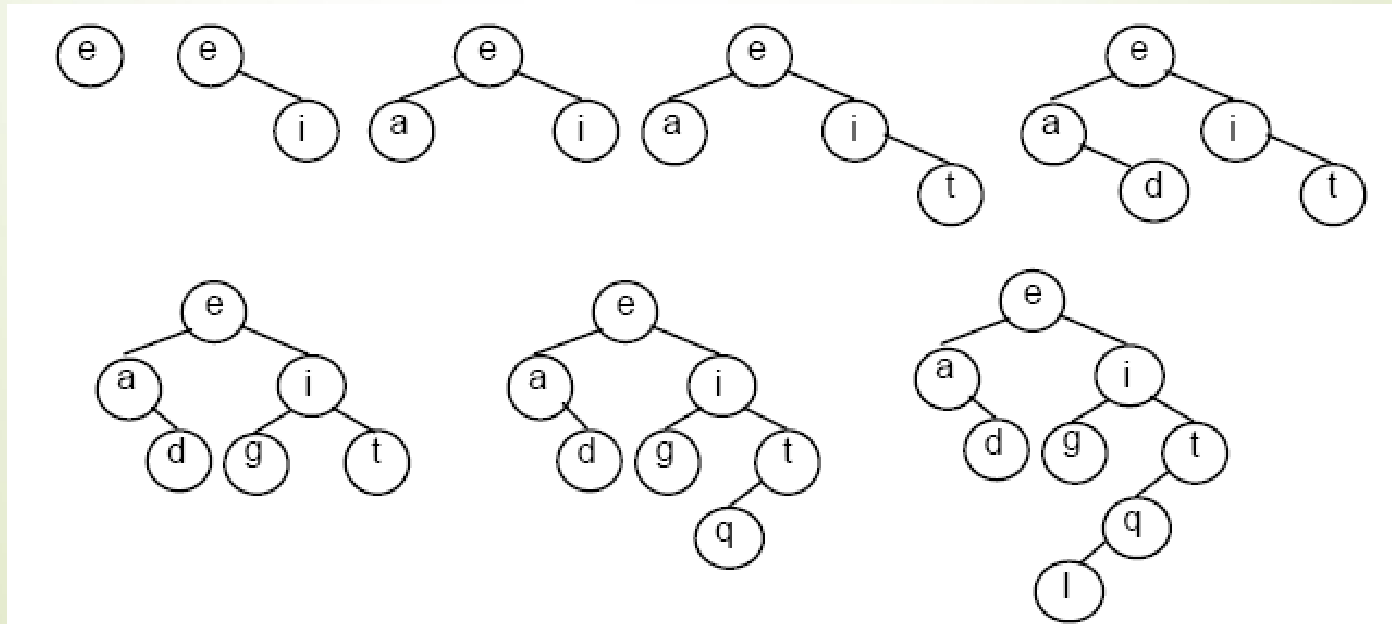
- **La technique d'ajout spécifiée ici est dite "*ajout en feuille*", car tout nouvel élément se voit placé sur une feuille de l'arbre**

- **Le principe est simple :**
  - **si l'arbre initial est vide, le résultat est formé d'un arbre binaire de recherche réduit à sa racine, celle-ci contenant le nouvel élément ;**
  - **sinon, l'ajout se fait (*récursivement*) dans le fils gauche ou le fils droit, suivant que l'élément à ajouter est de clé inférieure ou supérieure à celle de la racine.**

- **Remarque :**
  - **si l'élément à ajouter est déjà dans l'arbre, l'hypothèse d'unicité des éléments pour certaines applications fait qu'on ne réalise pas l'ajout**

Ajout d'un élément
Exemple

- **Les figures suivantes illustrent l'ajout successif de e, i, a, t, d, g, q et l dans un arbre binaire de recherche, initialement vide**



Ajout "en feuille" d'un élément Spécification

```
Extension Type Arbre_Rech
Utilise Elément
Opérations
  Ajouter_feuille : Elément x Arbre_Rech → Arbre_Rech
Axiomes
  Soit, x : Elément, r : Nœud, G, D : Arbre_Rech

  Ajouter_feuille(x, arbre_vide) = <x, arbre_vide,
  arbre_vide>
  si clé(x) ≤ clé(contenu(r))
    alors
     Ajouter_feuille(x, <r, G, D>) = <r,
  Ajouter_feuille(x, G), D>
  sinon
    Ajouter_feuille(x, <r, G, D>) = <r, G,
  Ajouter_feuille(x, D)>
```

Ajout "en feuille" d'un élément Réalisation

```
fonction Ajouter_feuille(x : Elément, A : Arbre_Rech ) :
   Arbre_Rech
 si est_vide(A) alors
   Pnoeud r = nouveau_noeud(x)
   si est_vide(r) alors <erreur>
   retourner cons(r, arbre_vide(), arbre_vide())
 sinon
  si x > contenu(racine(A)) alors
   retourner cons(A, gauche(A), Ajouter_feuille(x, droite(A)))
  sinon
   Si x< contenu(racine(A) alors
   retourner cons(A, Ajouter_feuille(x, gauche(A)) ,droite(A))
  fsi
 fsi
fsi
ffonction
```

Ajout "en feuille" d'un élément Réalisation en C

```
Arbre_Rech Ajouter_feuille(Element x, Arbre_Rech A) {
 if (est_vide(A)) {
   Pnoeud r = nouveau_noeud(x);
   if (r == NULL) {
     printf("Erreur : Pas assez de mémoire !\n");
     exit(-1);
   }
  return cons(r, arbre_vide(), arbre_vide());
 }
 else
   if (x > contenu(racine(A)))
     return cons(A, gauche(A), Ajouter_feuille(x, droite(A)));
   else
   if (x < contenu (racine(A))// pas d'ajout lorsque x=contenu(A)
     return cons(A, Ajouter_feuille(x, gauche(A)), droite(A));
}
```

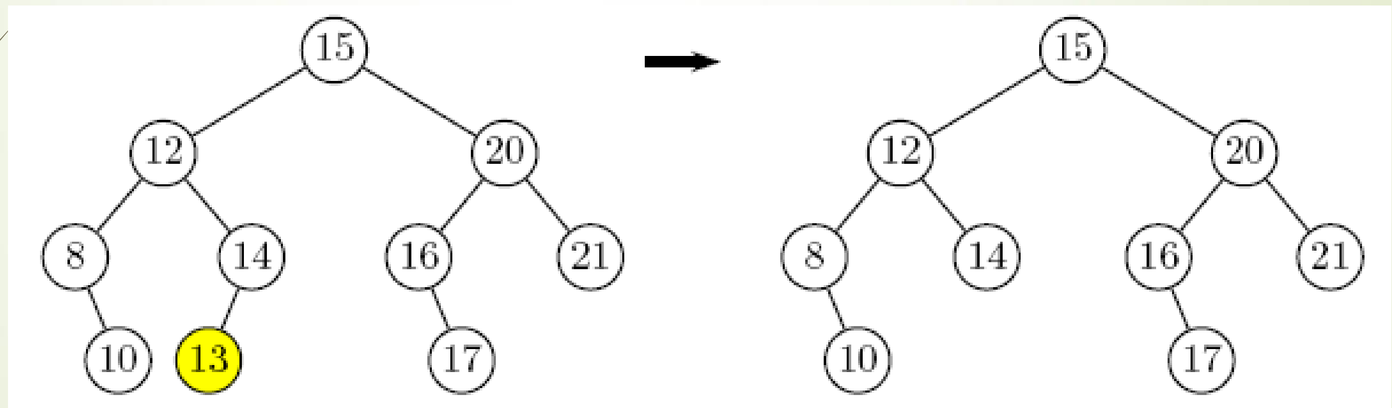
Suppression d'un élément

- **La suppression est délicate :**
  - **Il faut réorganiser l'arbre pour qu'il vérifie la propriété d'un arbre binaire de recherche**

