TD2 : Algèbre linéaire :

Exercice 1

D'après la méthode de Cramer :

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1{,}0001 & 5 \end{vmatrix} = -0{,}0005 \neq 0 \Rightarrow$ alors le système admet une solution

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6{,}0005 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{-0{,}0025}{-0{,}0005} = \boxed{5}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1{,}0001 & 6{,}0005 \end{vmatrix}}{+\Delta} = \dfrac{-0{,}0001}{-0{,}0005} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

$\boxed{X = (5 ; 0{,}2)}$

2) $\Delta = -0{,}0005$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1{,}0001 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

$\boxed{X^* = (0 ; 1{,}2)}$

$X = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$\| X \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

3) Erreur relative sur les données :

On pose : $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6{,}0005 \end{pmatrix}$

$b - \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}0005 \end{pmatrix} \Rightarrow \| b - \tilde{b} \|_\infty = 0{,}0005$

$\dfrac{\| b - \tilde{b} \|_\infty}{\| b \|_\infty} = \dfrac{0{,}0005}{6} = \boxed{8{,}33 \times 10^{-5}}$

Erreur relative sur les résultats :

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$ et $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

$\dfrac{\| X - \tilde{X} \|_\infty}{\| X \|_\infty} = \dfrac{5}{1{,}2} = \boxed{4{,}16}$

4) Une erreur relative d'ordre $8,33.10^{-5}$ sur b a entraîné une erreur de l'ordre de 4,16 sur la solution.

Exercice 2

1) Gauss classique :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & -2 \\ 3 & 14 & 28 & -11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 19 & -11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}}$$

2) Gauss avec pivotage partiel :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & -2 \\ 3 & 14 & 28 & -11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 14 & 28 & -11 \\ 2 & 6 & 10 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 14 & 28 & -8 \\ 0 & 10 & 26 & -16 \\ 0 & 8 & 19 & -11 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 14 & 28 & -8 \\ 0 & 10 & 26 & -16 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}}$$

3) Gauss avec pivotage et mise à l'échelle : ($\forall i : a_{ii} = 1$)

Exercice 3

$$(1) \begin{cases} 0,0001x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{0,0001x + y = 3} \\ -0,9998y = -2,9995 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 0{,}0001x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

Conclusion :

Il ne faut pas choisir un pivot très petit.

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) On pose : $A_1 = L_1 A$

avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On pose : $A_2 = L_2 A_1$ avec

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U = A_2}$$

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\det(A) = \det(L) \times \det(U) = 1 \times -8 = -8$

3) Pour calculer A^{-1} on résoud les trois systèmes linéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puis : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$

de même façon en changeant le second membre : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 \\ -3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -5/8 & 3/8 \\ -1/8 & -3/8 & 5/8 \\ 3/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}}$$

Exercice 5:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Définition:

La matrice A est dite à diagonale dominante strict si:

$$(\forall i) \quad \boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}$$

ou

$$(\forall j) \quad \boxed{|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|}$$

Propriétés de convergence:

- Si A est à diagonale dominante strict alors les méthodes de Jacobi et Gauss_Seidel convergent.
- Si A est symétrique et définie positive, la méthode de Gauss_Seidel converge.

1) $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \gamma z = 1 \\ \alpha y + \beta z = 2 \\ \delta y + \alpha z = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - \gamma z}{\alpha} \\ y = \dfrac{2 - \beta z}{\alpha} \\ z = \dfrac{3 - \delta y}{\alpha} \end{cases}$$

Méthode Jacobi :

$(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ donné

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{1 - \gamma z^{(k)}}{\alpha} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{2 - \beta z^{(k)}}{\alpha} \\ z^{(k+1)} = \dfrac{3 - \delta y^{(k)}}{\alpha} \end{cases}$$

Méthode Gauss-Seidel :

$(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ donné

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{1 - \gamma z^{(k)}}{\alpha} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{2 - \beta z^{(k)}}{\alpha} \\ z^{(k+1)} = \dfrac{3 - \delta y^{(k+1)}}{\alpha} \end{cases}$$

Condition de convergence des deux méthodes :

$$|\alpha| > |\gamma| \text{ et } |\alpha| > |\beta| \text{ et } |\alpha| > |\delta|$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha| > \max(|\gamma|, |\beta|, |\delta|)$$

Condition de convergence de Gauss-Seidel :

A est symétrique $\Rightarrow \gamma = 0$ et $\beta = \delta$

A devient : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Exercice 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc A est inversible.

2-

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pour $0 < \omega < 2$:

$$\frac{1}{\omega} I_3 - E = \begin{pmatrix} 1/\omega & 2 & 0 \\ 1 & 1/\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1/\omega \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right) = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} 1/\omega & 2 \\ 1 & 1/\omega \end{vmatrix} = \frac{1 - 2\omega^2}{\omega^3}$$

$\frac{1}{\omega} I_3 - E$ est inversible ssi : $1 - 2\omega^2 \neq 0$

ce qui implique $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right) x^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right) x^{(k)} + b \quad ; k \geq 0 \end{cases}$

pour $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right)^{-1}}_{M^{-1}} \underbrace{\left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right)}_{N} x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right)^{-1} b$$

Calculons : $\rho(M^{-1}N)$

$$M^{-1}Nx = \lambda x \Leftrightarrow Nx = \lambda Mx$$

$$\Leftrightarrow Nx - \lambda Mx = O_3 \Leftrightarrow (N - \lambda M)x = O_3$$

Calculons : $|N - \lambda M|$

$$N - \lambda M = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$|N - \lambda M| = \frac{(1-\omega-\lambda)(1-\omega-\lambda-\sqrt{2}\lambda\omega)(1-\omega-\lambda+\sqrt{2}\lambda\omega)}{\omega^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1-\omega \; ; \; \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\sqrt{2}\omega} \; ; \; \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}$$

$$\rho(M^{-1}N) = \max\{|\lambda_1| ; |\lambda_2| ; |\lambda_3|\}$$

on a $1+\sqrt{2}\omega > 1$ donc $|1-\omega| > \dfrac{|1-\omega|}{|1+\sqrt{2}\omega|}$

$$\Rightarrow \rho(M^{-1}N) = \max\{|\lambda_1| ; |\lambda_3|\}$$

$$|\lambda_1| < |\lambda_3| \Leftrightarrow |1-\sqrt{2}\omega| < 1 \Leftrightarrow \boxed{0 < \omega < \sqrt{2}}$$

Pour $\omega \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right[$:

$$\rho(M^{-1}N) = \left|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}\right|$$

Pour $\omega \in]\sqrt{2} ; 2[$:

$$\rho(M^{-1}N) = |1-\omega|$$

La méthode converge ssi :

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

Pour $\omega \in]\sqrt{2}, 2[$: $|1-\omega| < 1 \Rightarrow \boxed{\omega < 2}$ (1)

Pour $\omega \in]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2}[$: $\frac{|1-\omega|}{|1-\sqrt{2}\omega|} < 1$

	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		2
$1-\omega$		+		+	0	-	
$1-\sqrt{2}\omega$		+	0	-		-	
$\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}$		+	||	-	0	+	

$\omega \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup [1, 2[\Leftrightarrow \frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega} < 1 \Leftrightarrow \omega > 0$

Toujours vrai

$\omega \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \Leftrightarrow \frac{1-\omega}{\sqrt{2}\omega - 1} < 1 \Leftrightarrow 1-\omega < \sqrt{2}\omega - 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega} \quad (2)$$

de (1) et (2) on a $\boxed{\frac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega < 2}$