

**UNIVERSITE
ABDELMALEK
ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES
Tétouan
BP : 2121
Tél : 039972423
Fax : 039974500**



**DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
&
INFORMATIQUE**

Année 2006 / 2007

TRAVAUX DIRIGES

Polycopié

Analyse Numérique

EXERCICES CORRIGES

**SMA & SMI
S2**

SOUMAYA AFILAL

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
& Informatique

Année 2006-2007
SMA-SMI
Analyse Numérique(S_2)

Série n° 1

Exercice 1. Evaluer l'erreur commise quand on prend pour valeur approchée du nombre réel (e) (base des logarithmes népérien) $e = 2,718$.

Exercice 2.

- 1) Montrer qu'en écriture décimale on a : $0,9999\dots99 = 1$
- 2) Calculer en écriture décimale le réel $0,8888\dots88$.

Exercice 3. Dans un calcul numérique on a $\sqrt{4,001} \approx 2$. Donner une majoration de l'erreur commise (utiliser le théorème des A.F).

Exercice 4. Soient P_{n-1} et Q_{n-1} les polynômes d'interpolation de f respectives aux points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\{x_2, x_3, \dots, x_{n+1}\}$. Montrer que le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ est donné par :

$$P_n(x) = \frac{(x_{n+1} - x) P_{n-1}(x) - (x_1 - x) Q_{n-1}(x)}{x_{n+1} - x_1}$$

Exercice 5.

- 1) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé au tableau suivant:

k	1	2	3
x_k	-1	0	1
y_k	1	3	2

où f est une fonction continue sur R et $y_k = f(x_k)$

- 2) Retrouver les coefficients du polynôme d'interpolation cherché en résolvant un système linéaire.

Exercice 6 .

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels distincts et soit ε tel que $0 < \varepsilon < t_1 - t_0$.

- 1) Expliciter un polynôme P_ε de degré 3 tel que:

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(t_0) &= P_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 1 \\ P_\varepsilon(t_1) &= P_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

- 2) Si $\varphi(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(t)$, montrer que $\varphi(t_0) = 1$, $\varphi(t_1) = \varphi'(t_0) = \varphi'(t_1) = 0$.

Exercice 7.

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels et soit p_0, p_1, p'_0, p'_1 quatre nombres réels donnés. Nous cherchons un polynôme p de degré 3 tel que

$$p(t_0) = p_0, \quad p(t_1) = p_1, \quad (a)$$

$$p'(t_0) = p'_0, \quad p'(t_1) = p'_1, \quad (b)$$

où $p'(t)$ est la dérivée de p au point t .

- 1) Posons $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Représenter graphiquement le polynôme de degré 3 vérifiant les relations suivantes:

$$p(t_0) = 0, \quad p(t_1) = 1, \quad p'(t_0) = 0, \quad p'(t_1) = 1 \quad (c)$$

- 2) Soient $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ les polynômes définies par:

$$\varphi_0(t) = -\frac{(t-t_1)^2(2t+t_1-3t_0)}{(t_0-t_1)^3}; \quad \varphi_1(t) = -\frac{(t-t_0)^2(2t+t_0-3t_1)}{(t_1-t_0)^3}$$

$$\psi_0(t) = \frac{(t-t_1)^2(t-t_0)}{(t_0-t_1)^2}; \quad \psi_1(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)}{(t_1-t_0)^2}.$$

Vérifier que, pour $i = 0, 1$, $\psi'_i(t_i) = 1$, $\psi_i(t_i) = \psi_i(t_{1-i}) = \psi'_i(t_{1-i}) = 0$ et $\varphi_i(t_i) = 1$, $\varphi'_i(t_i) = \varphi_i(t_{1-i}) = \varphi'_i(t_{1-i}) = 0$.

Représenter graphiquement les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ lorsque $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.

- 3) Montrer que les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ forment une base de $\mathbb{P}_3$ que nous appellerons base d'Hermite de type cubique associée à t_0 et t_1 .

- 4) Montrer que le polynôme

$$p(t) = p_0\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + p'_0\psi_0(t) + p'_1\psi_1(t)$$

satisfait les relations (a) et (b).

En déduire l'expression du polynôme p vérifiant les relations (c).

