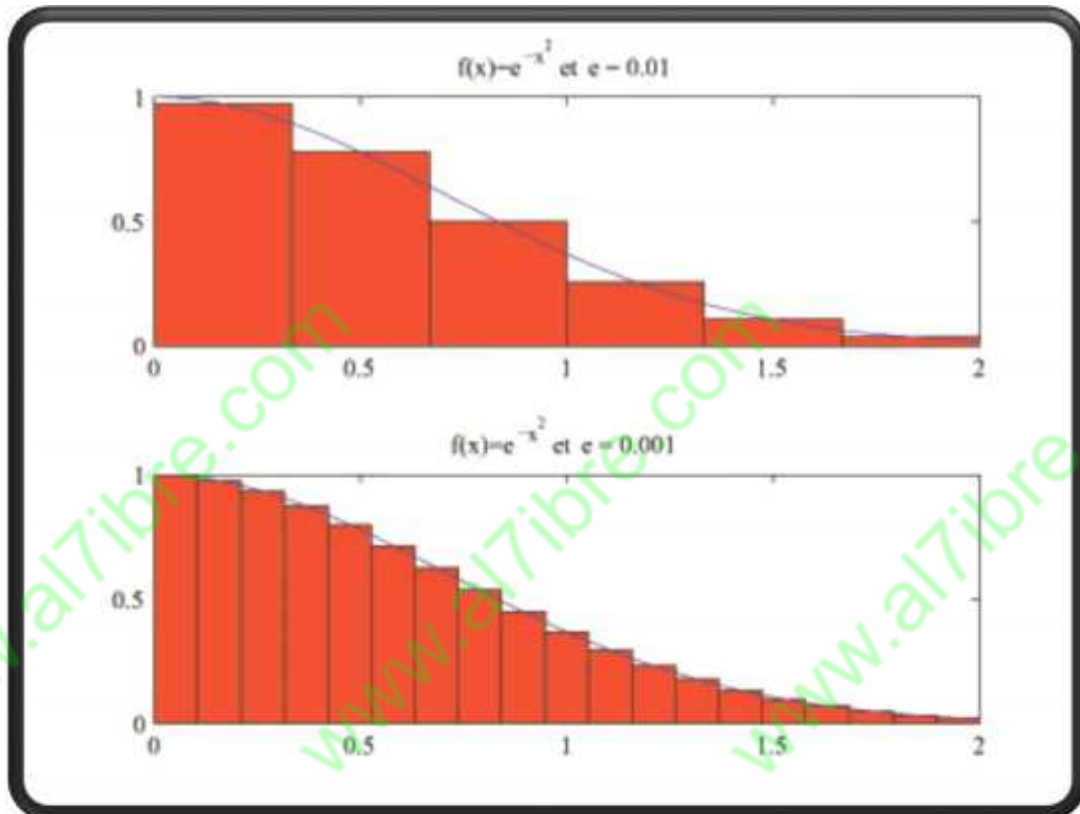


Analyse Numérique : SMA-SMI S4

Cours, exercices et examens



Boutayeb A, Derouich M, Lamlili M et Boutayeb W.

Table des matières

1	Résolution numérique de systèmes linéaires $AX = B$	5
1.1	Méthodes directes de résolution de $AX=B$	5
1.1.1	Exemples	5
1.1.2	Méthode de Gauss(avec et sans pivot)	7
1.1.3	Factorisation LU	10
1.1.4	Factorisation de Choleski (matrice symétrique)	13
1.1.5	Factorisation de Householder (matrice unitaire)	14
1.2	Méthodes indirectes de résolution de $AX=B$	15
1.2.1	Quelques rappels sur les matrices	15
1.2.2	Méthodes classiques(Jacobi, Gauss Seidel, Relaxation)	15
1.3	Exercices	19
2	Approximations des solutions de l'équation $f(x) = 0$	22
2.1	Rappels et notations	22
2.2	Méthode de Newton :	27
2.3	Méthode de Newton modifiée :	29
2.4	Méthode de dichotomie :	29
2.5	Méthode de fausse position (Regula Falsi) :	31
2.6	Exercices	32
3	Introduction à l'interpolation	36
3.1	Rappel et définitions	36
3.2	Interpolant de Lagrange	36
3.3	Interpolant de Newton	38
3.4	Existence et Unicité de l'interpolant	41
3.4.1	Interpolation linéaire	42
3.5	Erreur d'interpolation	43
3.6	Exercices	44

4	Intégration numérique	46
4.1	Introduction	46
4.2	Approximation	47
4.2.1	Approximation par des rectangles à gauche	48
4.2.2	Approximation par des rectangles à droite	49
4.2.3	Approximation par des rectangles médians	50
4.2.4	Approximations par des trapèzes	51
4.2.5	Formule de Simpson	52
4.3	Interpolation et Erreur d'intégration numérique	53
4.3.1	Interpolation linéaire et la formule du trapèze :	53
4.3.2	Formule du trapèze composée	53
4.3.3	Erreur de la formule de Simpson	54
4.4	Exercices	54
5	Analyse numérique des équations différentielles ordinaires (e.d.o)	56
5.1	Rappels sur les équations différentielles ordinaires (e.d.o)	56
5.2	Systèmes linéaires	57
5.3	Notions de stabilité	58
5.4	Système d'équations aux différences linéaires avec coefficients constants	60
5.5	Méthodes numériques pour les problèmes de condition initiale	61
5.5.1	Convergence	62
5.5.2	Consistance	62
5.5.3	Stabilité	63
5.5.4	Méthode d'Euler	64
5.5.5	Méthodes de Taylor dans le cas scalaire	66
5.5.6	Méthodes de Runge-Kutta (R.K) dans le cas scalaire	67
5.5.7	Méthodes de Runge-Kutta explicites	67
5.6	Exercices	72
6	Examens	77
6.1	F.S.O Session ordinaire 2012-2013 (Durée : 1h30)	77
6.2	F.S.O Session Rattrapage 2012-2013 (Durée : 1h30)	79
6.3	F.S.O Session ordinaire 2011-2012 (Durée : 1h30)	81
6.4	F.S.O Session de rattrapage 2011-2012 (Durée : 1h30)	83
6.5	F.S.O Session ordinaire 2010-2011 (Durée : 1h30)	85
6.6	F.S.O Session Rattrapage 2010-2011 (Durée : 1h30)	87
6.7	F.S.O Examen 2009-2010	89
6.8	F.S.O Session ordinaire 2008/2009	91

6.9 F.S.O Session rattrapage 2008-2009	93
6.10 F.S.O Session ordinaire 2007-2008(Durée : 1h30)	94
6.11 F.S.O Examen blanc 2007-2008	96
6.12 F.S.O Devoir à faire chez soi 2007-2008	98
6.13 F.S.O Session ordinaire Janvier 2003	99

Table des figures

2.1	la solution est $x = 1.3652$	29
2.2	$f(1).f(2) < 0$	31
2.3	$x = 2.7133$	32
3.1	Interpolation de Newton	41
3.2	Interpolation de Lagrange	44
4.1	Approximation par des rectangles à gauche	49
4.2	Approximation par des rectangles à droite	50
4.3	Approximation par des rectangles médians	51

Chapitre 1

Résolution numérique de systèmes linéaires $AX = B$

1.1 Méthodes directes de résolution de $AX=B$

1.1.1 Exemples

1. Résoudre(S) : $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & L_1 \\ x_1 + x_2 = 2 & L_2 \end{cases}$

Par substitution

$$L_1 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$L_2 \rightarrow 2x_1 = 2 \rightarrow x_1 = 1 \rightarrow x_2 = x_1 = 1$$

Par combinaison de lignes

$$L_1 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$L'_2 \Rightarrow L_2 - L_1 \rightarrow 2x_2 = 2 - 0 = 2 \rightarrow x_2 = 1 = x_1$$

Par Inversion de la matrice

$$(S) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad AX = B$$

$$\det A = 2; A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A^{-1} existe alors $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par méthode de Cramer

$$2. \text{ Résoudre } (S') : \begin{cases} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 = -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 = 8 & L_3 \\ 7x_4 = 14 & L_4 \end{cases}$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \rightarrow x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \rightarrow x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \rightarrow x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \rightarrow x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

3. Système triangulaire : cas général

$$ST') : \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = b_1 & L_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = b_2 & L_2 \\ \vdots & \\ u_{nn}x_n = b_n & L_n \end{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On suppose que $u_{kk} \neq 0 \quad k = 1, \dots, n$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{nn}b_n)/u_{n-1n-1}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}b_j)/u_{ii} \quad i = n-1, \dots, 1$$

Algorithme de résolution pour $UX = B$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

Pour $i = n-1$ à 1

$$x_i = b_i$$

Pour $j = i+1$ à n

$$x_i = x_i - u_{ij}x_j$$

Fin j

Fin i

Remarques 1.1.1. Remarques :

1. La matrice U est dite triangulaire supérieure. Elle est inversible si tous les termes diagonaux sont non nuls et $\det U = u_{11} * u_{22} * \dots * u_{nn}$

2. La matrice triangulaire inférieure se traite de façon similaire

3. le nombre d'opérations nécessaires est :

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications, } \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions et } n \text{ divisions soit au total } n^2 \text{ opérations}$$

1.1.2 Méthode de Gauss(avec et sans pivot)

Elle consiste à ramener un système linéaire de la forme $AX = B$ (A avec matrice pleine) à un système de la forme $UX = D$ puis à résoudre ce dernier.

Exemple 1.1.1. Résoudre

$$(S') : \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1 \\ 0x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26 & L_3 \end{cases}$$

$$\text{Etape1: } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} = L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} = L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} = L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\text{Etape2: } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} = L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} = L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } x_3 = \frac{1}{2}, x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1 \text{ et } x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

Méthode de Gauss sans pivot (cas général)

$$(S_0) \begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} x_1 + a_{22}^{(0)} x_2 + a_{23}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(0)} x_n = b_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(0)} x_1 + a_{n2}^{(0)} x_2 + a_{n3}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(0)} x_n = b_n^{(0)} \end{cases}$$

Etape1 : On suppose $a_{11}^{(0)} \neq 0$ et on pose $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(0)}$ par $L_i^{(1)} = L_i^{(0)} - m_{i1}L_1^{(0)}$ pour $i = 2, 3, \dots, n$
 $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}$ $i, j = 2, 3, \dots, n$ et $b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)}$ $i = 2, 3, \dots, n$

On obtient alors le système (S_1) suivant :

$$(S_1) \begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ 0 + a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Etape2 : A nouveau, on suppose $a_{22}^{(1)} \neq 0$ et on pose $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(1)}$ par $L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)}$ pour $i = 3, \dots, n$
 $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}$ $i, j = 3, \dots, n$ et $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)}$ $i = 3, \dots, n$

On obtient alors le système (S_2) suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ 0 + 0 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

En supposant qu'à chaque étape on a $a_{kk}^{(1)} \neq 0$, on poursuit la la transformation
 jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire :

$$(S_{n-1}) : \begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

On obtient alors la solution en commençant par : $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, $x_{n-1}, \dots, x_1$

Ecriture matricielle :

$$\text{étape 0 : } A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{étape 1 : } A^{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \\ \text{étape n-1 : } A^{(n-1)} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices élémentaires de Gauss

Soient les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -m_{k+1k} & \ddots \\ & & & & \vdots & \ddots \\ & & & & -m_{nk} & 1 \end{pmatrix}$$

en posant $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^\top$ et $m_k = (0, \dots, 0, -m_{k+1k}, \dots, -m_{nk})^\top$,
on obtient $M_k = I - m_k e_k^\top$ et on vérifie facilement que M_k est inversible et que
 $M_k^{-1} = I + m_k e_k^\top$.

On montre alors que :

$$\text{Etape 1 : } A^{(1)} = M_1 A^{(0)}$$

$$\text{Etape k : } A^{(k)} = M_k A^{(k-1)} = M_k M_{k-1} \cdots M_2 M_1 A^{(0)}$$

$$\text{Etape n-1 : } U = A^{(n-1)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A^{(0)}$$

Remarque 1.1.1. :

Le procédé suppose que tous les $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Si à une étape k on a $a_{kk}^{(k-1)} = 0$
et s'il ya au moins un des $a_{ik}^{(k-1)} \neq 0$ ($i = k+1, \dots, n$) on permute les lignes k et i
et on continue, sinon ça voudrait dire que la matrice A n'est pas inversible.