- **La suppression commence par la recherche du nœud qui porte l'élément à supprimer. Ensuite, il y a trois cas à considérer, selon le nombre de fils du noeud à supprimer :**
  - **si le noeud est sans fils (*une feuille*), la suppression est immédiate ;**
  - **si le noeud a un seul fils, on le remplace par ce fils ;**
  - **si le noeud a deux fils (*cas général*), on choisit de remplacer ce nœud, soit par le plus grand élément de son sous arbre gauche (*son prédécesseur*), soit par le plus petit élément de son sous arbre droit (*son successeur*).**

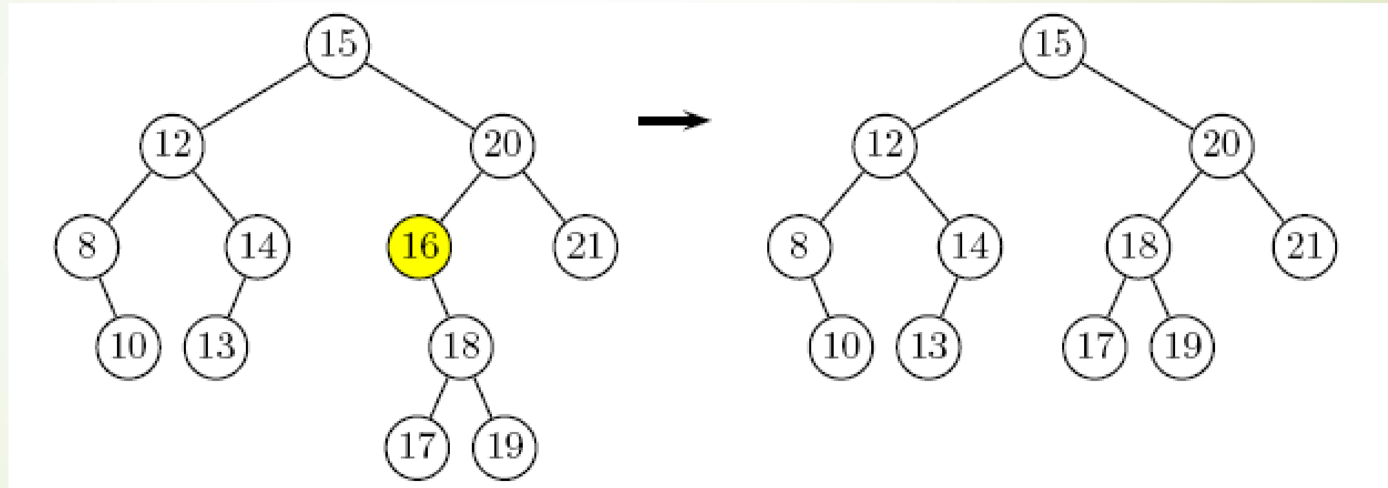
Suppression d'un élément
Exemple 1

- **La figure qui suit illustre la suppression de la feuille qui porte la clé 13**



Suppression d'un élément Exemple 2

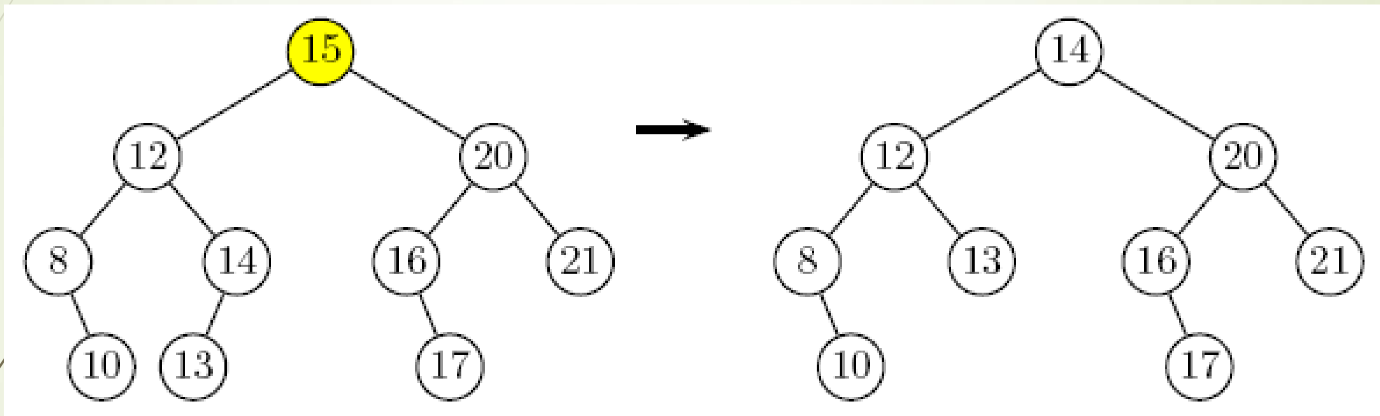
- **La figure qui suit illustre la suppression du nœud qui porte la clé 16**



- **Ce nœud n'a qu'un seul fils ; le sous arbre de racine portant la clé 18**
- **Ce sous arbre devient fils gauche du nœud qui porte la clé 20**

Suppression d'un élément Exemple 3

- **La figure qui suit illustre le cas d'un nœud à deux fils.**



- **La clé 15 à supprimer se trouve à la racine de l'arbre. La racine a deux fils ; on choisit de remplacer sa clé par la clé de son prédécesseur.**

- **Ainsi, la clé 14 est mise à la racine de l'arbre. On est alors ramené à la suppression du nœud du prédécesseur.**

- **Comme le prédécesseur est le nœud le plus à droite du sous arbre gauche, il n'a pas de fils droit, donc il a zéro ou un fils, et sa suppression est couverte par les deux premiers cas.**

Suppression d'un élément
Cas général

- **On choisit ici de remplacer le noeud à supprimer par son prédécesseur (*le nœud le plus à droite de son sous arbre gauche*)**

- **On a besoin de deux opérations supplémentaires :**
  - ***une opération `Max` qui retourne l'élément de clé maximale dans un arbre binaire de recherche ;***
  - ***une opération `SupprimerMax` qui retourne l'arbre privé de son plus grand élément.***

Suppression d'un élément: Spécificatio

```
Extension Type Arbre_Rech
Utilise Elément
Opérations
   Max          : Arbre_Rech → Elément
   SupprimerMax : Arbre_Rech → Arbre_Rech
   Supprimer    : Elément x Arbre_Rech → Arbre_Rech
Pré-conditions
   Max(A) est_défini_ssi est_vide(A) = faux
   SupprimerMax(A) est_défini_ssi est_vide(A) = faux
Axiomes
   Soit, x : Elément, r : Nœud, G, D : Arbre_Rech
   si est_vide(D) = vrai alors Max(<r, G, D>) = r
   sinon Max(<r, G, D>) = Max(D)
   si est_vide(D) = vrai alors SupprimerMax(<r, G, D>) = G
   sinon SupprimerMax(<r, G, D>) = <r, G, SupprimerMax(D)>
   Supprimer(x, arbre_vide) = arbre_vide
   si clé(x) = clé(contenu(r)) et est_vide(D) = vrai
    alors Supprimer(x, <r, G, D>) = G
   sinon si clé(x) = clé(contenu(r)) et est_vide(G) = vrai
          alors Supprimer(x, <r, arbre_vide, D>) = D
         sinon si clé(x) = clé(contenu(r))
                alors Supprimer(x, <r, G, D>) = <Max(G),SupprimerMax(G), D>
   si clé(x) < clé(contenu(r))
    alors Supprimer(x, <r, G, D>) = <r, Supprimer(x, G), D>
   si clé(x) > clé(contenu(r))
    alors Supprimer(x, <r, G, D>) = <r, G, Supprimer(x, D)>
```