- 5) Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{t_1 - t_0}{2}$ et soit p_ε le polynôme de degré 3 tel que:

$$p_\varepsilon(t_0) = p_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 0, \quad p_\varepsilon(t_1) = p_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 1.$$

Expliciter p_ε dans la base de Lagrange de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_0, t_0 + \varepsilon, t_1, t_1 + \varepsilon$.

- 6) Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(t)$ et constater que l'on retrouve $\varphi_1(t)$.

Peut-on obtenir toutes les fonctions de base d'Hermite par des procédés analogues? si oui, expliquer comment?

Exercice 8.

- 1) Montrer que la différence divisée d'ordre un est symétrique
- 2) Montrer que la différence divisée d'ordre deux est symétrique deux à deux.

Exercice 9.

Calculer les différences relatives aux tableaux suivants:

	k	1	2	3	4		k	1	2	3	4	5
(I)	x_k	0	1	2	4	(II)	x_k	0	1	2	3	4
	y_k	1	1	2	5		y_k	1	2	4	5	7

- 1) Déterminer les polynômes d'interpolation de Newton des tableaux (I) et (II).

Exercice 10.

- 1) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé au tableau suivant:

k	1	2	3	4
x_k	-2	-1	0	1
y_k	2	0	1	2

- 2) Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton associé.
- 3) Comparer les polynômes d'interpolation de Newton et de Lagrange.
- 4) Conclure.

Exercice 11.

On considère la fonction $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$

- 1) Donner le polynôme d'interpolation $P(x)$ de degré 2 associé à f aux points $x_i = 0, 1, 2$
- 2) Donner l'expression de l'erreur $f(x) - P(x)$.
- 3) Montrer que:

$$|E(x)| = |f(x) - P(x)| \leq \left| \frac{\pi^3}{48} x(x-1)(x-2) \right|$$

Estimer l'erreur pour $x = \frac{1}{2}$ et comparer la à l'erreur effective.

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
& Informatique

Année 2006-2007
SMA-SMI
Analyse Numérique(S_2)

Série n° 1

Correction des Exercices

Exercice1: On utilise la formule de Taylor ou D.L au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \exp x$

$$f(x) = \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, on commence par calculer les premiers termes de la suite $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, cette suite est croissante, $u_3 = 2,6666$; $u_4 = 2,7083$, $u_5 = 2,7167$, $u_6 = 2,718055 > 2,718$; $u_6 = \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!}$

$$|e - 2,718| = |e - u_6 + u_6 - 2,718| \leq |u_6 - 2,718| + |e - u_6| \leq 5,5 \cdot 10^{-5} + \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$n \geq 7$, on pose $v_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow v_{n+1} \leq \frac{1}{8} v_n$$

$$\sum_{k=7}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \dots$$

$$\sum_{k=7}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{7!} + \frac{1}{8} \frac{1}{7!} + \frac{1}{8^2} \frac{1}{7!} + \dots + \frac{1}{8^n} \frac{1}{7!} + \dots$$

$$\sum_{k=7}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{7!} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^n} + \dots \right)$$

$$\sum_{k=7}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \right) \leq \frac{8}{7! \cdot 7} \approx 2,3 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow |e - 2,718| \leq 2,8 \cdot 10^{-4}$$

Exercice2:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 0,9999\dots999\dots = 9(10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots) \\
 & 0,9999\dots999\dots = 9 \cdot 10^{-1} (1 + 10^{-1} + \dots + 10^{-n} + \dots) \\
 & = 9 \cdot 10^{-1} \left(\frac{1}{1 - 10^{-1}} \right) = 9 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1 \\
 2) \quad & 0,8888\dots888\dots = 8(10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots) \\
 & 0,8888\dots888\dots = 8 \cdot 10^{-1} (1 + 10^{-1} + \dots + 10^{-n} + \dots) \\
 & = 8 \cdot 10^{-1} \left(\frac{1}{1 - 10^{-1}} \right) = 8 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

Exercice3:

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

Le théorème des A.F $\Rightarrow f(x) - f(y) = (x - y) f'(c)$ avec $c \in]x, y[$, on va essayer de majorer l'erreur sur l'intervalle $]4, 4,001[$

$$|f(x) - f(y)| = |f(4,001) - f(4)| \leq 10^{-3} \sup_{4 < c < 4,001} |f'(c)|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ d'où } |f'(c)| \leq \frac{1}{4} = 0,25 \quad \forall c \in]4, 4,001[\text{ d'où } |f(x) - f(y)| \leq 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