En utilisant la méthode de Gauss sans pivot, le nombre d'opérations nécessaires
au calcul de la solution de $AX = B$ est égal à : $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$
dont $\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ additions, $\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ multiplications
et $\frac{n(n+1)}{2}$ divisions.

La méthode de Cramer nécessite environ $n(n+1)!$ opérations.
Par exemple

N	4	4	10
Gauss	62	115	805
Cramer	480	3600	399168000

Méthode de Gauss avec pivot

Exemple 1.1.2. Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

La solution théorique est $x_1 = x_2 = 1/(1 + 10^{-10}) \simeq 1$. Cependant, la résolution du système par la méthode de Gauss donne des résultats différents selon qu'on l'applique avec ou sans pivot.

i) Si on applique la méthode de Gauss sans pivot on obtient

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10}$$

et

$$(S_2) \begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 = 0 \\ (-1 - 10^{10})x_2 = 10^{-10} \end{cases}$$

qui donne pour solution approchée $x_1 \simeq 1$ et $x_2 \simeq 0$.

ii) Si on adopte la stratégie du pivot partiel qui consiste à mettre en première ligne celle dont le coefficient de x_1 est le plus grand en module alors on permute les lignes pour obtenir le système

$$(S_1) \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 10^{-10}x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Pour lequel $m_{21} = \frac{10^{-10}}{1} = 10^{-10}$ et qui conduit à la solution approchée : $x_2 \simeq 1$ et $x_1 = x_2$.

La méthode de Gauss avec pivot consiste à choisir à l'étape k : $a_{kk}^{(k-1)}$ tel que

$$|a_{kk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

1.1.3 Factorisation LU

Théorème 1.1.1. :

Si tous les $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ alors la matrice A peut-être décomposée sous la forme $A = LU$

où $U = A^{(n-1)}$ est une matrice triangulaire supérieure

et $L = M_1^{-1}M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure

Preuve :

1. M_k est inversible car $\det M_k = 1$ pour $k = 1, \dots, n-1$
2. M_k^{-1} est de la forme de M_k en changeant les termes $-m_{ik}$ en m_{ik} , $i = k+1, \dots, n$
3. $(M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$
4. Le produit $M_1^{-1}M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure

$$5. L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & -m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.1.2 (Condition suffisante de la factorisation LU).

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que toutes les sous-matrices d'ordre k ($k \leq n$) soient inversibles, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L avec $l_{ii} = 1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. De plus, cette factorisation est unique.

Preuve :

Si $a_{11} \neq 0$, la matrice a_{11} (d'ordre 1) est inversible, donc on peut choisir la matrice de permutation égale à l'identité et appliquer la méthode de Gauss sans pivot à la première étape. Supposons qu'on ait pu choisir toutes les matrices de permutation égales à l'identité jusqu'à l'étape k , il s'ensuit que

$$A^{(k)} = M_{k-1}M_{k-2} \cdots M_1 A = \prod_{i=k-1}^{i=1} M_i A.$$

Avec

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_{kk}^{(k)} & & a_{kn}^{(k)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & ** & \ddots & & & \\ & ** & * & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & ** & * & \ddots & \cdots & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ a_{k1}^{(k)} & \boxed{B_k} & a_{kk}^{(k)} & a_{k1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{array} \right)$$

en écrivant A sous forme de blocs et en effectuant le produit matriciel par blocs, on obtient $a_{11}^{(1)} \times \cdots \times a_{kk}^{(k)} = \det(B_k)$.

Comme $\det(B_k) \neq 0$ on a $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ et par suite on peut choisir $a_{kk}^{(k)}$ comme pivot et poursuivre le procédé.

Unicité

Supposons qu'il existe L_1, L_2, U_1 et U_2 telles que $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$, comme L_2 et U_1 sont inversibles alors $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$.

Ce qui impose $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I$ et donc $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Exemple 1.1.3. Résoudre (S') :
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

on a $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow M_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $U = M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $L = M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Résoudre $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$ qu'on résout en 2 étapes :

1. $LY = B$ donne $y_1 = 2$; $y_2 = 6 + 3y_1 = 12$ et $y_3 = 4 - y_1 - y_2 = -10$

2. $UX = Y$ donne $x_3 = \frac{-10}{-5} = 2$; $x_2 = \frac{12 - 14}{2} = -1$; $x_1 = -(2 - 4 + 1) = 1$

1.1.4 Factorisation de Choleski (matrice symétrique)

Théorème 1.1.3. Si A est une matrice symétrique, définie positive, il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que $A = LL^\top$.

Si de plus on impose aux éléments diagonaux de L d'être strictement positifs, alors la factorisation est unique.

Preuve :

Remarquons d'abord que si A est définie positive, alors toutes les sous-matrices d'ordre k sont inversibles. Le théorème 1.1.2 permet d'affirmer l'existence de deux matrices L et U telles que $A = LU$. Ce que nous cherchons ici c'est de factoriser en utilisant une seule matrice L . Raisonnons par récurrence sur n .

Si $k = 1$, $A = a_{11} > 0$ donc $a_{11} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{11}}$.

Supposons qu'on ait pu factoriser jusqu'à l'ordre $k - 1$ et soit A_k une matrice d'ordre k alors A_k peut s'écrire :

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & v \\ \hline v^\top & a_{kk} \end{array} \right) \quad \text{avec } A_{k-1} = L_{k-1} L_{k-1}^\top.$$

Considérons alors la matrice L_k obtenue à partir de L_{k-1} et telle que :

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} & l \\ \hline l^\top & l_{kk} \end{array} \right)$$

Le produit matriciel $L_k L_k^\top$ donne :

$$L_k L_k^\top = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} L_{k-1}^\top & L_{k-1} l \\ \hline l^\top L_{k-1} & l^\top l + l_{kk}^2 \end{array} \right)$$

Par identification on obtient :

$$L_{k-1} l = v \quad (1.1.1)$$

$$L_{k-1} L_{k-1}^\top = A_{k-1} \quad (1.1.2)$$

$$l^\top l + l_{kk}^2 = a_{kk} \quad (1.1.3)$$

i) L'équation (1.1.1) permet alors de résoudre un système et d'obtenir la solution qui est le vecteur l .

ii) L'équation (1.1.3) permet d'obtenir la dernière inconnue du problème, à savoir

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l^\top l} \text{ et on peut choisir } l_{kk} > 0.$$

Exemple 1.1.4. Soit A la matrice de Hilbert d'ordre 6, la factorisation de Choleski

est donnée par $A = LL^\top$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 & 0.25 & 0.2 & 0.16 \\ 0 & 0.28 & 0.28 & 0.25 & 0.23 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.07 & 0.11 & 0.12 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.03 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0012 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.2. L'implémentation de l'algorithme Choleski est donnée par la fonction Matlab `choleski`

1.1.5 Factorisation de Householder (matrice unitaire)

Soit $P_0 = I - 2\omega_0\omega_0^\top$ une matrice élémentaire de Householder avec

$$\omega_0^\top \omega_0 = 1. \quad (1.1.4)$$

On cherche une matrice unitaire P_0 telle que

$$P_0 a = k e_1, \quad (1.1.5)$$

pour tout vecteur $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$.

P_0 est orthogonale c'est à dire $P_0^\top P_0 = I$ et par suite, on doit avoir

$$(a^\top P_0^\top) (P_0 a) = k^2 = a^\top a.$$

Soit $k = \pm (a^\top a)^{1/2}$, les équations (1.1.4) et (1.1.5) donnent :

$P_0 a = a - 2\omega_0\omega_0^\top a = k e_1$ et par suite $2\omega_0\omega_0^\top a = -k e_1 + a = v$, si on pose $\alpha = 2\omega_0^\top a$.

On obtient $\alpha\omega_0 = v$, et comme on cherche ω_0 tel que $\omega_0^\top \omega_0 = 1$, il vient : $\alpha^2 = v^\top v$.

Par suite $P_0 = I - \frac{2}{\alpha^2} v v^\top = I - 2 \frac{v v^\top}{v^\top v}$.

Remarques 1.1.2. i) Le choix de k se fait au signe près, on peut choisir le signe +.

ii) Le même procédé peut être appliqué pour obtenir une matrice

$$P_k = I_k - 2\omega_k\omega_k^\top \text{ avec } \omega_k = (0, \dots, 0, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)^\top.$$

On a constaté que P_k peut être décomposée sous la forme

$$P_k = \left(\begin{array}{c|c} I_k & \\ \hline & \hat{P}_k \end{array} \right) \text{ avec } \hat{P}_k = I_{n-k} - 2\hat{\omega}_k\hat{\omega}_k^\top \text{ (voir paragraphe ??).}$$

iii) La factorisation de Householder permet d'écrire :

$$P_{n-2} P_{n-3} \cdots P_1 P_0 A = U,$$

ou encore $A = QU$ avec $Q = P_0 P_1 \cdots P_{n-2}$ une matrice orthogonale.

1.2 Méthodes indirectes de résolution de $AX=B$

1.2.1 Quelques rappels sur les matrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée.

1. A est dite à diagonale strictement dominante en colonnes si elle vérifie :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{i=n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, 1 \leq j \leq n$$

2. A est dite à diagonale strictement dominante en lignes si elle vérifie :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, 1 \leq i \leq n$$

3. Une norme matricielle $\|\cdot\|$ vérifie les 4 propriétés suivantes :

i) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

4. $(I + B)$ est inversible si $\|B\| < 1$ et de plus $\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$

5. $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}|$; $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{i=n} |a_{ij}|$
 $\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j(A)|$ est dite norme spectrale ($\lambda_i(A)$: valeur propre de A)

1.2.2 Méthodes classiques (Jacobi, Gauss Seidel, Relaxation)

Pour résoudre le système

$$Ax = b, \quad (1.2.1)$$

on utilise des méthodes, dites indirectes, du type

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C \quad (1.2.2)$$

où T est une matrice obtenue à partir de A et c un vecteur dépendant de A et B

On écrit A sous la forme $A = M - N$

En supposant M inversible, l'équation (1.2.1) donne : $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

et ceci suggère le procédé itératif du type (1.2.2) avec $T = M^{-1}N$ et $C = M^{-1}b$

Il ya plusieurs façons d'écrire A sous la forme $A = M - N$

Dans le cadre de ce cours on se limitera aux cas les plus utilisés à partir de : $A = D - L - U$

- Méthode de Jacobi : $M = D, N = L + U$.
- Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - L, N = U$.
- Méthode de relaxation : $A = A(\omega) = M(\omega) - N(\omega)$, avec $M(\omega) = \frac{1}{\omega}D - L$,
 $N(\omega) = \frac{1 - \omega}{\omega}D - U$ où ω est un scalaire.