Suppression d'un élément Réalisation

```
fonction Max(A : Arbre_Rech) : Pnoeud
(* A doit être non vide ! *)
 si est_vide(droite(A))
  alors retourner A


 sinon retourner Max(droite(A))
 fsi
ffonction

fonction SupprimerMax(A : Arbre_Rech) : Arbre_Rech
(* A doit être non vide ! *)
 si est_vide(droite(A))
 alors
  retourner gauche(A)
 sinon
  retourner cons(A, gauche(A), SupprimerMax(droite(A)))
 fsi
ffonction
```

Cette fonction retourne un pointeur sur le nœud contenant la plus grand élément d'un arbre binaire de recherche

Cette fonction supprime le plus grand élément d'un arbre binaire de recherche

Suppression d'un élément Réalisation (suite)

```
fonction Supprimer(x : Elément, A : Arbre_Rech) : Arbre_Rech
 si est_vide(A) alors retourner A   (* ou <erreur> *)
 sinon
  si x > contenu(racine(A)) alors
   retourner cons(A, gauche(A), Supprimer(x ,droite(A)))
  sinon
   si x < contenu(racine(A)) alors
    retourner cons(A, Supprimer(x, gauche(A)), droite(A))
   sinon // x= contenu (racine(A))
    si est_vide(droite(A)) alors retourner gauche(A)
    sinon
     si est_vide(gauche(A)) alors retourner droite(A)
     sinon // ni droite (A) est vide ni gauche(A)
      retourner cons(Max(gauche(A)), SupprimerMax(gauche(A)), droite(A))
     fsi
    fsi
   fsi
  fsi
 fsi
ffonction
```

Arbre Binaire de Recherche Complexité des Opérations

- **On montre que, les opérations de recherche, insertion et suppression dans un arbre binaire de recherche contenant n éléments sont :**
  - en moyenne en $O(\log_2(n))$;
  - dans le pire des cas en $O(h)$;

  où h désigne la hauteur de l'arbre

- **Si l'arbre est dégénéré, sa hauteur étant n-1, ces trois opérations sont en $O(n)$**

- **Si l'arbre est équilibré, les opérations sont en $O(\log_2(n))$ (*d'où leur intérêt...*)**

Arbres Maximiers ou Tas (Heaps)

Notion d'Arbre Maximier (ou Tas)

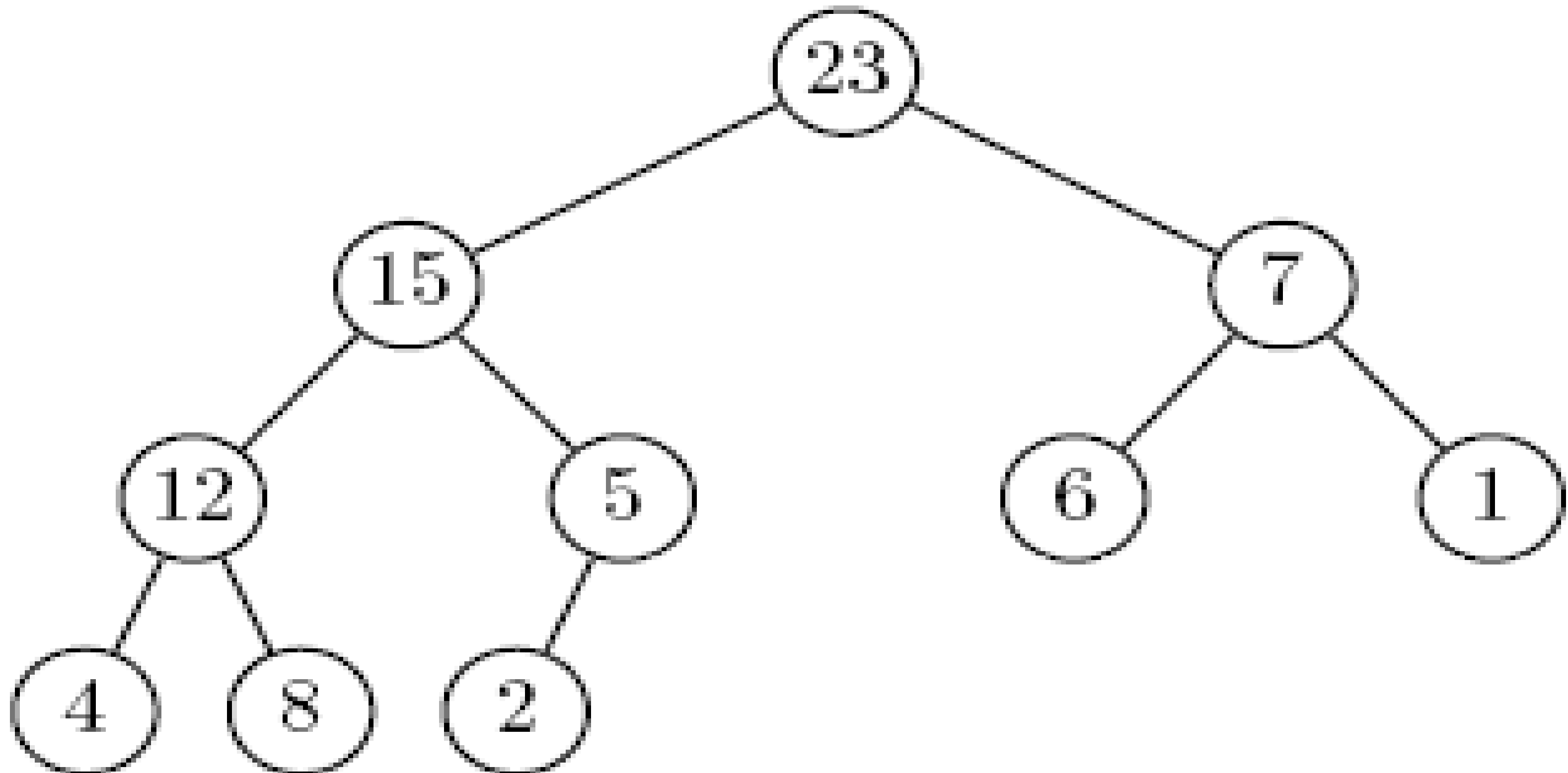
- **Appelé aussi monceau (*Heap en anglais)***
- **C'est un arbre binaire parfait tel que la clé de chaque noeud est supérieure ou égale aux clés de tous ses fils**
- **L'élément maximum de l'arbre se trouve donc à la racine**

- **Rappel :**
  - **Pour un arbre binaire parfait, tous les niveaux sont entièrement remplis sauf éventuellement le dernier et, dans ce cas, les feuilles du dernier niveau sont regroupées le plus à gauche possible**

- **Un tas est *un arbre binaire partiellement ordonné* :**
  - **Les nœuds sur chaque branche sont ordonnés sur celle-ci ;**
  - **Ceux d'un même niveau ne le sont pas nécessairement.**

- **Un tas dans lequel chaque nœud enfant a une clé inférieure (*resp., supérieure*) ou égale à la clé de son père est appelé *arbre maximier (max heap)* (*resp., arbre minimier (max heap)*)**