Exercice4:

P_{n-1} est le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Q_{n-1} est le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_2, x_3, \dots, x_{n+1}\}$

donc $\forall i = 2, \dots, n$ on a $P_{n-1}(x_i) = Q_{n-1}(x_i) = f(x_i)$

$$\text{or } P_n(x) = \frac{(x_{n+1} - x) P_{n-1}(x) - (x_1 - x) Q_{n-1}(x)}{x_{n+1} - x_1}$$

$$\text{d'où } P_n(x_i) = \frac{(x_{n+1} - x_i) P_{n-1}(x_i) - (x_1 - x_i) Q_{n-1}(x_i)}{x_{n+1} - x_1} = f(x_i)$$

$$\text{pour } i = 1 \quad P_n(x_1) = P_{n-1}(x_1) = f(x_1)$$

$$\text{pour } i = n+1 \quad P_n(x_{n+1}) = Q_{n-1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

on a montré que $\forall i = 1, \dots, n+1 \quad P_n(x_i) = f(x_i)$, de plus $\deg P_n = n$, d'après l'unicité du polynôme d'interpolation, P_n est bien le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$.

Exercice 5:

1) Déterminons le polynôme d'interpolation de Lagrange associé au tableau suivant:

k	x_k	y_k
1	-1	1
2	0	3
3	1	2

soit $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points x_1, x_2, x_3 .

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{2}x(x - 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -(x+1)(x-1) = 1-x^2$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$P_2(x) = \varphi_1(x)f(x_1) + \varphi_2(x)f(x_2) + \varphi_3(x)f(x_3)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3(1-x^2) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

$$P_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

2) Retrouvons les coefficients du polynôme d'interpolation cherché en résolvant un système linéaire.

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, on a $P_2(-1) = 1$, $P_2(0) = 3$ et $P_2(1) = 2$

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}$$

donc le polynôme d'interpolation cherché est $P_2(x)/P_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

Exercice 6:

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels distincts et soit $\varepsilon / 0 < \varepsilon < t_1 - t_0$.

cherrons un polynôme P_ε de degré 3 tel que:

$$P_\varepsilon(t_0) = P_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 1$$

$$P_\varepsilon(t_1) = P_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 0$$

c.à.d cherchons le polynôme d'interpolation de Lagrange P_ε associé aux points $(t_0, 1)$, $(t_0 + \varepsilon, 1)$, $(t_1, 0)$, $(t_1 + \varepsilon, 0)$

soit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base de Lagrange de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_0, t_0 + \varepsilon, t_1, t_1 + \varepsilon$, nous avons:

$$P_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t_0)\varphi_0(t) + P_\varepsilon(t_0 + \varepsilon)\varphi_1(t) + P_\varepsilon(t_1)\varphi_2(t) + P_\varepsilon(t_1 + \varepsilon)\varphi_3(t)$$

$$P_\varepsilon(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)$$

$$\text{or } \varphi_0(t) = \frac{(t - t_0 - \varepsilon)(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon)}{(-\varepsilon)(t_0 - t_1)(t_0 - t_1 - \varepsilon)}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t - t_0)(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon)(t_0 - t_1 + \varepsilon)(t_0 - t_1)} \text{ donc}$$

$$P_\varepsilon(t) = \frac{(-t_0 + t_1 - \varepsilon)(t - t_0 - \varepsilon)(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon) + (t_0 - t_1 + \varepsilon)(t - t_0)(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon)}{\varepsilon(t_0 - t_1)(t_0 - t_1 - \varepsilon)(t_0 - t_1 + \varepsilon)}$$

$$P_\varepsilon(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon)[(-t_0 + t_1 - \varepsilon)(t - t_0 - \varepsilon) + (t_0 - t_1 + \varepsilon)(t - t_0)]}{\varepsilon(t_0 - t_1)(t_0 - t_1 - \varepsilon)(t_0 - t_1 + \varepsilon)}$$

$$P_\varepsilon(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_1 - \varepsilon)[\varepsilon t_0 - \varepsilon t_1 - \varepsilon t + \varepsilon t_0 - \varepsilon t + \varepsilon t_0 + \varepsilon^2]}{\varepsilon(t_0 - t_1)(t_0 - t_1 - \varepsilon)(t_0 - t_1 + \varepsilon)}$$