Définition 1.2.1. :

Une méthode de type (1.2.2) est dite convergente si pour tout $\mathbf{x}^{(0)}$ initial on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

Si une telle limite existe, alors elle vérifie :

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

Définition 1.2.2. :

On appelle erreur de la méthode (à la k^{ieme} itération) la quantité :

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$$

Avec $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}$ on obtient $\mathbf{e}^{(k)} = T^k \mathbf{e}^{(0)}$

la méthode est convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$

Méthode de Jacobi :

Si $A = (a_{ij})$ la méthode de Jacobi consiste à choisir ; $M = D = \text{diag}(a_{ii})$ et $N = L + U = (-a_{ij})_{i \neq j}$ le schéma itératif est comme suit :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = T_J \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

La matrice $T_J = D^{-1}(L + U)$ est dite matrice de Jacobi associée à A

Si $\mathbf{x}^{(0)}$ est le vecteur initial donné, l'algorithme de Jacobi est de la forme :

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}; i = 1, \dots, n$$

Explicitement, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que la méthode de Jacobi converge est :

$$\rho(T_J) < 1 \quad \text{ou} \quad \|T_J\|_{\infty} < 1$$

Méthode de Gauss-Seidel :

Pour cette méthode, les matrices M et N sont données par : $M = D - L$ (supposé inversible) et $N = U$ où D, L et U proviennent de l'écriture $A = D - L - U$, le schéma itératif est comme suit :

$$(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b \quad (1.2.3)$$

ou encore

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b \quad (1.2.4)$$

en explicitant (1.2.3) on obtient :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} &= -a_{i1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n \end{aligned}$$

La matrice $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$ est dite matrice de Gauss-Seidel associée à A

Théorème 1.2.1. :

Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors la méthode de Jacobi converge

Preuve :

Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors on a : $\sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$, $1 \leq i \leq n$ (*)

ou encore : $\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < 1$, $1 \leq i \leq n$

Par ailleurs $T_J = D^{-1}(L + U) = (t_{ij})$ avec $t_{ij} = (\frac{-a_{ij}}{a_{ii}})$ si $i \neq j$ et $t_{ii} = 0$

$$\|T_J\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |t_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < 1$$

Exercice :

Montrer un résultat analogue avec preuve similaire si A est strictement dominante en colonnes

Théorème 1.2.2. :

Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors la méthode de Gauss-Seidel converge

Preuve :

on montre que $\|T_{GS}\|_{\infty} = \|(D - L)^{-1}U\|_{\infty} < 1$ en passant par :

$$\|T\|_{\infty} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|T\mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}$$

On pose $\mathbf{y} = T\mathbf{x} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}$

qui donne $(D - L)\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ et $D\mathbf{y} = L\mathbf{y} + U\mathbf{x}$ ou encore $\mathbf{y} = D^{-1}L\mathbf{y} + D^{-1}U\mathbf{x}$

Soit k l'indice tel que $|y_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|\mathbf{y}\|_{\infty} = \|T\mathbf{x}\|_{\infty}$

On a $y_k = \sum_{j=1}^{j=k-1} (D^{-1}L)_{kj}y_j + \sum_{j=k+1}^{j=n} (D^{-1}U)_{kj}x_j$

d'où $|y_k| \leq \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} \|\mathbf{y}\|_{\infty} + \sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} \|\mathbf{x}\|_{\infty}$

et : $(1 - \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}) \frac{\|\mathbf{y}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \leq \sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$

soit enfin : $\frac{\|\mathbf{y}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \leq \frac{\sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}}{(1 - \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|})} < 1$

Méthode de relaxation

Si on considère des matrices M et N dépendantes d'un paramètre ω on obtient :

$$A = M(\omega) - N(\omega)$$

$$\text{avec } M(\omega) = \frac{1}{\omega}D - L \text{ et } N(\omega) = \frac{1-\omega}{\omega}D + U$$

$$T(\omega) = (\frac{1}{\omega}D - L)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + U) \text{ et } c(\omega) = (\frac{1}{\omega}D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

$$T(\omega) = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)$$

Remarques 1.2.1. :

- Si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.
- Si $\omega > 1$, on parle de sur-relaxation.
- Si $\omega < 1$, on parle de sous-relaxation.

Théorème 1.2.3. :

Condition nécessaire de convergence de la méthode de relaxation : $0 < \omega < 2$

Preuve :

$$T(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} D - L \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right)$$

Si les valeurs propres de $T(\omega)$ sont notées $\lambda_i(\omega)$ on a :

$$\det(T(\omega)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\omega) = \frac{\det \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right)}{\det \left(\frac{1}{\omega} D - L \right)} = (1-\omega)^n.$$

D'où $\rho(T_\omega) \geq [|1-\omega|^n]^{1/n} = |1-\omega|$.

Pour que la méthode converge, il est nécessaire d'avoir $\rho(T(\omega)) < 1$ et par conséquent $|1-\omega| < 1$ d'où $\omega \in]0, 2[$.

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1. On note $e_k^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le transposé du k^{eme} vecteur canonique de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

et $m_k^T = (0, \dots, 0, -m_{k+1,k}, \dots, -m_{n,k})$; $m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$, $i = j, \dots$

1. Montrer que les matrices élémentaires de Gauss M_k peuvent s'écrire sous la forme $M_k = I + m_k e_k^T$
2. Vérifier que $M_k^{-1} = I - m_k e_k^T$
3. Montrer que :

$$(I + m_1 e_1^T) (I + m_2 e_2^T) \cdots (I + m_{n-1} e_{n-1}^T) = (I + m_1 e_1^T + m_2 e_2^T + \cdots + m_{n-1} e_{n-1}^T)$$

4. **Application :** On considère le système linéaire : $(S_1) : AX = B$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Donner les matrices de Gauss M_1 et M_2 qui permettent de transformer (S_1) en un système (S_2) de la forme $UX = D$ où U est triangulaire supérieure
- b) Vérifier que $M_k = I + m_k e_k^T$ pour $k = 1, 2$
- c) Vérifier que $M_1 M_2 = I + m_1 e_1^T + m_2 e_2^T$
- d) Dédurre M_1^{-1} , M_2^{-1} et $M_2^{-1} M_1^{-1}$
- e) Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure

f) Résoudre le système (S_1) par la méthode LU

Exercice 1.3.2. Soit L la matrice triangulaire inférieure d'ordre n donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la jème colonne de L^{-1} ,
2. Montrer que $\|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = n2^{n-1}$

Exercice 1.3.3. On cherche à résoudre le système $Ax = b$ par les méthodes directe et indirecte.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée vérifiant les conditions suivantes :

$$a_{ii} > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$a_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

Soit D la matrice diagonale ($d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

1. Montrer que la matrice A vérifie : $\sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad 1 \leq i \leq n$ (*)
2. Donner l'expression du terme général de la matrice $A^{(1)}$ obtenue après la première étape du procédé de d'élimination de Gauss sans pivot
3. Montrer que la matrice B d'ordre $(n - 1)$ obtenue à partir de $A^{(1)}$ en enlevant la première ligne et la première colonne vérifie une la relation similaire à (*)
4. Ecrire le schéma itératif de Jacobi $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$
(T étant la matrice de Jacobi associée à A)
5. Expliciter les composantes $x_j^{(k+1)}$ en fonction de celles de $x^{(k)}$ et de C
6. Montrer que la méthode de Jaobi converge ($\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| < 1$)
7. Application :

$$\text{On donne } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Donner la matrice T de Jacobi associée à A
- b) Calculer la 1^{ère} itération $x^{(1)}$ obtenue en utilisant la méthode de Jacobi

Exercice 1.3.4. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. A est écrite sous la forme $A = D - L - U$ où D est une matrice diagonale et L (respectivement U) est triangulaire inférieure (respectivement supérieure).

Pour résoudre le système $Ax = b$, on utilise la méthode itérative suivante :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = a_{ii}x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) + r \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(k+1)} \right),$$

où r et ω sont des réels fixés (ω non nul) et $k = 0, 1, \dots$

1. Montrer que la méthode proposée peut s'écrire sous la forme matricielle :
 $x^{(k+1)} = M(r, \omega)x^{(k)} + c$ avec : $M(r, \omega) = (D - rL)^{-1}(aD + bL + eU)$
où a, b et e sont des réels qu'on exprimera en fonction de r et/ou de ω .
2. Vérifier que cette méthode permet d'obtenir les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation pour des choix appropriés de r et ω .
3. Montrer que les valeurs propres de $M(r, \omega)$ sont les racines de l'équation :
 $\det(\alpha D - \beta L - \omega U) = 0$ avec $\alpha = \lambda + \omega - 1$ et $\beta = (\lambda - 1)r + \omega$.

Exercice 1.3.5. Soit A une matrice symétrique définie positive et T la matrice définie par : $T = 2D^{-1} - D^{-1}AD^{-1}$. On suppose que $2D - A$ est définie positive.

1. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée au système $Ax = b$ converge .
2. Soit la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(n+1)} = x^{(n)} + T \left(b - Ax^{(n)} \right) \end{cases}$$

Montrer que cette méthode converge et comparer sa vitesse de convergence à celle de la méthode de Jacobi.

Chapitre 2

Approximations des solutions de l'équation $f(x) = 0$

2.1 Rappels et notations

Définition 2.1.1. :

Soit k un réel strictement positif et g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction g est dite Lipschitzienne de rapport de k (encore dite k -Lipschitzienne) si pour tous x et y de $[a, b]$ on a : $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

Définition 2.1.2. :

Soit g une fonction k -Lipschitzienne sur $[a, b]$. La fonction g est dite contractante de rapport de contraction k si $k \in]0, 1[$.

Exemple 2.1.1. :

La fonction $g(x) = \sin(x)$ est Lipschitzienne de rapport $k = 1$

Exercice 2.1.1. :

Montrer que la fonction $g(x) = \frac{1}{3} \cos(x)$ est Lipschitzienne et déterminer le rapport k

Définition 2.1.3. :

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ la fonction g est dite uniformément continue sur $[a, b]$ si :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \eta \text{ tel que } \forall x \text{ et } y \text{ de } [a, b] \text{ vérifiant } |y - x| \leq \eta, \text{ on ait } |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque 2.1.1. :

Toute fonction Lipschitzienne sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Théorème 2.1.1 (des Valeurs Intermédiaires).

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Alors pour tout réel θ appartenant à $f([a, b])$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $\theta = f(c)$.

Si de plus f est strictement monotone alors le point c est unique.

Théorème 2.1.2 (des Valeurs Intermédiaires cas particulier $\theta = 0$).

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone alors le point c est unique.

Théorème 2.1.3 (de Rolle).

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Théorème 2.1.4 (des Accroissements Finis).

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c).$$

Théorème 2.1.5 (Formule de Taylor).

Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ dont la dérivée $f^{(n+1)}$ est définie sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \dots + \frac{1}{n!}(b - a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

Théorème 2.1.6 (Formule de MacLaurin).

Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I contenant 0 et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable à l'intérieur de I . Alors $\forall x \in I$, il existe un réel c strictement compris entre 0 et x tel que :

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{1}{2!}x^2 f^{(2)}(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n + 1)!}x^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

Définition 2.1.4. :

Soit θ un réel et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. θ est dit zéro de f si $f(\theta) = 0$.

Définition 2.1.5. :

Soit θ un réel et g une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. θ est dit point fixe de g si $g(\theta) = \theta$.

Lemme 2.1.1. :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors la recherche des zéros de f est équivalente à la recherche des points fixes de la fonction g définie sur I par : $g(x) = x - f(x)$

Preuve :

En effet, si $f(\theta) = 0$ alors $g(\theta) = \theta - f(\theta) = \theta$ et inversement, si $g(\theta) = \theta$ alors $f(\theta) = \theta - g(\theta) = \theta - \theta = 0$.

Lemme 2.1.2. :

Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. S'il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $|g'(x)| \leq k$ $\forall x \in [a, b]$ alors la fonction g est k -Lipschitzienne sur $[a, b]$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g sur $[x, y]$ avec $x \leq y$.

Donc il existe $c \in]x, y[$ tel que : $g(y) - g(x) = (y - x)g'(c)$ et comme on a : $|g'(c)| \leq k$, il s'ensuit que : $|g(y) - g(x)| \leq k|y - x|$

Définition 2.1.6. :

Soit (u_n) une suite admettant pour limite θ .

On appelle erreur de la n^{eme} étape le réel défini par $e_n = u_n - \theta$

Définition 2.1.7. :

On dit que la convergence de (u_n) vers θ est d'ordre p si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \text{ où } p \text{ et } C \text{ sont des réels } > 0$$

Si $p = 1$ (avec $C < 1$) la convergence est dite linéaire

Si $p = 2$ on dit que la convergence est quadratique.

Remarque 2.1.2. :

L'ordre de convergence p n'est pas nécessairement un entier.

Définition 2.1.8. :

On dira que le réel δ est une approximation du réel α avec la précision ε si :

$$|\alpha - \delta| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on dira que le terme u_{n_0} d'une suite (u_n) approche la limite θ avec précision ε si $|u_{n_0} - \theta| \leq \varepsilon$.