Arbre Maximier (ou Tas) Exemple



Type Abstrait Tas

```
Type Tas
Utilise Booléen, Elément
Opérations
   tas_vide      : → Tas
   est_vide      : Tas → Booléen
   max           : Tas → Elément
   ajouter : Tas x Elément → Tas
   supprimerMax : Tas → Tas
   appartient    : Tas x Elément → Booléen
Préconditions
   max(T) est_défini_ssi est_vide(T) = faux
   supprimerMax(T) est_défini_ssi est_vide(T) = faux
   ajouter(T,e) est_défini_ssi appartient(T,e) = faux
Axiomes
   Soit, T, T1 : Tas, e : Elément

   si est_vide(T) = vrai alors appartient(T,e) = faux

   appartient(T,max(T)) = vrai

    si appartient(T,e) = vrai alors max(T) ≥ e
```

Opérations sur un Tas

- `tas_vide : → Tas`
  - Opération d'initialisation; crée un tas vide
- `est_vide : Tas → Booléen`
  - Vérifie si un tas est vide ou non
- `max : Tas → Elément`
  - Retourne le plus grand élément d'un tas
- `ajouter : Tas x Elément → Tas`
  - Ajoute un élément dans un tas
- `supprimerMax : Tas → Tas`
  - Supprime le plus grand élément d'un tas
- `appartient : Tas x Elément → Booléen`
  - Vérifie si un élément appartient ou non à un tas

Représentation d'un Tas

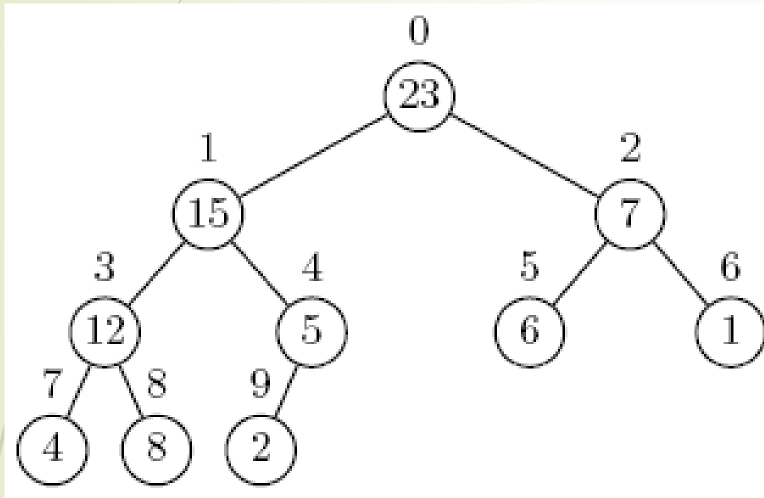
- Il existe une représentation compacte pour les arbres binaires parfaits, et donc pour les tas :
  - La représentation par tableau, basée sur la numérotation des nœuds niveau par niveau et de gauche à droite

- Les numéros d'un nœud sont donc les indices dans un tableau. En outre, ce tableau s'organise de la façon suivante :
  - le noeud racine a pour indice 0 ;
  - soit le noeud d'indice i dans le tableau, son fils gauche a pour indice 2i +1, et son fils droit a pour indice 2(i+1) ;
  - si un nœud a un indice i ≠ 0, alors son père a pour indice

$$\lfloor (i-1)/2 \rfloor$$

- On déduit de cette organisation, où n désigne le nombre d'éléments du tas, que :
  - un nœud d'indice i est une feuille si $2i+1 \geq n$
  - un nœud d'indice i a un fis droit si $2(i+1) < n$

Représentation d'un Tas
Exemple



Un tas avec sa numérotation hiérarchique

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	15	7	12	5	6	1	4	8	2

Représentation du tas par un tableau

Représentation en C d'un Tas

```
#define MAX_ELEMENTS 200  // taille
   maximum du tas
typedef int Element    // un élément est
   un int
typedef struct {
 int taille;  // nombre d'éléments dans le
   tas
 Element tableau[MAX]; // les éléments
   du tas
} Tas;
```

Opérations sur un Tas

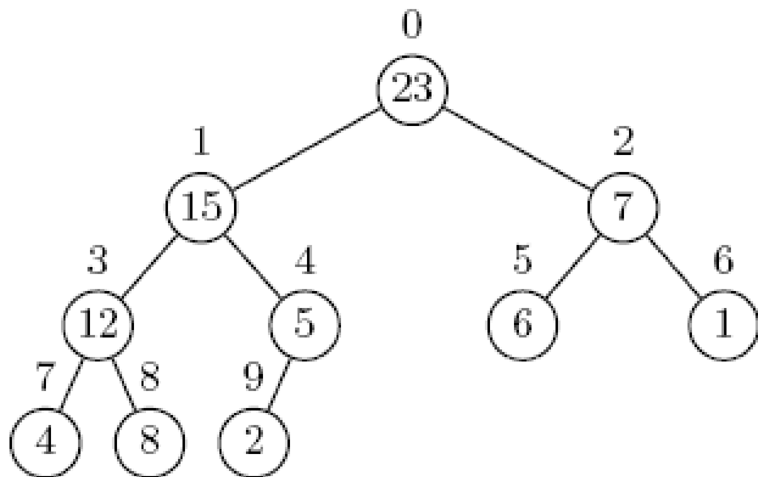
- **Trois opérations fondamentales :**
  - ***Ajout d'un élément ;***
  - ***Suppression du maximum ;***
  - ***Recherche du maximum.***

Opération d'Ajout

- ***Principe :***
  - **Créer un nouveau nœud contenant la clé du nouvel élément ;**
  - **Insérer cette clé le plus à gauche possible sur le dernier niveau du tas (*ou si le dernier niveau est plein, à l'extrême gauche d'un nouveau niveau*). La nouvelle clé est insérée dans la première case non utilisée du tableau ;**
  - **Faire "remonter cette nouvelle clé" à sa place en la permutant avec la clé de son père, tant qu'elle est plus grande que celle de son père.**

Opération d'Ajout Exemple (1)

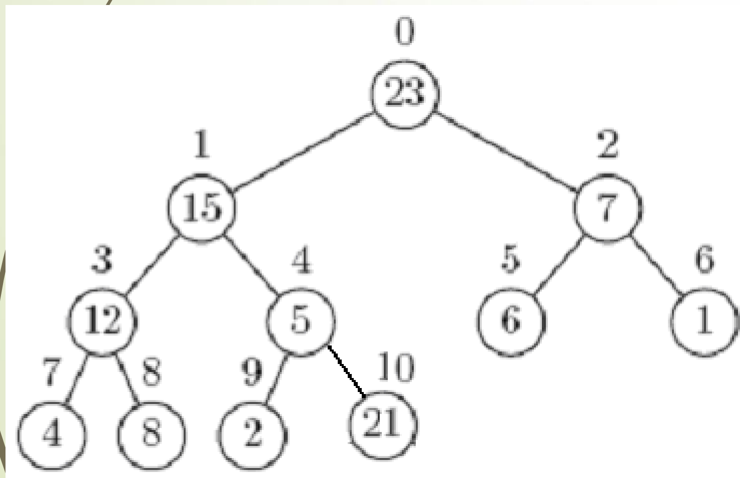
- **Supposons qu'on veuille insérer la valeur 21 dans le tas représenté ci-dessous :**
  - **On place la valeur 21 juste à droite de la dernière feuille,**
  - **c'est-à-dire dans la case d'indice 10 dans le tableau.**



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	15	7	12	5	6	1	4	8	2

Opération d'Ajout
Exemple (2)