$$P_\varepsilon(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_1-\varepsilon)[3t_0-t_1-2t+\varepsilon]}{(t_0-t_1)(t_0-t_1-\varepsilon)(t_0-t_1+\varepsilon)}$$

$$2) \varphi(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(t) = \frac{(t-t_1)^2(3t_0-t_1-2t)}{(t_0-t_1)^3} \Rightarrow \varphi(t_0) = 1 \text{ et } \varphi(t_1) = 0$$

$$\varphi'(t) = \frac{2(t-t_1)(3t_0-t_1-2t) - 2(t-t_1)^2}{(t_0-t_1)^3}$$

$$\varphi'(t) = \frac{6(t-t_1)(t_0-t)}{(t_0-t_1)^3}, \text{ nous avons donc bien } \varphi'(t_0) = \varphi'(t_1) = 0$$

Exercice 7. Soit $(t_0, t_1, p_0, p_1, p'_0, p'_1) \in \mathbb{R}^6$ avec $t_0 < t_1$. Nous cherchons un polynôme p de degré 3 tel que

$$p(t_0) = p_0, \quad p(t_1) = p_1, \quad p'(t_0) = p'_0, \quad p'(t_1) = p'_1$$

où $p'(t) = \frac{dp}{dt}(t)$.

1) Posons $t_0 = t_1 - 1 = 0$. Le polynôme p de degré 3 vérifiant

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p'(0) = 0 \text{ et } p'(1) = 1 \text{ est } p(t) = t^2(2-t)$$

est représentée sur la figure 1.

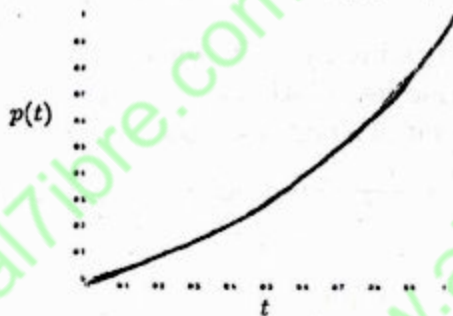


FIG. 1: Représentation du polynôme p

$$2) \varphi_0(t) = \frac{(t-t_1)^2(2t+t_1-3t_0)}{(t_0-t_1)^3}; \quad \varphi_1(t) = -\frac{(t-t_0)^2(2t+t_0-3t_1)}{(t_1-t_0)^3},$$

$$\psi_0(t) = \frac{t-t_1}{(t_0-t_1)^2}; \quad \psi_1(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)}{(t_1-t_0)^2}.$$

Les vérifications sont faciles. Graphiquement, les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ sont illustrés sur la figure 2.

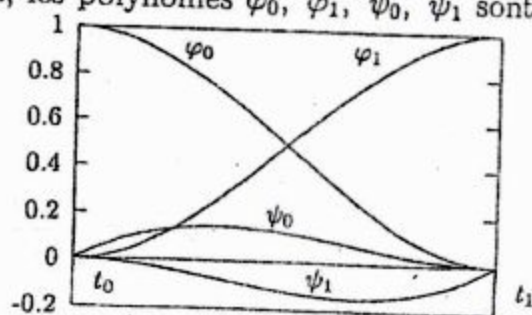


FIG. 2: Base d'Hermite de type cubique associée à t_0 et t_1 .

3) Les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ sont linéairement indépendants; en effet, considérons une combinaison linéaire nulle de ces quatre fonctions

$$q(t) = \alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \psi_0(t) + \alpha_3 \psi_1(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et montrons que $\alpha_i = 0, i = 1, 2, 3$ et 4. En évaluant $q(t)$ en $t = t_0$ (resp. $t = t_1$), on obtient $\alpha_0 = 0$ (resp. $\alpha_1 = 0$).

Puis en évaluant $q'(t)$ en $t = t_0$ et $t = t_1$, on conclut que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Puisque $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ alors un système de quatre polynômes de degré ≤ 3 libre dans $\mathbb{P}_3$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.