Exemple 2.1.2. :

la suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Si on veut une précision $\varepsilon = 10^{-1}$, il suffit de prendre n_0 tel que $\frac{1}{n_0} \leq 10^{-1}$ ou

encore $n_0 \geq 10$

mais si on exige une précision de 10^{-5} alors on doit prendre n_0 tel que $\frac{1}{n_0} \leq 10^{-5}$

c.a.d $n_0 \geq 10^5$

Remarque 2.1.3. :

Il est important de saisir la notion de vitesse de convergence. Par exemple, les suites $(\frac{1}{n}), (\frac{1}{n^2}), (\frac{1}{n^4})$ convergent vers zéro quand n tend vers l'infini mais la vitesse de convergence diffère d'une suite à l'autre.

Théorème 2.1.7. :

Soit g une fonction k -contractante sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$, et (u_n) la suite récurrente définie par :

$u_0 \in [a, b]$, u_0 donné et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \geq 0$

Alors :

1- la suite (u_n) converge vers un réel θ

2- la fonction g admet un point fixe unique

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|u_n - \theta| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$

Preuve :

Tout d'abord, comme $u_0 \in [a, b]$ et que $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$, on a $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ensuite, le fait que g soit une fonction k -contractante implique que :

$$|u_{n+1} - u_n| = |g(u_n) - g(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}| \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent on obtient :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0| \text{ pour tout } n \geq 0 \quad (2.1.1)$$

A l'aide de l'inégalité 2.1.1 on montre que la suite (u_n) vérifie :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{1-k} k^n |u_1 - u_0|$$

En effet : Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \dots + |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq k^{n+p-1} |u_1 - u_0| + k^{n+p-2} |u_1 - u_0| + \dots + k^{n+1} |u_1 - u_0| + k^n |u_1 - u_0| \\ &\leq \frac{1 - k^p}{1 - k} k^n |u_1 - u_0| \\ &\leq \frac{1}{1 - k} k^n |u_1 - u_0| \quad (2) \end{aligned}$$

L'inégalité (2) nous permet de prouver que la suite (u_n) est de Cauchy. En effet :
Comme $k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on

$$\text{ait : } k^n \leq \frac{1-k}{|u_1 - u_0|} \varepsilon \text{ et par suite : } \frac{1}{1-k} k^n |u_1 - u_0| \leq \varepsilon$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k^n \frac{1-k}{|u_1 - u_0|} \leq \varepsilon$$

La suite (u_n) est donc de Cauchy et par conséquent elle converge vers une limite θ .

Comme la fonction g est continue sur $[a, b]$, que $u_{n+1} = g(u_n)$ et que

$$u_n \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

alors on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \theta = g(\theta)$ c-a-d : θ est un point fixe de g

Unicité du point fixe :

Supposons que g admet un autre point fixe α différent de θ alors on a :

$$|g(\alpha) - g(\theta)| = |\alpha - \theta| \leq k|\alpha - \theta| \text{ ou encore } (1-k)|\alpha - \theta| \leq 0 \text{ mais comme } k < 1, \text{ alors } \alpha = \theta$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$, on obtient :

$$|\theta - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Théorème 2.1.8 (condition de convergence locale).

Soit g une fonction de classe C^1 au voisinage de θ . Si $g(\theta) = \theta$ et $|g'(\theta)| < 1$, alors il existe ε strictement positif tel que :

$\forall u_0 \in I_\varepsilon = [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$, la suite $(u_n) = (g(u_{n-1}))$ est définie et converge vers θ , l'unique solution de $g(x) = x$ dans I_ε .

Preuve :

Puisque g est de classe C^1 au voisinage de θ et que $|g'(\theta)| < 1$ on a : $|g'(x)| < 1 \quad \forall x$ au voisinage de θ .

Par conséquent, il existe ε strictement positif tel que :

$$\forall x \in I_\varepsilon, \quad |g'(x)| < 1$$

et puisque g' est continue sur le fermé borné I_ε ,

on déduit qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in I_\varepsilon, \quad |g'(x)| \leq k < 1$$

Pour appliquer le théorème, il suffit de vérifier que : $g(I_\varepsilon) \subset I_\varepsilon$.

Or, par application du théorème des accroissements finis on a :

$$\forall x \in I_\varepsilon, \quad |g(x) - \theta| \leq |x - \theta|$$

Remarque 2.1.4. :

- Si $|g'(\theta)| = 1$, la suite peut converger ou diverger
- Si $|g'(\theta)| \geq 1$ et si la suite possède une infinité de termes différents de θ , alors la suite ne peut converger.

En effet, si on suppose que la suite converge vers θ on obtient :

$u_{n+1} - \theta = (u_n - \theta)g'(c_n)$ avec c_n compris entre u_n et θ et de là on aboutit à une contradiction en supposant que u_n est assez proche de θ de telle sorte que :

$$|g'(c_n)| \geq 1 \implies |u_{n+1} - \theta| \geq |u_n - \theta|$$

Théorème 2.1.9. :

Si la suite récurrente définie par : $u_0 \in [a, b]$, u_0 donné et $u_{n+1} = g(u_n)$, $\forall n \geq 0$, converge linéairement vers θ et si g est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(\theta)|$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis :

$$|e_{n+1}| = |u_{n+1} - \theta| = |g(u_n) - g(\theta)| = |(u_n - \theta)g'(c_n)| \text{ et de là on obtient}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(c_n)| = |g'(\theta)|$$

Remarque :

On veut résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$. On constate qu'il existe plusieurs façon d'écrire cette équation sous la forme d'un problème de point fixe c'est-à-dire sous la forme $g(x) = x$. Par exemple on a les trois écritures suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\implies x^2 = 2x + 3 \\ &\implies x = g_1(x) = \pm \sqrt{2x + 3} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\implies 2x = x^2 - 3 \\ &\implies x = g_2(x) = \frac{x^2 - 3}{2} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\implies x^2 = 2x + 3 \\ &\implies x = g_3(x) = \frac{2x + 3}{x} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Les trois équations 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 admettent pour points fixes -1 et 3 . Pour la convergence locale ou globale il faut étudier $|g'_i(x)|$, $|g'_i(-1)|$ et $|g'_i(3)|$ $i = 1, 2, 3$

2.2 Méthode de Newton :

En prenant la fonction g définie par : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$,

on obtient le procédé de Newton donné par :

$$x_0 \text{ donné, } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ pour } n \geq 0 \text{ avec } f'(x_n) \neq 0$$

Théorème 2.2.1. :

Soit une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

- i) $f(a).f(b) < 0$
- ii) $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \neq 0$
- iii) f'' est de signe constant sur $[a, b]$ (convexité ou concavité)
- iv) $\frac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a$

Alors la méthode de Newton converge vers l'unique solution θ de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$ et ceci pour n'importe quel choix de $x_0 \in [a, b]$.

Preuve :

Considérons le cas $f(a).f(b) < 0, f'(x) < 0$ et $f''(x) < 0$

D'après i) et ii) , il existe une solution $\theta \in [a, b]$ qui vérifie :

$$x_{n+1} - \theta = x_n - \theta + \frac{f(\theta) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}(x_n - \theta)^2 \frac{f''(c)}{f'(x_n)} \text{ avec } x_n \leq c \leq \theta$$

Par conséquent, le signe de $x_{n+1} - \theta$ est celui de $f''(c)f'(x_n)$.

Si $f'(x) < 0$ et $f''(x) < 0$ alors $x_{n+1} \geq \theta$ pour tout $n \geq 0$, (x_n) est donc minorée par θ à partir de x_1

Pour montrer que la suite (x_n) est décroissante, on distingue deux cas :

1. Si $x_0 > \theta$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 0$
2. Si $x_0 < \theta$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 1$

Exemple 2.2.1. Considérons l'équation $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0, x > 0$ On a f une fonction strictement croissante (car $f' = 3x^2 + 8x > 0$ sur $]0, +\infty[$) et comme $f(1) = -5$ et $f(4) = 118$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires f admet une seule racine dans l'intervalle $[0; 4]$. Soit $x_0 = 3.9$. la solution est donnée par la figure (2.1) :

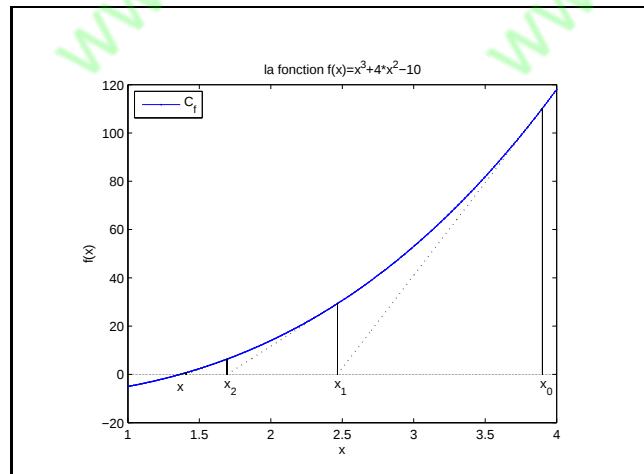


FIGURE 2.1 – la solution est $x = 1.3652$

2.3 Méthode de Newton modifiée :

En prenant la fonction g définie par : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$
on obtient la méthode de Newton modifiée comme suit :

x_0 donné, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$ pour $n \geq 0$

on montre alors que cette méthode est d'ordre 1.

Autres modifications de la méthode de Newton peuvent être obtenues en prenant $f'(x_{\sigma(n)})$ pour des valeurs intermédiaires.

2.4 Méthode de dichotomie :

Soit une f fonction définie continue sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) \leq 0$.

La fonction f admet donc au moins un zéro $\theta \in [a, b]$.

La méthode de dichotomie consiste à approcher θ par encadrement, en réduisant à chaque étape la longueur de l'intervalle de moitié selon l'algorithme suivant :

Étape 1

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ on pose $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ puis on teste si $c_0 = \theta$ c'est terminé, sinon :

Si $f(a_0)f(c_0) < 0$ alors $\theta \in [a_0, c_0]$ on pose alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$

puis $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

Si $f(b_0)f(c_0) < 0$ alors $\theta \in [c_0, b_0]$ on pose alors $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$

puis $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

Après cette étape la longueur de $[a_1, b_1]$ est égale à $\frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b - a}{2}$

Etape 2

on recommence le procédé de l'étape 1.

Etape k

A chaque étape k du procédé, soit on tombe sur un $c_k = \theta$ soit on diminue la longueur de l'intervalle de moitié.

Théorème 2.4.1. :

Les a_k , b_k et c_k satisfont les propriétés suivantes :

- 1- $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$
- 2- $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$
- 3- La suite (c_k) converge vers θ
- 4- $|c_k - \theta| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}$

Preuve :

1- Pour $k \geq 0$ on a $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$ ou $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$

Donc $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$

2- On a par construction $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$, montrons par récurrence que :

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

Pour $k = 0$ la relation est vérifiée

Si on suppose que la relation est vraie à l'ordre k ($b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$) alors on a :

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2} \frac{b - a}{2^k} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

3- Par construction $\theta \in [a_k, b_k]$ et $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ est le milieu de $[a_k, b_k]$

$$\text{Donc } |c_k - \theta| \leq \frac{b_k - a_k}{2} \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

En d'autres termes, on a : $\theta - \frac{b - a}{2^{k+1}} \leq c_k \leq \theta + \frac{b - a}{2^{k+1}}$

et comme $\frac{b - a}{2^{k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \theta$

Remarque 2.4.1. Le théorème précédent permet de calculer à l'avance le nombre maximal $n \in \mathbb{N}$ d'itérations assurant la précision ε , en effet

Pour que c_n vérifie $|c_n - \theta| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$ à la $n^{\text{ème}}$ itération, il suffit que n vérifie : $\frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

On a alors :

$$|c_n - \theta| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } \frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \iff \frac{b - a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1} \iff \log\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right) \leq (n + 1) \log(2)$$

$$\iff \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} - 1 \leq n$$

Exemple 2.4.1. Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. On vérifie graphiquement que f admet une racine réelle dans l'intervalle $[1; 2]$ et que la méthode de dichotomie est applicable (voir figure (2.2)).