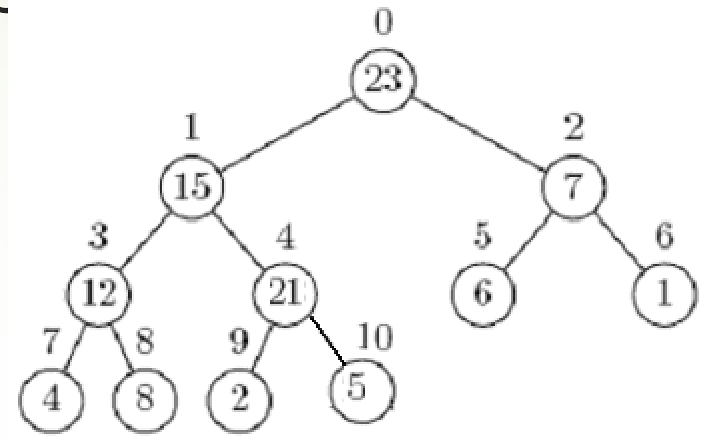
- **On compare 21, la nouvelle donnée insérée, avec la donnée contenue dans le nœud père, autrement dit on compare la donnée de la case d'indice 10 du tableau avec la donnée de la case d'indice = 4.**
  - **Puisque 21 est plus grand que 5, on les échange.**



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	15	7	12	5	6	1	4	8	2	21

Opération d'Ajout Exemple (3)

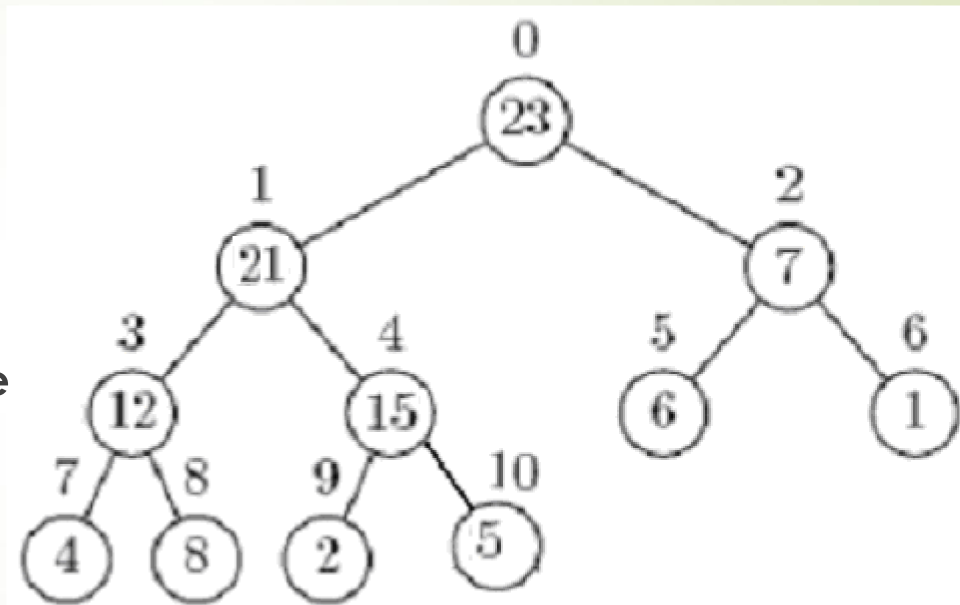
- **Le nouvel arbre binaire obtenu n'est pas un tas :**
  - La valeur 21 du nœud d'indice 4 est plus grande que la valeur 15 de son nœud père (*d'indice* = 1)
  - Echanger les contenus des nœuds d'indices respectifs 1 et 4



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	15	7	12	21	6	1	4	8	2	5

Opération d'Ajout Exemple (4)

- **Puisque 21 est plus petit que 23 :**
  - L'opération d'ajout est terminée ;
  - On a bien obtenu un tas.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	21	7	12	15	6	1	4	8	2	5

Opération d'Ajout Pseudo-code

```
fonction ajouter(Tas t, Elément e) : Tas
début
    i ← t.taille
   t.taille ← i+1
   t.tableau[i] ← e
    tant que ((i > 0) et
          (t.tableau[i] > t.tableau[(i-1) div 2]))
    faire {
        échanger(t.tableau[i], t.tableau[(i-1) div
    2]
        i ← (i-1) div 2
    }
    retourner (t)
fin
```

Opération d'Ajout Complexité

- **La complexité de l'opération d'ajout est en O(h), où h est la hauteur du tas :**
  - **On ne fait que remonter un chemin ascendant d'une feuille vers la racine (en s'arrêtant éventuellement avant).**
  - **La hauteur d'un tas de taille n est précisément égale à** $\lfloor \log_2(n) \rfloor$

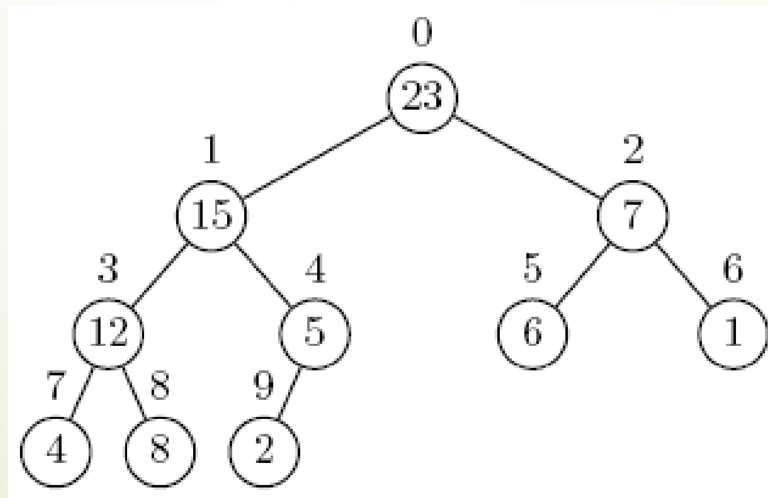
  et donc l'ajout demande un temps O(log(n)).

Opération de Suppression du Maximum

- **Principe :**
  - ***Remplacer la clé du nœud racine par la clé du nœud situé le plus à droite du dernier niveau du tas. Ce dernier nœud est alors supprimé ;***
  - ***Réorganiser l'arbre, pour qu'il respecte la définition du tas, en faisant descendre la clé de l'élément de la racine à sa bonne place en permutant avec le plus grand des fils.***

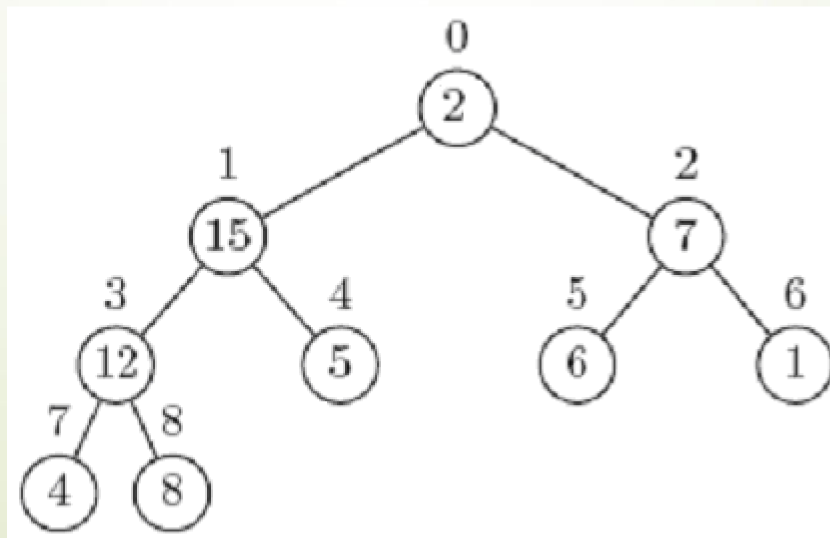
Opération de Suppression du Maximum (Exemple) (1)