4) On obtient

$$p(t_0) = p_0 \underbrace{\varphi_0(t_0)}_{=1} + p_1 \underbrace{\varphi_1(t_0)}_{=0} + p'_0 \underbrace{\psi_0(t_0)}_{=0} + p'_1 \underbrace{\psi_1(t_0)}_{=0} = p_0$$

$$p'(t_0) = p_0 \underbrace{\varphi'_0(t_0)}_{=0} + p_1 \underbrace{\varphi'_1(t_0)}_{=0} + p'_0 \underbrace{\psi'_0(t_0)}_{=1} + p'_1 \underbrace{\psi'_1(t_0)}_{=0} = p'_0$$

en utilisant le point 2). De même, on évalue $p(t_1)$ et $p'(t_1)$ pour conclure que ce polynôme vérifie les relations (a) et (b).

Le polynôme satisfaisant les relations (c) est donc: $p(t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t) = t^2(2-t)$

5) Soit $\varepsilon \in \left] 0, \frac{t_1 - t_0}{2} \right[$ et soit p_ε le polynôme de degré 3 tel que:

$$p_\varepsilon(t_0) = p_\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 0, \quad p_\varepsilon(t_1) = p_\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = 1$$

Considérons la base de Lagrange $(\phi_j)_{j=0}^3$ de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_0, t_0 + \varepsilon, t_1, t_1 + \varepsilon$. En utilisant les résultats du cours on peut écrire.

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(t) &= p_\varepsilon(t_0)\phi_0(t) + p_\varepsilon(t_0 + \varepsilon)\phi_1(t) + p_\varepsilon(t_1)\phi_2(t) + p_\varepsilon(t_1 + \varepsilon)\phi_3(t) \\ p_\varepsilon(t) &= \phi_2(t) + \phi_3(t), \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(t-t_1-\varepsilon)}{(t-t_0)(t_1-t_0-\varepsilon)(-\varepsilon)} \quad \text{et} \\ \phi_3(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(t-t_1)}{(t_1+\varepsilon-t_0)(t_1-t_0)(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

en réduisant au même dénominateur, nous obtenons

$$p_3(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(-2t+3t_1-t_0+\varepsilon)}{(t-t_0)(t_1-t_0-\varepsilon)(t_1-t_0+\varepsilon)}$$

6)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_3(t) = \frac{(t-t_0)^2(-2t+3t_1-t_0)}{(t_1-t_0)^2} = \varphi_1(t),$$

Les 3 autres fonctions de base d'Hermite peuvent être obtenues par des procédés analogues. En effet; par exemple, la fonction de base ψ_1 s'obtient en posant, au point 5) ci dessus,

$$p\varepsilon(t_0) = 0, \quad p\varepsilon(t_0 + \varepsilon) = 0, \quad p\varepsilon(t_1) = 0, \quad p\varepsilon(t_1 + \varepsilon) = \varepsilon$$

Les 2 dernières fonctions (φ_0 et ψ_0) de la base des polynômes de degré 3 pour l'interpolation d'Hermite s'obtiennent par symétrie, en échangeant t_1 et t_0 .

Exercice 8:

1) Montrons que la différence divisée d'ordre un est symétrique

$$\delta y(x_0, x_1) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y(x_0) - y(x_1)}{x_0 - x_1} = \delta y(x_1, x_0)$$

2) Montrons que la différence divisée d'ordre 2 est symétrique 2 à 2

Pour montrer que la différence divisée est symétrique 2 à 2 il suffit de montrer que :

$$\delta^2 y(x_0, x_1, x_2) = \delta^2 y(x_2, x_1, x_0) \text{ et } \delta^2 y(x_0, x_1, x_2) = \delta^2 y(x_1, x_0, x_2) \text{ en effet}$$

si on a $\delta^2 y(x_0, x_1, x_2) = \delta^2 y(x_2, x_1, x_0) = \delta^2 y(x_1, x_0, x_2)$ alors on aura

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \delta^2 y(x_2, x_0, x_1) = \delta^2 y(x_0, x_2, x_1) = \delta^2 y(x_1, x_2, x_0).$$

Montrons que: $\delta^2 y(x_0, x_1, x_2) = \delta^2 y(x_2, x_1, x_0)$

$$\delta^2 y(x_2, x_1, x_0) = \frac{\delta y(x_1, x_0) - \delta y(x_2, x_1)}{x_0 - x_2} = \frac{\delta y(x_2, x_1) - \delta y(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\delta^2 y(x_2, x_1, x_0) = \frac{\delta y(x_1, x_2) - \delta y(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \delta^2 y(x_0, x_1, x_2)$$