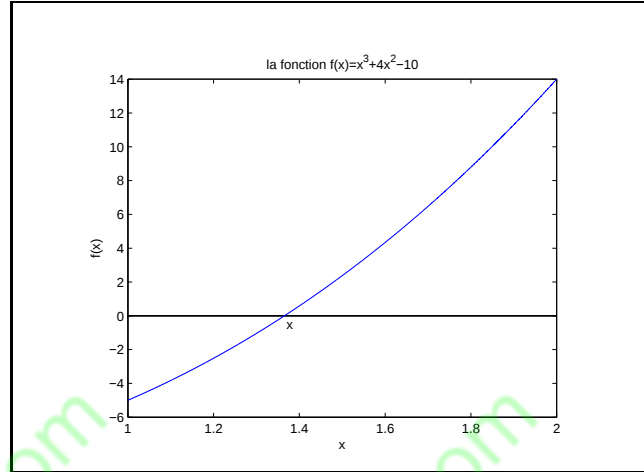


FIGURE 2.2 – $f(1) \cdot f(2) < 0$

Pour trouver une approximation de cette racine on peut utiliser la méthode de dichotomie avec une précision $= 10^{-10}$

on a les résultats suivants : n (numérique) = 33 n (théorique) = 32.219281
 $x = 1.3652300134$ $f(x) = -2.378897e - 011$

2.5 Méthode de fausse position (Regula Falsi) :

Au lieu de prendre à chaque étape c_k qui est le milieu de l'intervalle $[a_k, b_k]$, la méthode de fausse position prend le point d'intersection de l'axe des abscisses avec la droite passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$.

L'équation de cette droite est donnée par :

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Elle coupe l'axe des abscisses au point : $M_k(c_k, 0)$ où : $c_k = a_k + f(a_k) \frac{a_k - b_k}{f(a_k) - f(b_k)}$

En suite on procède comme dans le cas de dichotomie en testant :

Si $f(a_k)f(c_k) < 0$ alors $\theta \in [a_k, c_k]$ on pose alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$

Si $f(b_k)f(c_k) < 0$ alors $\theta \in [c_k, b_k]$ on pose alors $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

puis on cherche à nouveau la droite passant par $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$ et $(b_{k+1}, f(b_{k+1}))$

Exemple 2.5.1. :

Considérons l'équation $f(x) = x^3 - 20 = 0$ comme $f(0.75) = -19,578125$ et $f(4.5) = 71,125$ alors $f(0.75).f(4.5) < 0$ donc on peut appliquer le méthode de fausse position (Regula Falsi) dans l'intervalle $[0.75; 4.5]$. La solution est donnée par la figure (2.3) :

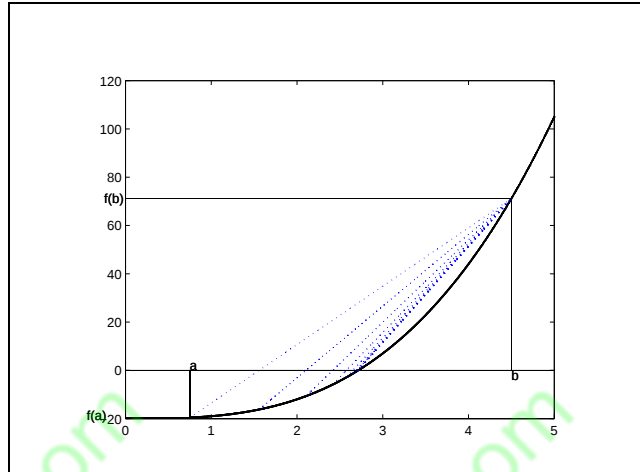


FIGURE 2.3 – $x = 2.7133$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. Considérons la suite récurrente (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = h(u_n) \forall n \geq 0$ où h est donnée par l'équation logistique $h(x) = rx(1 - x)$

1. Montrer que si $r \in]0, 4]$ alors $0 < u_n \leq 1 \forall n \geq 1$
2. vérifier que 0 est un point fixe trivial de h et trouver l'autre point fixe θ
3. A quelles conditions sur r la suite (u_n) converge-t-elle vers les points fixes 0 et θ ?

Exercice 2.6.2. Soient g_1, g_2, g_3 et g_4 les fonctions définies par :

$$g_1(x) = 2x - \sqrt{A}, g_2(x) = \frac{x(3A - x^2)}{2A}, g_3(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right) \text{ et } g_4(x) = \frac{3A}{8x} + \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{8A}$$

1. vérifier que les quatre fonctions admettent $\sqrt{A}$ comme point fixe
2. Ecrire les formules de Taylor à l'ordre 3 au point $\sqrt{A}$ pour les quatre fonctions

3. On considère les suites (x_n) , (y_n) , (u_n) et (v_n) définies par :

$x_{n+1} = g_1(x_n)$, $y_{n+1} = g_2(y_n)$, $u_{n+1} = g_3(u_n)$ et $v_{n+1} = h(v_n)$ puis on pose :

$$e_n = \sqrt{A} - x_n, \varepsilon_n = \sqrt{A} - y_n, d_n = \sqrt{A} - u_n \text{ et } \delta_n = \sqrt{A} - v_n$$

Trouver l'ordre de convergence et la constante d'erreur asymptotique dans chaque cas, c.a.d :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{p_1}} = C_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^{p_2}} = C_2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|d_{n+1}|}{|d_n|^{p_3}} = C_3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|^{p_4}} = C_4,$$

où p_i et C_i sont des constantes > 0

4. Conclure.

Exercice 2.6.3. Soit p un entier ≥ 2 et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$g(x) = Ax^{1-p} \text{ et } f(x) = x + \lambda(g(x) - x)$$

1. La suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge-t-elle vers $A^{1/p}$?
2. pour quelle valeurs de λ a-t-on convergence de l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ vers $A^{1/p}$?
3. Donner la valeur optimale de λ (c.a.d celle qui donne la convergence la plus rapide)
4. Comparer avec la méthode de Newton appliquée à la fonction $h(x) = x^p - A$

Exercice 2.6.4. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{4} \cos(x)$ et

$$f(x) = x - \frac{1}{4} \cos(x)$$

1. Montrer que la recherche des solutions de $f(x) = 0$ est équivalente à la recherche des points fixes de g , vérifier que de telles solutions existent et étudier l'unicité
2. Montrer que la suite récurrente définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = g(u_n) \forall n \geq 0$ est convergente
3. Cette convergence depend-elle du choix de u_0 ?

Exercice 2.6.5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que la fonction f admet un zéro θ dans $[0, 1]$
2. Ecrire la suite (x_n) obtenue à partir de la méthode de Newton
3. Etudier sur $[0, +\infty[$ le signe de la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3\theta x^2 - 1 - \theta$
4. On suppose que $x_0 \in [0, 1]$
 - i) Montrer que $x_n \in [\theta, 1]$ pour tout $n \geq 1$

- ii) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et conclure
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a : $0 < x_{n+1} - \theta < x_n - x_{n+1}$
6. En prenant $x_0 = 1$, donner une valeur approchée de θ avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$

Exercice 2.6.6. Soit θ un zéro d'ordre 1 de f , x_0 un réel différent de θ et a_n est une approximation de $f'(x_n)$

1. Considerons la méthode de Newton modifiée (M1) : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
 $\forall n \geq 0$
 Quel est l'ordre de cette méthode
2. Soit la méthode (M2) : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_n}$ pour $n \geq 0$
 Montrer que l'ordre de convergence est supérieur à 1 si $a_n \rightarrow f'(\theta)$ quand $n \rightarrow \infty$,
3. Si θ est un zéro d'ordre 2 de f et $f''(\theta) \neq 0$ quel est l'ordre de convergence de la méthode: (M3) $x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \geq 0$
4. Quelle méthode (M4) obtient-on en prenant dans (M2) $a_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$
5. Facultatif : on démontre que l'erreur de la méthode (M4) **vérifie** :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} = \frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)}$$
 et que l'ordre de convergence est $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

Exercice 2.6.7. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une fonction réciproque g .

On cherche un zéro θ de f en passant par g . ($f(\theta) = 0 \iff g(0) = \theta$)

1. Ecrire les dérivées premières et secondes de g
2. Soit $P(y)$ le polynôme de degré 1 vérifiant :
 $P(y_n) = g(y_n)$ et $P'(y_n) = g'(y_n)$
 - a) Exprimer $P(y)$ en fonction de $y, y_n, g(y_n)$ et $g'(y_n)$
 - b) Exprimer $P(y)$ en fonction de $y, x_n, f(x_n)$ et $f'(x_n)$
 - c) Quel procédé obtient-on en prenant $x_{n+1} = P(0)$
3. Soit $P(y)$ le polynôme de degré 1 vérifiant :
 $P(y_n) = g(y_n)$ et $P(y_{n-1}) = g(y_{n-1})$
 - a) Exprimer $P(y)$ en fonction de $y, y_n, g(y_n)$ et $g(y_{n-1})$

- b) Exprimer $P(y)$ en fonction de $y, x_{n-1}, x_n, f(x_{n-1})$ et $f(x_n)$
- c) Quel procédé obtient-on en prenant $x_{n+1} = P(0)$
4. Soit $P(y)$ le polynôme de degré 2 vérifiant :
- $$P(y_n) = g(y_n), P'(y_n) = g'(y_n) \text{ et } P''(y_n) = g''(y_n)$$
- a) Exprimer $P(y)$ en fonction de $y, y_n, g(y_n), g'(y_n)$ et $g''(y_n)$
- b) En exprimant les dérivées de g en fonction de celles de f et en prenant
- $$x_{n+1} = P(0),$$
- Montrer qu'on obtient le procédé (de Tchebychev) suivant :
- $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3} \text{ avec } f'(x_n) \neq 0$$
5. Facultatif : On montre que la méthode de Tchebychev est d'ordre 3

Chapitre 3

Introduction à l'interpolation

3.1 Rappel et définitions

Soit $\mathbb{P}_n(x)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On rappelle que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n(x)$ ($\dim \mathbb{P}_n(x) = n + 1$)

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$, $x_1, \dots, x_n$ n points de $[a, b]$ et $g_1, \dots, g_n$ des réels de même signe.

Alors on a : $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)g_i = f(c) \sum_{i=1}^{i=n} g_i$ où $c \in [a, b]$

Définition 3.1.1. : Interpolant

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant $n + 1$ points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$. Soit P_n un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

On dit que P_n est un interpolant de f ou interpole f en $x_0, x_1, \dots, x_n$ si :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

3.2 Interpolant de Lagrange

Définition 3.2.1. : Polynômes de Lagrange

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(n + 1)$ points deux à deux distincts d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$

On appelle interpolants de Lagrange les polynômes L_i définis pour $i = 0, \dots, n$ par :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

On a en particulier :

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_n(x) = \prod_{j=0}^{j=n-1} \frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_i)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Si on prend $P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n)$

alors : $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$

Exemple 3.2.1. :

Si $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$,

$f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, on obtient

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{-(-1)(-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\ &= 2\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)(x-1)}{-1} - \frac{(x+1)x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$P_2(x_0) = P_2(-1) = \frac{(-)(-1-1)}{2} = 2 = f(x_0)$$

$$P_2(x_1) = P_2(0) = \frac{(1)(-1)}{-1} = 1 = f(x_1)$$

$$P_2(x_2) = P_2(1) = -\frac{(1+1)1}{2} = -1 = f(x_2)$$

Propriétés 3.2.1. :

Les polynômes de Lagrange ont les propriétés suivantes :

P1) $L_j(x)$ est un polynôme de degré n ; $\forall j = 0, \dots, n$

P2) $L_j(x_j) = 1$ $\forall j = 0, \dots, n$ et $L_j(x_i) = 0$ pour tout $j \neq i$

P3) la famille $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$ est une base de $\mathbb{P}_n(x)$

Preuve :

P1) Par définition $L_j(x)$ est un polynôme de degré n

P2) Cette propriété est aisément vérifiée en remplaçant x par x_i dans $L_j(x)$

P3) On a : $\text{card} \{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\} = \dim \mathbb{P}_n(x) = n+1$

Pour montrer P3), il suffit donc de montrer que $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$ est un système libre.