- ***Supposons qu'on désire supprimer la valeur 23 contenue dans la racine du tas illustré par la figure suivante :***



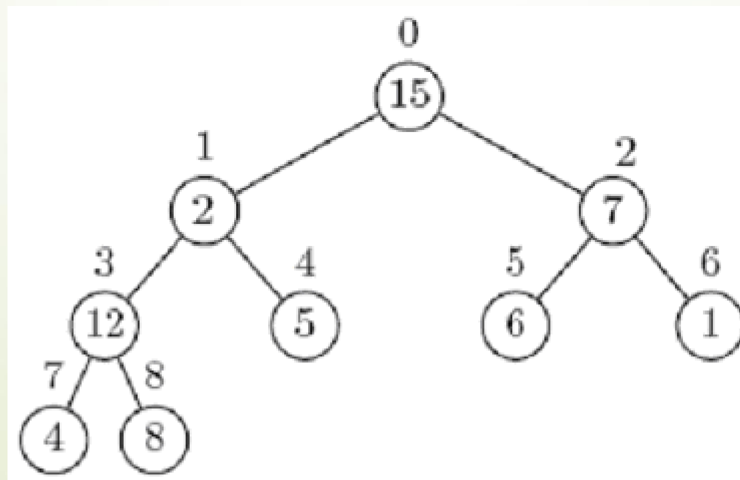
Opération de Suppression du Maximum (Exemple) (2)

- ***On commence alors par remplacer le contenu du nœud racine par celui du dernier nœud du tas :***
  - ***Ce dernier nœud est alors supprimé ;***
  - ***Ceci est illustré par la figure suivante :***



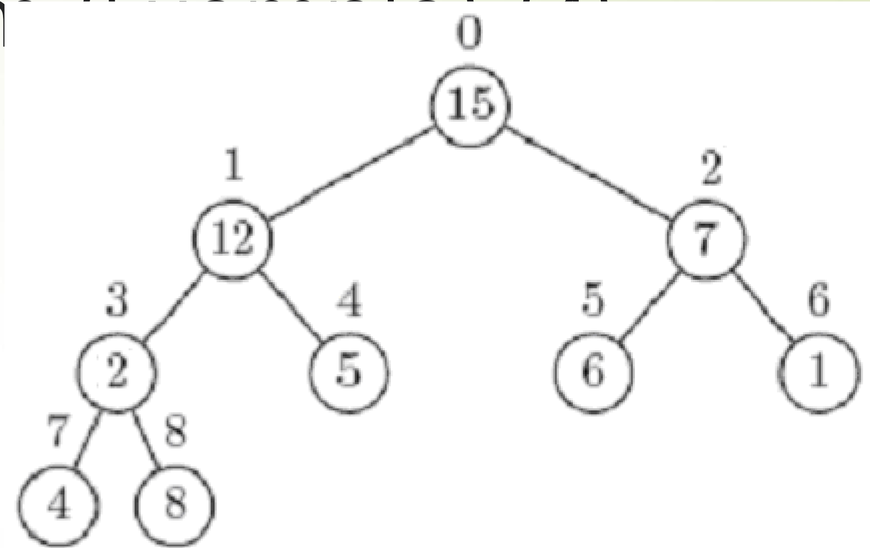
Opération de Suppression du Maximum (Exemple) (3)

- *L'arbre obtenu est parfait mais n'est pas un tas :*
  - *la clé contenue dans la racine a une valeur plus petite que les valeurs des clés de ses fils ;*
  - *Cette clé de valeur 2 est alors échangée avec la plus grande clé de ses fils, à savoir 15 ;*
  - *L'arbre obtenu est représenté par la figure suivante :*

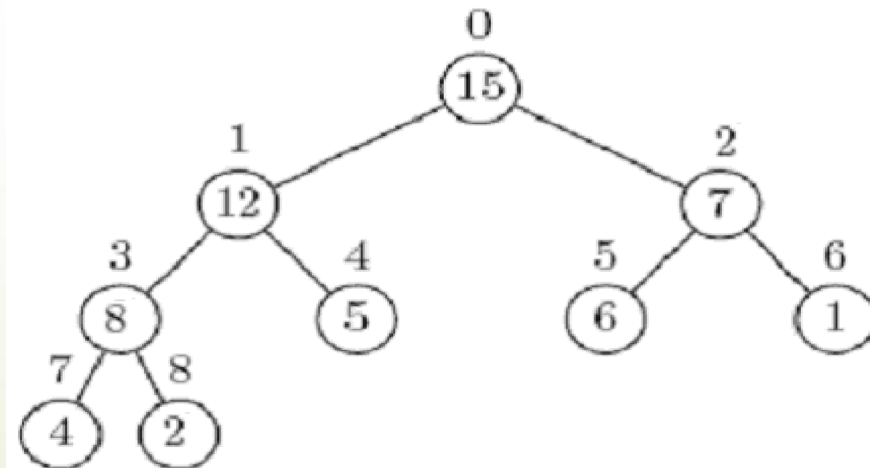


Opération de Suppression du Maximum (Exemple) (4)

- ***Encore une fois, cet arbre n'est pas un tas. On le réorganise pour qu'il respecte la définition du tas***



- ***Le dernier arbre obtenu est bien un tas ; il est illustré par la figure suivante :***



Opération de Suppression du Maximum (Pseudo-code) (1)

- **Une version qui utilise la procédure *Entasser***
- **La procédure *Entasser* :**
  - **permet de faire descendre la valeur en t[i] de manière que l'arbre de racine en i devienne un tas ;**
  - **suppose que les sous arbres de racines en *2i+1 (fils gauche du nœud en i) et en 2i+2* (*fils droit du nœud en i*) sont des tas.**

Opération de Suppression du Maximum (Pseudo-code) (2)

```
procédure Entasser(Tableau t[0 .. n-1], Entier
  i)
début
    si ((2i+2 == n) ou (t[2i+1] ≥ t[2i+2])) alors
       k ← 2i+1
   sinon
      k ← 2i+2
   fsi
   si t[i] < t[k] alors
       échanger (t[i], t[k])
       si k ≤ ((n div 2)- 1) alors
          Entasser(t, k)
      fsi
   fsi
fin
```

Opération de Suppression du Maximum (Pseudo-code) (3)

```
fonction supprimerMax (t : tas) : tas
(* le tas t est supposé non vide !! *)

début
   t.taille ← t.taille - 1
   t.tableau[0] ← t.tableau[t.taille]
   Entasser(t, 0)
   retourner (t)
fin
```

Opération de Suppression du Maximum (Complexité)

- **La complexité de la suppression est la même que celle de l'insertion, c-à-d O(log(n)) :**
  - ***En effet, on ne fait que suivre un chemin descendant depuis la racine.***

Opération de Recherche du Maximum (Pseudo-code & Complexité)

- ***L'opération de recherche du maximum est immédiate dans les tas***
- ***Elle prend un temps constant O(1)***

```
fonction Max (t : tas) : Elément
(* le tas t est supposé non vide !! *)
début
 retourner (t.tableau[0])
fin
```