Montrons que: $\delta^2 y(x_0, x_1, x_2) = \delta^2 y(x_1, x_0, x_2)$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{\delta y(x_0, x_2) - \delta y(x_1, x_0)}{x_2 - x_1}$$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \left[\frac{y(x_2) - y(x_0)}{x_2 - x_0} - \delta y(x_1, x_0) \right]$$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \left[\frac{y(x_2) - y(x_1) + y(x_1) - y(x_0)}{x_2 - x_0} - \delta y(x_1, x_0) \right]$$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_0)} + \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} - \frac{\delta y(x_1, x_0)}{(x_2 - x_1)}$$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{\delta y(x_1, x_2)}{(x_2 - x_0)} + \delta y(x_0, x_1) \left[\frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} - \frac{(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \right]$$

$$\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \frac{\delta y(x_1, x_2)}{(x_2 - x_0)} - \frac{\delta y(x_0, x_1)}{(x_2 - x_0)} \underbrace{\left[\frac{(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_1)} \right]}_{=1}$$

d'où $\delta^2 y(x_1, x_0, x_2) = \delta^2 y(x_0, x_1, x_2)$

donc on peut conclure que la différence divisée d'ordre 2 est symétrique 2 à 2

Exercice 9:

Cherchons les différences relatives aux tableaux suivants:

	x_k	y_k	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
	0	1			
			0		
(I)	1	1	$\frac{1}{2}$		
			1	$-\frac{1}{12}$	
	2	1	$\frac{1}{6}$		
			$\frac{3}{2}$		
	4	5			

D'où $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$

$$P_3(x) = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

	x_k	y_k	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
	0	1				
			1			
	1	2	$\frac{1}{2}$			
(II)			2	$-\frac{1}{3}$		
	2	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$		
			1	$\frac{1}{3}$		
	3	5	$\frac{1}{2}$			
			2			
	4	7				

D'où $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(x-3)$

Exercice 10:

1) Déterminons le polynôme d'interpolation de Lagrange associé au tableau suivant:

k	x_k	y_k
1	-2	2
2	-1	0
3	0	1
4	1	2

soit $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ la base de Lagrange de $\mathbb{P}_3$ associée aux points x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$P_3(x) = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2 + \varphi_3(x) y_3 + \varphi_4(x) y_4$$

$$P_3(x) = 2\varphi_1(x) + \varphi_3(x) + 2\varphi_4(x)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x+1)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x+2)(x-1)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{3}x(x-1)(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x+2)(x-1) + \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$$

2) Cherchons les différences relatives au tableau suivant:

x_k	y_k	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
-2	2			
		-2		
-1	0		$\frac{3}{2}$	
		1		$-\frac{1}{2}$
0	1		0	
		1		
1	2			

le polynôme de Newton associé est le suivant:

$$Q_3(x) = 2 - 2(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)(x+1) - \frac{1}{2}x(x+1)(x+2)$$

$$Q_3(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$$

4) Les deux polynômes sont égaux d'où l'unicité du polynôme d'interpolation.

Exercice 11:

1) Cherchons le polynôme d'interpolation $P(x)$ de degré 2 associé à f aux points 0, 1, 2

On cherche $P(x)$ tel que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ avec $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 0$

$$P(0) = 0 = a_0 \quad \begin{cases} P(1) = 1 \\ P(2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \implies a_1 = 2, \quad a_2 = -1$$

$$\text{D'où } P(x) = -x^2 + 2x$$

$$2) E(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{3!}\pi(x)f^{(3)}(\xi_x) \text{ avec } \pi(x) = x(x-1)(x-2) \text{ et } \xi_x \in [0, 2]$$

$$3) \text{ On } f^{(3)}(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi}{2}x$$

$$\text{d'où } |E(x)| = |f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3}{48} \sup_{x \in [0, 2]} \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right| |\pi(x)|$$



$$|E(x)| = |f(x) - P(x)| \leq \left| \frac{\pi^3}{48} x(x-1)(x-2) \right|$$

L'estimation de l'erreur pour $x = \frac{1}{2}$ c'est: $\frac{\pi^3}{128}$

$$E_{est} \approx 0,242$$

Calcul de l'erreur effective pour $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} \right| \approx 0,043$$

L'estimation de l'erreur est plus moins fine que l'erreur effective.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Corrigés
Algèbre
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..