Soient $C_0, C_1, \dots, C_n$ des constantes telles que :

$$C_1 L_0(x) + L_1 L_1(x) + \dots + C_n L_n(x) = 0$$

Alors, en prenant successivement $x = x_0 \dots x_i \dots x_n$ et en utilisant $L_j(x_i) = \delta_{ij}$

on déduit que : $C_0 = C_1 = \dots = C_n = 0$

La famille $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$ est libre et par conséquent c'est une base de $\mathbb{P}_n(x)$.

3.3 Interpolant de Newton

Définition 3.3.1. : Differences divisées

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$ contenant $n + 1$ points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$.

On définit les différences divisées d'ordre i de f aux points (x_k) comme suit :

$$[f(x_0)] = f(x_0)$$

$$[f(x_0), f(x_1)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_i)] = \frac{[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i)] - [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{i-1})]}{x_i - x_0} \text{ pour } i \geq 2$$

Exemple 3.3.1. :

Si $x_0 = -1, x_1 = 0$ et $x_2 = 1, f(x_0) = 2, f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$, on obtient

$$[f(-1)] = 2$$

$$[f(-1), f(0)] = \frac{1 - 2}{0 - (-1)} = -1$$

$$[f(0)] = 1$$

$$[f(-1), f(0), f(1)] = \frac{-2 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$[f(0), f(1)] = \frac{-1 - 1}{1 - 0} = -2$$

$$[f(1)] = -1$$

Propriétés 3.3.1. :

La valeur d'une différence divisée est indépendante de l'ordre des x_i

On a ainsi :

$$[f(x_0), f(x_1)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = [f(x_1), f(x_0)]$$

$$\begin{aligned} [f(x_0), f(x_1), f(x_2)] &= \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= [f(x_2), f(x_1), f(x_0)] = [f(x_1), f(x_0), f(x_2)] \end{aligned}$$

et de façon générale :

$$[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)] = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}$$

Définition 3.3.2. : Interpolant de Newton :

On appelle interpolant de Newton le polynôme P_n donné par :

$$P_n(x) = f(x_0) + [f(x_0), f(x_1)](x - x_0) + \dots + [f(x_0), \dots, f(x_n)](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Exemple 3.3.2. :

Si $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, on obtient

$$[f(-1)] = 2$$

$$[f(-1), f(0)] = \frac{1 - 2}{0 - (-1)} = -1$$

$$[f(0)] = 1$$

$$[f(-1), f(0), f(1)] = \frac{-2 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$[f(0), f(1)] = \frac{-1 - 1}{1 - 0} = -2$$

$$[f(1)] = -1$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + [f(x_0), f(x_1)](x - x_0) + [f(x_0), f(x_1), f(x_2)](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 2 - 1(x - x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1) = 2 - (x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)(x) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Définition 3.3.3. : Base de Newton

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n + 1$) points deux à deux distincts d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et les polynômes N_i définis pour $i = 0, \dots, n$ par :

$$N_0(x) = 1$$

$$N_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1}) \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

On a en particulier

$$N_1(x) = (x - x_0)$$

$$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Propriétés 3.3.2. :

Les polynômes N_i ont les propriétés suivantes :

P1) $N_i(x)$ est un polynôme de degré i

P2) Pour $i \geq 1$, $N_i(x)$ admet $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$ comme racines

P3) la famille $\{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$ est une base de $\mathbb{P}_n(x)$ dite base de Newton

Preuve :

P1) Propriété évidente d'après la définition de $N_i(x)$

P2) Propriété également évidente d'après la définition de $N_i(x)$

P3) On a : $\text{card} \{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\} = \dim \mathbb{P}_n(x) = n + 1$

Pour montrer P3), il suffit donc de montrer que $\{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$ est un système libre.

Soient $C_0, C_1, \dots, C_n$ des constantes telles que :

$$C_1 N_0(x) + C_1 N_1(x) + \dots + C_n N_1(x) = 0$$

$$\text{Posons } F(x) = C_1 N_0(x) + C_1 N_1(x) + \dots + C_n N_1(x) = 0$$

Comme les x_i sont supposés deux à deux distincts, on obtient successivement :

$$F(x_0) = C_0 N_0(x_0) = 0 \iff C_0 = 0$$

$$F(x_1) = C_1 N_1(x_0) = C_1(x_1 - x_0) = 0 \iff C_1 = 0$$

.....

$$F(x_n) = C_n N_n(x_n) = C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = 0 \iff C_n = 0$$

La famille $\{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$ est libre et par conséquent c'est une base de $\mathbb{P}_n(x)$.

Théorème 3.3.1. :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$.

Soit P_n un polynôme interpolant f en $(n + 1)$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$

Alors :

a) On peut exprimer $P_n(x)$ comme combinaison linéaire des N_i de la base de Newton :

$$P_n(x) = D_0 N_0(x) + D_1 N_1(x) + \dots + D_n N_1(x)$$

b) Les D_i sont des constantes qui peuvent être déterminées en solvant un système linéaire.

Preuve :

a) Puisque $P_n(x) \in \mathbb{P}_n(x)$ et que $B_N = \{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$ est une base de $\mathbb{P}_n(x)$,

on peut écrire $P_n(x)$ dans la base B_N

b) En écrivant $P_n(x) = D_0 N_0(x) + D_1 N_1(x) + \dots + D_n N_1(x)$ pour $x = x_i, 0 \leq i \leq n$ on obtient le système triangulaire inférieur suivant :

$$(S1) \begin{cases} P_n(x_0) = D_0 & = f(x_0) \\ P_n(x_1) = D_0 + N_1(x_1)D_1 & = f(x_1) \\ P_n(x_2) = D_0 + N_1(x_2)D_1 + N_2(x_2)D_2 & = f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ P_n(x_n) = D_0 + N_1(x_n)D_1 + \dots + N_2(x_n)D_n & = f(x_n) \end{cases}$$

Les D_i solutions du système (S1) sont données par :

$$D_0 = [f(x_0)] = f(x_0)$$

$$D_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{N_1(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = [f(x_0), f(x_1)]$$

$$D_i = \frac{[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i)] - [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{i-1})]}{x_i - x_0} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_i)]$$

pour $i \geq 2$

Exemple 3.3.3. :

Soit la fonction f telle que

X_k	0.15	2.30	3.15	4.85	6.25	7.95
$f(x)$	4.79867	4.49013	4.2243	3.47313	2.66674	1.51909

Donc Les Coefficients du polynôme d'interpolation de f dans la base de newton sont :

$$D_0 = 4.798670 \quad D_1 = -0.143507 \quad D_2 = -0.056411 \quad D_3 = 0.001229$$

$$D_4 = 0.000104 \quad D_5 = -0.000002$$

Et son graphe est donné par la figure (3.1)

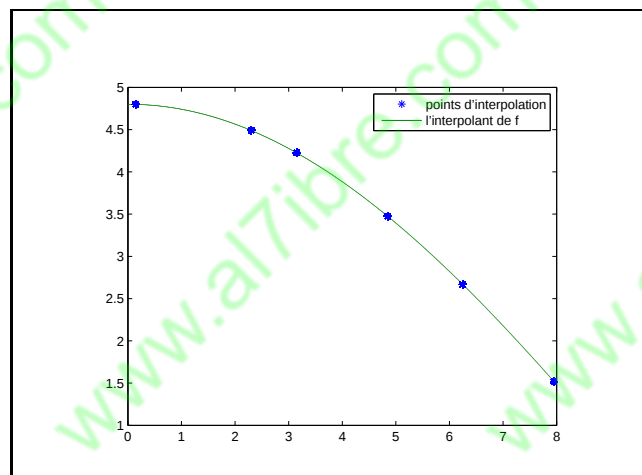


FIGURE 3.1 – Interpolation de Newton

3.4 Existence et Unicité de l'interpolant

Théorème 3.4.1. :

Il existe un polynôme P_n unique de degré $\leq n$, interpolant f en $(n + 1)$ points, c.a.d : tel que : $P_n(x_i) = f(x_i)$, $x_i = 0, 1, \dots, n$

Preuve :

i)Existence :

$$\text{Soit } L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } P_n(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n) \\ &= \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right\} f(x_i) \end{aligned}$$

Pour chaque $i = 0, \dots, n$, L_i est un polynôme de degré n vérifiant : $L_j(x_i) = \delta_{ij}$ et par conséquent on a :

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ii) Unicité :

Supposons qu'il existe deux polynômes différents P_n et Q_n de degré $\leq n$, interpolant f aux points x_i . Alors, en posant $D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$, on arrive à une contradiction.

En effet, D_n est un polynôme de degré $\leq n$ et par conséquent il peut avoir au plus n zéros mais d'un autre côté $D_n(x_i) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, ce qui voudrait dire que D_n aurait $(n+1)$ zéros d'où la contradiction.

Donc $P_n \equiv Q_n$

3.4.1 Interpolation linéaire

Dans ce cas, P_1 est un polynôme de degré 1 interpolant f aux points x_0 et x_1 on a donc $P_1(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ et les polynômes de Lagrange donnés par :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$\text{D'où : } P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}(x-x_0) + f(x_0) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

qui est bien la formule d'interpolation linéaire qu'on obtient en cherchant la droite passant par x_0 et x_1

De façon similaire on peut exprimer P_1 dans la base de Newton pour obtenir :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(x_0) + [f(x_0), f(x_1)](x-x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}(x-x_0) \end{aligned}$$

3.5 Erreur d'interpolation

Théorème 3.5.1. :

Soit le P_n le polynôme interpolant f aux points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Si $f \in C^{n+1}[a, b]$ alors :

a) $\forall x \in [a, b], \exists \theta = \theta(x) \in [a, b]$ tel que :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

$$\text{avec : } \Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

b) En posant $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$

on obtient :

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\Pi_{n+1}(x)|$$

et en particulier :

$$\max_{a \leq x \leq b} |e_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Preuve :

a)

Si $x = x_i$ le résultat est évident.

Si $x \neq x_i$, posons :

$$R(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)} \Pi_{n+1}(t)$$

On vérifie alors que $R \in C^{n+1}[a, b]$ et que :

$$R(x_i) = e_n(x_i) - e_n(x) \frac{\Pi_{n+1}(x_i)}{\Pi_{n+1}(x)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

et $R(x) = e_n(x) - e_n(x) = 0$

Par conséquent, R admet au moins $n+2$ zéros dans $[a, b]$ et par suite, en appliquant le théorème de Rolle de proche en proche, on montre qu'il existe un point $\theta \in [a, b]$ tel que : $R^{(n+1)}(\theta) = 0$. Le résultat annoncé en découle.

$$\text{b) } R^{(n+1)}(\theta) = 0 \Rightarrow e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow \max_{a \leq x \leq b} |e_n(x)| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Exercice 3.5.1. : Cas particulier : Points équidistants

Si les points sont équidistants et : $x_{i+1} - x_i = h \quad \forall i$, montrer que :

$$i) \text{ pour } n = 1 \text{ on a : } \max_{a \leq x \leq b} |e_1(x)| \leq \frac{h^2}{8} M_2$$

ii) pour $n = 3$ on a : $\max_{a \leq x \leq b} |e_3(x)| \leq \frac{h^4}{24} M_4$

Exemple 3.5.1. :

Construisons le graphe du polynôme d'interpolation de la fonction f dont on connaît les valeurs suivantes (voir figure (3.2)) :

X_k	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$	-1.5	0	0.25	0	0

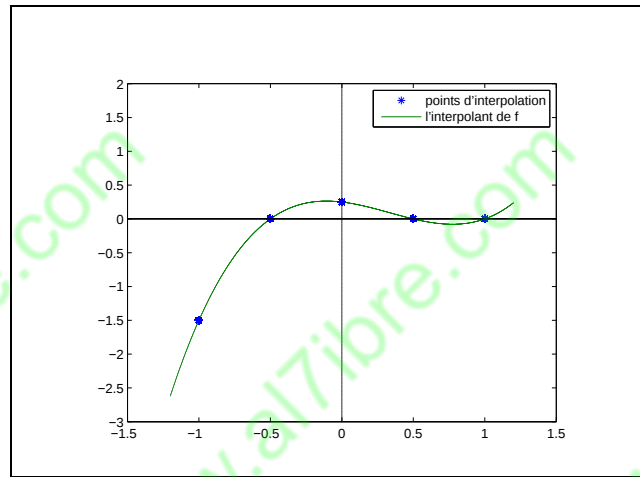


FIGURE 3.2 – Interpolation de Lagrange

On peut aussi calculer les coefficients de ce polynôme. Le polynôme qui interpole $f(x)$ est donc donné par :

$$P(x) = 0.000000x^4 + 1.000000x^3 + -1.000000x^2 + -0.250000x^1 + 0.250000$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. 1. Soit f est une fonction continue sur $[0, 3]$