Exemples d'Applications des Tas

- **Files de priorités (*Priority queues*) :**
  - ***Les tas sont fréquemment utilisés pour implémenter des files de priorités.***
  - ***A l'opposé des files standard, une file de priorités détruit l'élément de plus haute (ou plus basse) priorité.***
  - ***La signification de la "priorité" d'un élément dépend de l'application***
  - ***A tout instant, on peut insérer un élément de priorité arbitraire dans une file de priorités. Si l'application souhaite la destruction de l'élément de plus haute priorité, on utilise un arbre maximier.***

- **Tri par tas** (***Heapsort***):
  - ***Les opérations sur les tas permettent de résoudre un problème de tri à l'aide d'un algorithme appelé tri par tas (heapsort).***
  - ***Cet algorithme a la même complexité temporelle, O(n log(n)), que le tri rapide (quicksort). Mais, en pratique, une bonne implémentation de ce dernier le bat d'un petit facteur constant.***

Algorithme du Tri par Tas (Principe)

- **Supposons qu'on veut trier, en ordre croissant, un tableau T de n éléments.**

- **Principe :**
  - **L'algorithme du tri par tas commence, en utilisant la fonction *ConstruireTas*, par construire un tas dans le tableau à trier T ;**
  - **Ensuite, il prend l'élément maximal du tas, qui se trouve en T[0], l'échange avec T[n-1], et rétablit la propriété de tas, en utilisant l'appel de fonction *Entasser(T,0)* pour le nouveau tableau à n-1 éléments (*la case T[n-1] n'est pas considérée*) ;**
  - **L'algorithme de tri par tas répète ce processus pour le tas de taille n-1 jusqu'à la taille 2.**

Algorithme du Tri par Tas (Pseudo-code) (1)

```
fonction Tri_par_Tas(Tableau T[0 .. n-1]) :
   Tableau
début
  T ← ConstruireTas(T)
  pour i ← (n-1) à 1 par pas -1 faire
     Echanger(T[0], T[i])
     n ← n-1
     Entasser (T, i)
  retourner (T)
fin
```

ConstruireTas produit un tas à partir d'un tableau T

Entasser sert à garantir le maintien de la propriété de tas pour l'arbre de racine en i

Algorithme du Tri par Tas (Pseudo-code) (2)

```
fonction ConstruireTas(Tableau T[0 .. n-1]) : Tas
début
   pour i ← ((n div 2) - 1) à 0 par pas -1 faire
    Entasser (T, i)
   retourner (T)
fin
```

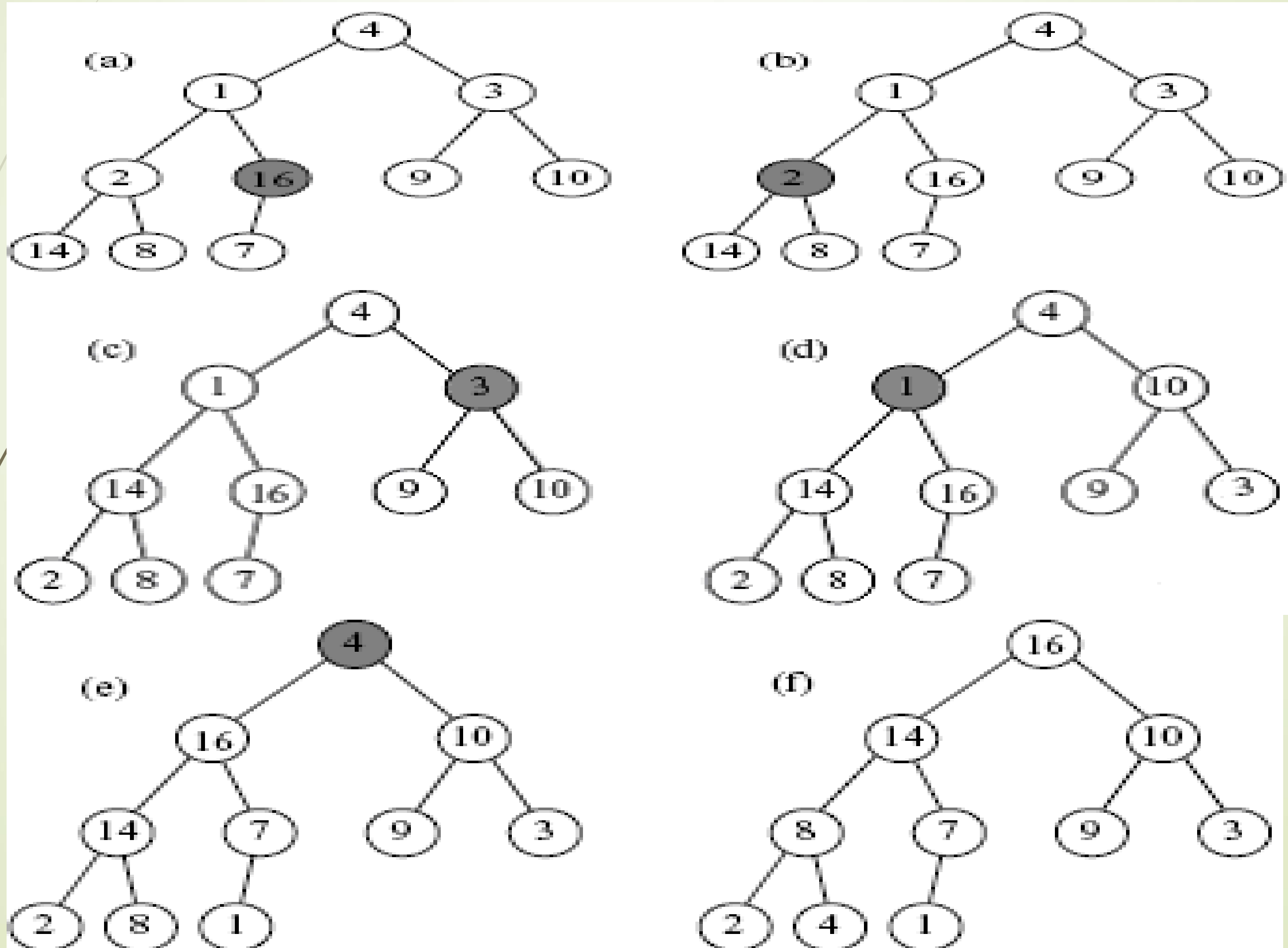
ConstruireTas Exemple (1)

- ***Illustration de l'action ConstruireTas sur un tableau d'entiers contenant 10 éléments***

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	4	1	3	2	16	9	10	14	8	7

- ***Remarquer que les nœuds qui portent les valeurs 9, 10, 14, 8 et 7 sont biens des feuilles, et donc des tas à un élément.***

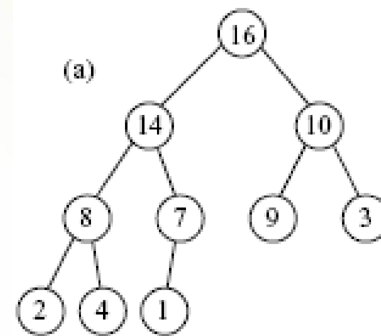
ConstruireTas: Exemple (2)

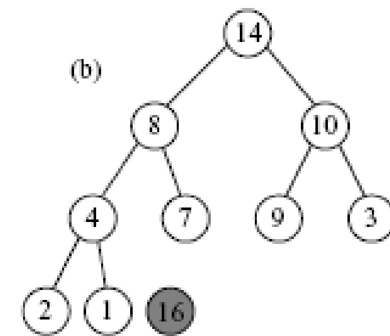


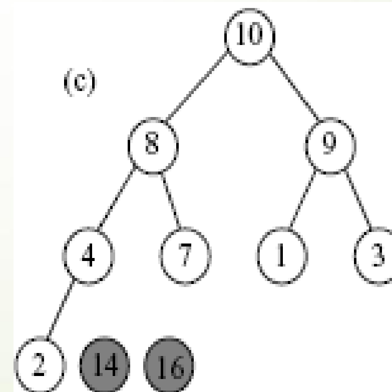
Tri par Tas : Exemple (1)