- Ecrire le polynôme de Lagrange interpolant f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
- Ecrire le polynôme de Newton interpolant f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

2. On considère un point supplémentaire $x_3 = 3$
 - a) Ecrire le polynôme de Lagrange interpolant f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$
 - b) Ecrire le polynôme de Newton interpolant f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$
3. Comparer le temps de calcul entre 2.a) et 2.b)

Exercice 3.6.2. :

1. Calculer $I_1 = \int_0^1 t(t-1)dt$, $I_2 = \int_0^1 t(t - \frac{1}{2})dt$ et $I_3 = \int_0^1 t^2(t-1)^2dt$
2. En déduire que :
 - i) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)(x-\alpha)dx = (\beta-\alpha)^3 I_1$
 - ii) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x - \frac{\alpha+\beta}{2})dx = (\beta-\alpha)^3 I_2$,
 - iii) $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)^2(x-\alpha)^2dx = (\beta-\alpha)^5 I_3$
3. Montrer que si f est une fonction continue alors il existe $c \in [\alpha, \beta]$ tel que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)^2(x-\alpha)^2 f(x)dx = f(c) \frac{(\beta-\alpha)^5}{30}$$
4. Peut-on dire qu'il existe $d \in [\alpha, \beta]$ tel que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x - \frac{\alpha+\beta}{2}) f(x)dx = f(d) \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}?$$
5. Soit f est une fonction continue sur $[a, b]$ et soient α et β deux réels dans $[a, b]$
 On suppose $\alpha < \beta$ et on note $P_2(x)$ le polynôme interpolant f aux points : $\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}$ et β .
 Exprimer $P_2(x)$ dans la base de Newton puis calculer $\int_{\alpha}^{\beta} P_2(x)dx$

Chapitre 4

Intégration numérique

4.1 Introduction

Dans le calcul d'intégrales, on n'est pas toujours en mesure d'obtenir des expressions exactes. Il se peut que l'obtention d'une primitive soit impossible ou trop compliquée.

Pour pallier à ce problème, on cherche une approximation de l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par une somme de surfaces de rectangles, de trapèzes ou d'autres formes géométriques dont on sait calculer l'aire.

Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ de même longueur $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

On a donc : $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$

où $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$

Soit f_i la restriction de la fonction f à chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

En écrivant $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$,

on obtient alors des approximations de l'intégrale $I(f)$ en remplaçant $f_i(x)$ par une fonction $\Psi_i(x)$ facile à intégrer sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Si Ψ_i est la fonction constante λ_i sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ ($\Psi_i(x) = \lambda_i$)

on obtient une approximation par les sommes de Riemann :

$$I(f) \approx R^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i \text{ où } \lambda_i = f(x_i^*) \text{ avec } x_i^* \text{ quelconque dans } [x_i, x_{i+1}]$$

4.2 Approximation

Théorème 4.2.1. :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(f) = I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Preuve :

Remarquons d'abord que f est uniformément continue sur $[a, b]$ et par conséquent :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]$ vérifiant: $|x - y| \leq \eta$

on ait : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

et plus particulièrement on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [x_i, x_{i+1}]$ vérifiant: $|x - y| \leq \eta$

on ait : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

Montrons maintenant que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$

on ait : $|I(f) - R^n(f)| \leq \varepsilon$

Soit $n_0 > \frac{b-a}{\eta}$ alors pour tout $n \geq n_0$ on a : $h = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{n_0} < \eta$

Par ailleurs, pour $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ et tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on a : $|x - x_i^*| \leq h < \eta$ et ceci

implique que $|f(x) - f(x_i^*)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

et par suite :

$$\begin{aligned} |I(f) - R^n(f)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i^*)| dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon \end{aligned}$$

Cas particulier de sommes de Riemann

En particulier, sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on peut choisir x_i^* et prendre pour constante λ_i les valeurs $f(x_i^*)$ suivantes :

a) $x_i^* = x_i$ et $\lambda_i = f(x_i)$ donne $\int_a^b f(x) dx \approx I_g^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx$

(I_g^n , l'indice g pour signifier gauche)

b) $x_i^* = x_{i+1}$ et $\lambda_i = f(x_{i+1})$ donne $\int_a^b f(x) dx \approx I_d^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1}) dx$

(I_d^n , l'indice d pour signifier droit)

c) $x_i^* = \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ (milieu de $[x_i, x_{i+1}]$) et $\lambda_i = f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ donne $\int_a^b f(x) dx \approx$

$$I_m^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx$$

(I_m^n , l'indice m pour signifier moyen ou médian)

4.2.1 Approximation par des rectangles à gauche

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$
Si on prend $x_i^* = x_i$, on obtient une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit :
 $\int_a^b f(x)dx \approx I_g^n$ où :

$$I_g^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i^*) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Théorème 4.2.2. :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1) La suite (I_g^n) converge vers $I(f)$

2) Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $|I(f) - I_g^n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$

où $M_1 = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$.

Preuve :

1) analogue à celle du théorème 1

2) Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors : $\exists M_1 \geq 0$ tel que : $M_1 = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$

Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur $[x_i, x]$ où $x \in [x_i, x_{i+1}]$

donne : $\exists c_i \in]x_i, x[$ tel que $f(x) - f(x_i) = (x - x_i)f'(c_i)$

d'où : $|I(f) - I_g^n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(f(x) - f(x_i))| dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(x - x_i)f'(c_i)| dx$

soit encore :

$$\begin{aligned} |I(f) - I_g^n| &\leq M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx \\ &\leq M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} [(x - x_i)^2]_{x_i}^{x_{i+1}} = M_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} = M_1 (b-a) \frac{h}{2} = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

Corollaire 4.2.1. :

Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε , il suffit de prendre $I_g^{n_0}$

où l'indice n_0 est tel que : $M_1 \frac{(b-a)^2}{2n_0} \leq \varepsilon$ ou encore $n_0 \geq M_1 \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$

Exemple 4.2.1. :

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec la méthode des rectangles à gauche, avec les précision $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.05$

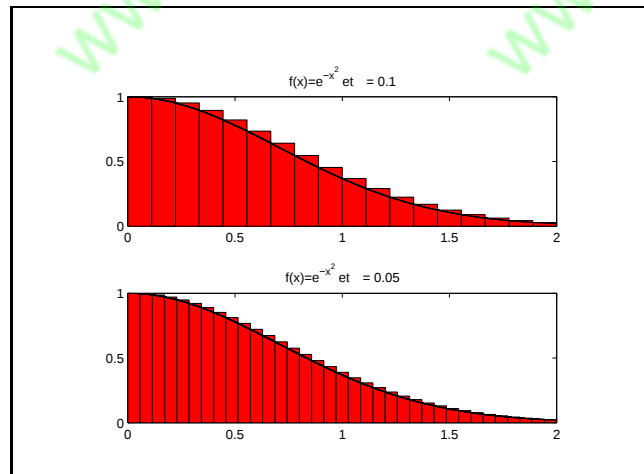


FIGURE 4.1 – Approximation par des rectangles à gauche

4.2.2 Approximation par des rectangles à droite

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$

Si on prend $x_i^* = x_{i+1}$, on obtient une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit :

$\int_a^b f(x)dx \approx I_d^n$ où :

$$I_d^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Théorème 4.2.3. :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1) La suite (I_d^n) converge vers $I(f)$

2) Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $|I(f) - I_d^n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$

où $M_1 = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$

Preuve : analogue à celle du théorème 2

Corollaire 4.2.2. Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε , il suffit

de prendre $I_d^{n_0}$ où l'indice n_0 est tel que : $M_1 \frac{(b-a)^2}{2n_0} \leq \varepsilon$ ou encore $n_0 \geq M_1 \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$

Exemple 4.2.2. :

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec la méthode des rectangles à droite, avec les précision $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.05$

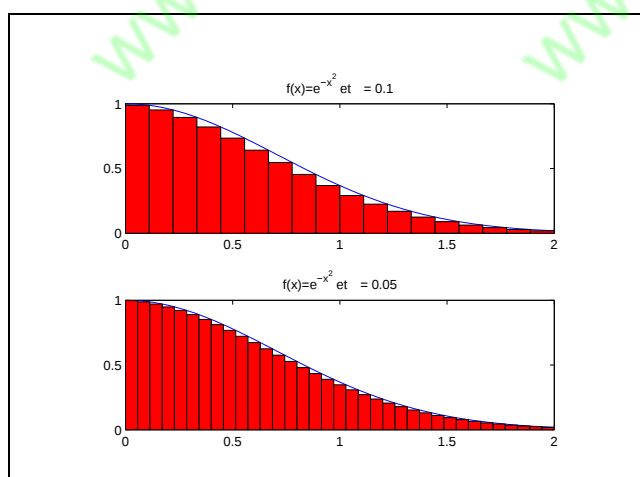


FIGURE 4.2 – Approximation par des rectangles à droite

4.2.3 Approximation par des rectangles médians

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$

Si on prend $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, on obtient une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit :

$\int_a^b f(x)dx \approx I_m^n$ où :

$$I_m^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Théorème 4.2.4. :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1) La suite (I_m^n) converge vers $I(f)$

2) Si la fonction f est de classe C^2 sur $[a, b]$ alors $|I(f) - I_m^n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \max_{a \leq t \leq b} |f''(t)|$

Preuve :

1) analogue à celle du théorème 2

2) Ici, au lieu du théorème des accroissements finis, on utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 sur l'intervalle $[\bar{x}_i, x]$ où $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ et $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

On obtient l'expression suivante :

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = (x - \bar{x}_i)f'(\bar{x}_i) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) \text{ avec } c_i \in [\bar{x}_i, x]$$

On a alors :

$$|I(f) - I_m^n| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\bar{x}_i)) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) dx \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} (x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) dx \right| \\
&\leq A + B \\
\text{où } A &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) dx \right| = |f'(\bar{x}_i)| \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) dx \right| = 0 \\
\text{et } B &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} (x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) dx \right| \leq \frac{1}{2} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3} [(x - \bar{x}_i)^3]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{6} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} 2 \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3 = M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}
\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.3. :

Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε , il suffit de prendre $I_m^{n_0}$

où l'indice n_0 est tel que : $M_2 \frac{(b-a)^3}{24n_0^2} \leq \varepsilon$ c-a-d $n_0^2 \geq M_2 \frac{(b-a)^2}{24\varepsilon}$

ou encore $n_0 \geq \sqrt{M_2 \frac{(b-a)^2}{24\varepsilon}}$

Exemple 4.2.3. :

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec la méthode des rectangles médians, avec les précision $\varepsilon = 0.01$ et $\varepsilon = 0.001$

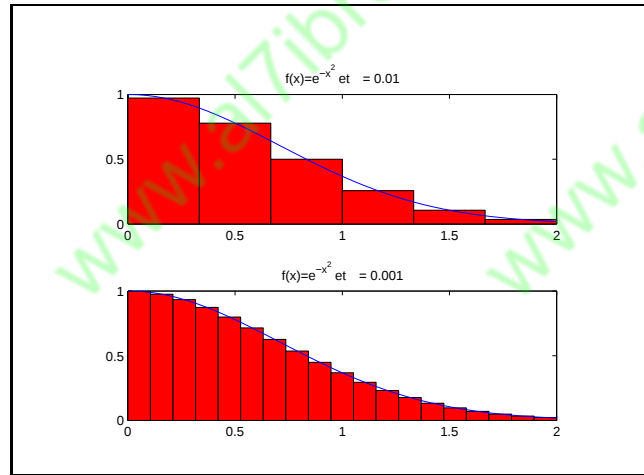


FIGURE 4.3 – Approximation par des rectangles médians

4.2.4 Approximations par des trapèzes

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$ une subdivision uniforme et $P_1(x)$ un polynôme de degré 1 interpolant f aux points x_i et x_{i+1} de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

$$[P_1(x_i) = f(x_i) \text{ et } P_1(x_{i+1}) = f(x_{i+1})]$$

En approchant sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $f(x)$ par $P_1(x)$ on obtient :

$$f(x) \simeq P_1(x) = f(x_i) + [f(x_i), f(x_{i+1})](x - x_i)$$

$$f(x) \simeq P_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

et en conséquences :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

4.2.5 Formule de Simpson

Soit $P_2(x)$ un polynôme de degré 2 vérifiant :

$$P_2(x_i) = f(x_i), P_2(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \text{ et } P_2(x_{i+2}) = f(x_{i+2})$$