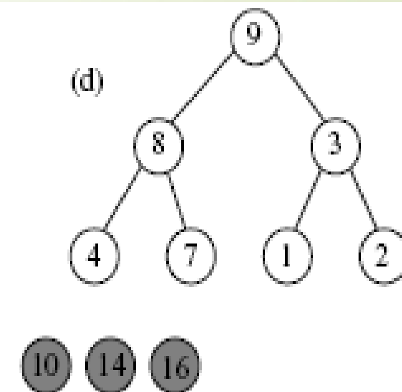
- ***Les figures qui suivent illustrent l'action du tri par tas après construction du tas***

- ***Chaque tas est montré au début d'une itération de la boucle***

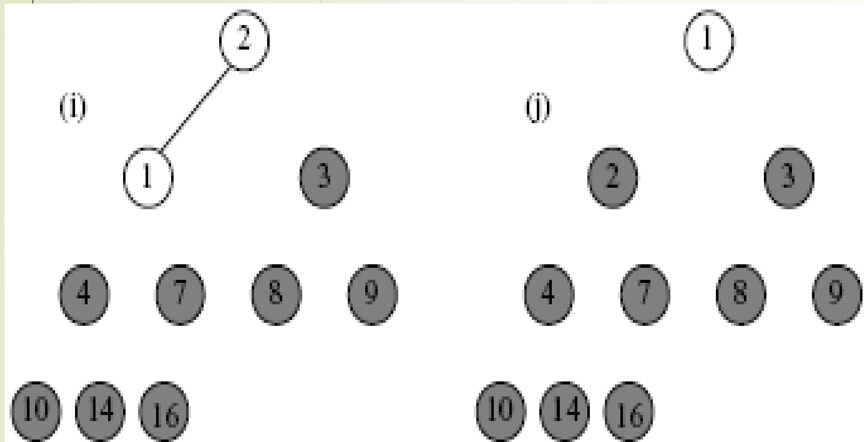


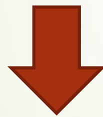


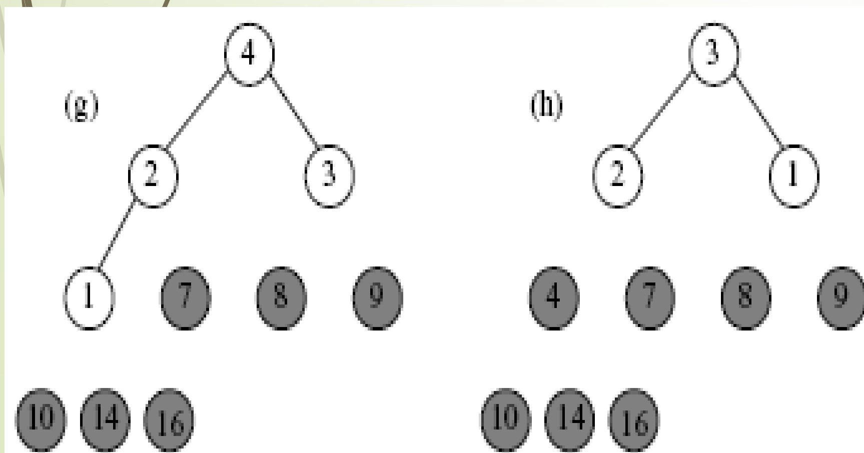


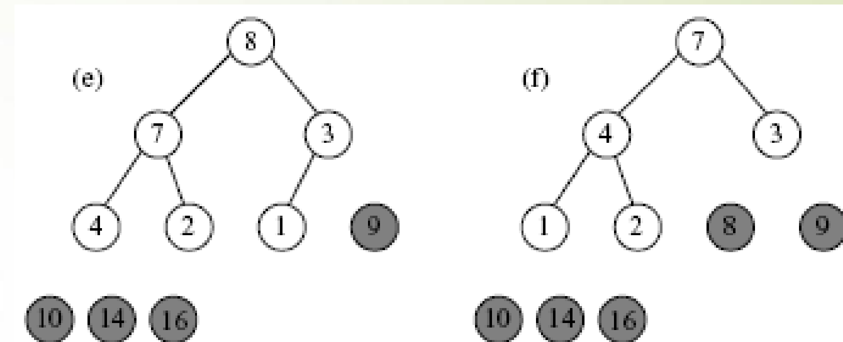


Tri par Tas : Exemple (2)









	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	1	2	3	4	7	8	9	10	14	16

Tableau final : trié

Algorithme du Tri par Tas Complexité

- **On montre que l'appel à ConstruireTas prend un temps O(n)**
- ***Chacun des (n-1) appels à Entasser prend un temps O(log(n))***
- **Par conséquent, l'algorithme du tri par tas s'exécute en O(n log(n))**

Introduction aux Arbres de Recherche Equilibrés

- (***Balanced Search Trees***)

Notion d'Arbres de Recherche Equilibrés

- ***La définition des arbres équilibrés impose que la différence entre les hauteurs des fils gauche et des fils droit de tout noeud ne peut excéder 1***
- ***Il faut donc maintenir l'équilibre de tous les noeuds au fur et à mesure des opérations d'insertion ou de suppression d'un nœud***
- ***Quand il peut y avoir un déséquilibre trop important entre les deux fils d'un noeud, il faut recréer un équilibre par :***
  - ***des rotations d'arbres ou par éclatement de nœuds (cas des arbres B)***
- ***Les algorithmes de rééquilibrage sont très compliqués :***
  - ***On cite entre autres, quelques exemples d'arbres équilibrés pour les quels les opérations de recherche, d'insertion et de suppression sont en O(log(n))***

Arbres de Recherche Equilibrés Exemples (1)

- ***Les arbres AVL :***
  - *Introduits par Adelson-Velskii Landis Landis (d'où le nom d'AVL) dans les années 60 ;*
  - *Un arbre AVL est un arbre binaire de recherche stockant une information supplémentaire pour chaque noeud : son facteur d'équilibre ;*
  - *Le facteur d'équilibre représente la différence des hauteurs entre son sous arbre gauche et son sous arbre droit ;*
  - *Au fur et à mesure que des nœuds sont insérés ou supprimés, un arbre AVL s'ajuste de lui-même pour que tous ses facteurs d'équilibres restent à 0, -1 ou 1.*

Arbres de Recherche Equilibrés Exemples (2)

- ***Les arbres rouges et noirs :***
  - ***Des arbres binaires de recherche qui se maintiennent eux-mêmes approximativement équilibrés en colorant chaque nœud en rouge ou noir ;***
  - ***En contrôlant cette information de couleur dans chaque noeud, on garantit qu'aucun chemin ne peut être deux fois plus long qu'un autre, de sorte que l'arbre reste équilibré.***

Arbres de Recherche Equilibrés Exemples (3)

- ***Les B arbres :***
  - *Arbres de recherche équilibrés qui sont conçus pour être efficaces sur d'énormes masses de données stockées sur mémoires secondaires ;*
  - *Chaque nœud permet de stocker plusieurs clés ;*
  - *Généralement, la taille d'un nœud est optimisée pour coïncider avec la taille d'un bloc (ou page) du périphérique, en vue d'économiser les coûteux accès d'entées sorties.*
- …