En approchant sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+2}]$, $f(x)$ par $P_2(x)$ on obtient :

$$f(x) \simeq P_2(x)$$

$$\simeq f(x_i) + [f(x_i), f(x_{i+1})](x - x_i) + [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

et en conséquences :

$$I(f) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

Preuve :

$$\text{On a } \int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = I(P_2) + J(P_2) + K(P_2)$$

$$\text{où : } I(P_2) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_i) dx$$

$$J(P_2) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) dx$$

$$K(P_2) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})](x - x_i)(x - x_{i+1})dx$$

On fait le changement de variables suivant :

$$(x - x_i) = ht \rightarrow dx = hdt$$

quand $x = x_i \rightarrow t = 0$ et si $x = x_{i+2} \rightarrow t = 2$

d'où on obtient successivement :

$$I(P_2) = \int_0^2 f(x_i) hdt = 2hf(x_i)$$

$$J(P_2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_0^2 h^2 t dt$$

$$= h[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2$$

$$= 2h[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$K(P_2) = [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})] \int_0^2 (x - x_i)(x - x_{i+1})dx$$

$$= [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})] \int_0^2 h^3 t(t - 1)dt$$

$$= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^2$$

$$= [f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)] \frac{h}{3}$$

Soit enfin :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x) dx = I(P_2) + J(P_2) + K(P_2) = \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

4.3 Interpolation et Erreur d'intégration numérique

Définition 4.3.1. :

On appelle formule de quadrature de type interpolation la formule :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b P_n(x) dx$$

où P_n est le polynôme d'interpolation associé à f .

4.3.1 Interpolation linéaire et la formule du trapèze :

Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, une subdivision uniforme de $[a, b]$ et $f \in C^2([a, b])$

Considérons d'abord le sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, avec $h = x_{i+1} - x_i$,

Soit P_1 le polynôme de degré 1 interpolant f aux points x_i et x_{i+1}

Alors l'intégrale $I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ peut être approchée par :

$$I_i(f) \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

L'erreur commise par cette approximation étant donnée par :

$$E_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\theta_i) dx$$

$$\Pi_2(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \text{ garde un signe constant dans } [x_i, x_{i+1}]$$

d'où, en appliquant la formule de la moyenne :

$$E_i(f) = \frac{f''(\eta_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i); \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

4.3.2 Formule du trapèze composée

Pour chercher une approximation de l'intégrale sur tout l'intervalle $[a, b]$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \right] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \end{aligned}$$

avec $\eta \in [a, b]$

4.3.3 Erreur de la formule de Simpson

En posant : $e_2(x) = f(x) - P_2(x)$ et $E_2(f) = \int_a^b e_2(x)dx = \int_a^b [f(x) - P_2(x)]dx$
 On démontre que : $E_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\theta)$; $\theta \in [a, b]$

Exercice 4.3.1. :

Soit $f \in C^2([a, b])$

En posant $I_n = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + f(x_i)]$, montrer que :

- 1) $I^n = \frac{I_g^n + I_d^n}{2}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} I^n = I(f)$
- 3) $|I(f) - I^n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$

Exemple 4.3.1. :

On veut calculer une valeur approcher de $\ln 2$ pour cela on va calculer l'intégrale de la fonction $f(x)=1/(x+1)$ sur un intervalle $[0,1]$ par la méthode de Simpson la méthode des trapèzes, et la méthode des rectangles. Et on compare les résultats avec différentes valeurs de n (le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, 1]$) alors on a le tableau suivant :

n	méthode de Simpson	méthode des trapèzes	méthode des rectangles
100	0.69314718057947511	0.6931534304818241	0.69565343048182404
200	0.69314718056116631	0.69314874305506269	0.69439874305506266
400	0.69314718056002178	0.69314757118464021	0.69377257118464031
800	0.69314718055995039	0.69314727821617628	0.69345977821617644
1600	0.69314718055994573	0.69314720497400739	0.69330345497400736
3200	0.6931471805599464	0.69314718666346065	0.69322531166346069
6400	0.69314718055994629	0.69314718208582515	0.69318624458582534
12800	0.69314718055994318	0.69314718094141725	0.69316671219141723
25600	0.69314718055994495	0.69314718065531489	0.69315694628031488
51200	0.69314718055994629	0.6931471805837861	0.69315206339628599

TABLE 4.1 – $\ln(2) \simeq 0,69314718055994530941723212145818$

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1. :

Soit $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$ et $f \in C^2([a, b])$

1. En faisant deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f^{(2)}(x)dx$$

2. Si $x_{i+1} - x_i = h$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, montrer que l'erreur d'approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la méthode des trapèzes est de la forme : $-\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\theta)$, $\theta \in [x_i, x_{i+1}]$

Exercice 4.4.2. Soit P_3 un polynôme de degré 3 et $f \in C^2([a, b])$ avec $f^{(2)} < 0$, Soit $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ et I_n^T l'approximation de $I(f)$ par la méthode des trapèzes, Soit I_m^n (resp. I_g^n) l'approximation de $I(f)$ par la méthode des triangles droits (resp. gauches)

1. Ecrire les expressions de I_g^n , I_m^n et I_n^T

2. Montrer que $I_n^T = \frac{I_g^n + I_d^n}{2}$

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^T = I(f)$

4. Prouver que $|I(f) - I_n^T| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$

5. Etablir les inégalités : $(b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right) \geq \int_a^b f(x)dx \geq (b-a)\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}\right)$

6. Etablir l'égalité : $\int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)}{6} [P_3(a) + 4P_3\left(\frac{b+a}{2}\right) + P_3(b)]$

7. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$

Montrer que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f^{(2)}(x)dx$$

8. Si $x_{i+1} - x_i = h$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, montrer que l'erreur d'approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la méthode des trapèzes est de la forme :

$$-\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\theta) , \theta \in [x_i, x_{i+1}]$$

Chapitre 5

Analyse numérique des équations différentielles ordinaires (e.d.o)

5.1 Rappels sur les équations différentielles ordinaires (e.d.o)

On considère l'e.d.o du premier ordre

$$y'(x) = f(x, y), \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m \text{ où } y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top \quad (5.1.1)$$

L'équation (5.1.1) peut encore s'écrire sous la forme d'un système d'e.d.o :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, \dots, y_m) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Lorsque les conditions initiales sont précisées, on obtient un problème de condition initiale (p.c.i) encore appelé problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y) \\ y(a) &= \alpha \text{ avec } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^\top \text{ donné} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

L'existence et l'unicité de la solution du p.c.i (5.1.3) sont données par le théorème suivant

Théorème 5.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction définie et continue pour tout couple $(x, y) \in D$ où $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, -\infty < y_i < \infty\}$, avec a et b finis. On suppose qu'il existe une constante L telle que :

$$\|f(x, y) - f(x, y^*)\| \leq L\|y - y^*\| \text{ pour tous } (x, y) \text{ et } (x, y^*) \text{ appartenant à } D \quad (5.1.4)$$

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$, il existe une solution unique $y(x)$ du problème (5.1.3), où y est continue différentiable pour tout couple $(x, y) \in D$.

Remarque 5.1.1. Un système différentiel d'ordre q peut toujours être ramené à un système du premier ordre du type (5.1.3)

$$y^{(q)} = \varphi(x, y^{(0)}, \dots, y^{(q-1)}); \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

En posant : $Y_1 = y, Y_2 = Y_1' (= y'), \dots, Y_q = Y_{q-1}' (= y^{(q-1)})$ on obtient

$$Y' = F(x, Y) \text{ avec } Y = (Y_1^\top, Y_2^\top, \dots, Y_q^\top)^\top \in \mathbb{R}^{qm}$$

$$F = (Y_2^\top, Y_3^\top, \dots, Y_q^\top, \varphi^\top)^\top \in \mathbb{R}^{qm}$$

où $y^{(r)}(a) = \alpha_{r+1}, r = 0, 1, \dots, q-1$.

On obtient

$$Y' = F(x, Y); Y(a) = \alpha$$

Exemple 5.1.1.

$$y^{(iv)} = f(x, y), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y_1 = y, Y_2 = Y_1' = y', Y_3 = Y_2' = y'', Y_4 = Y_3' = y''', Y_4' = y^{(iv)}$$

si on pose $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_4)^\top$ on obtient $Y' = F(x, Y)$.

5.2 Systèmes linéaires

Le système

$$y'(x) = f(x, y), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

est dit linéaire si f est de la forme

$$f(x, y) = A(x)y + \psi(x) \quad (5.2.1)$$

où $A(x)$ est une matrice d'ordre m et $\psi \in \mathbb{R}^m$.

Si de plus $A(x) = A$ est indépendante de x , on obtient un système linéaire à coefficients constants de la forme :

$$y'(x) = Ay + \psi(x) \quad (5.2.2)$$

Si $\psi(x) = 0$, le système est dit homogène.

$$y' = Ay \quad (5.2.3)$$

Si les valeurs propres de A sont distinctes, la solution du système homogène est de la forme

$$y(x) = \sum_{j=1}^k C_j \exp(\lambda_j x) V_j + \varphi(x) \quad (5.2.4)$$

où λ_j est valeur propre de A associée au vecteur propre V_j et les C_j sont des constantes arbitraires et $\varphi(x)$ est une solution particulière de l'équation (5.2.2).

Exemple 5.2.1.

$$y' = Ay + \psi(x), y(0) = \alpha$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi(x) = (2x - 1, x + 1)^\top$, $\alpha = (0, 0)^\top$, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.

Les vecteurs propres de A sont $V_1 = (1, 1)^\top$ et $V_2 = (1, -1)^\top$.

En cherchant une solution particulière de la forme : $\varphi(x) = \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix}$, on obtient

$$y(x) = C_1 \exp(3x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/3 \\ -x + 4/3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en considérant la condition initiale on obtient $C_1 = 1/6$ et $C_2 = 3/2$,

$$\text{d'où } y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \exp(3x) + \frac{3}{2} \exp(-x) - \frac{5}{3} \\ \frac{1}{6} \exp(3x) - \frac{3}{2} \exp(-x) - x + \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

5.3 Notions de stabilité

Considérons le système nonlinéaire suivant

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \quad (**)$$

où $X(t) = (X_1, \dots, X_n)^\top$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $F = (f_1, \dots, f_n)^\top$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ suffisamment régulière.

Si F est linéaire le système est dit *linéaire*

Définition 5.3.1 (Point d'équilibre). Un vecteur $\bar{X}$ est un point équilibre du système $(**)$ si à l'instant t_0 l'état du système est égal à $\bar{X}$ et il restera égal à $\bar{X}$ dans le futur c.à.d :

$$X(t_0) = \bar{X} \text{ et } \forall t > t_0 \quad X(t) = \bar{X}.$$

On parle aussi de point stationnaire, état stationnaire et solution stationnaire qui désignent la même notion.

Définition 5.3.2. 1. Un point d'équilibre $\bar{X}$ est dit stable si :

$\exists R_0 > 0$ et $\forall R < R_0 \quad \exists r \quad 0 < r < R$ tel que si $X(t_0) \in B(\bar{X}, r)$ alors $X(t) \in B(\bar{X}, R) \quad \forall t > t_0$, $B(\bar{X}, r)$:boule de centre $\bar{X}$ et de rayon r ;

2. Un point d'équilibre est dit asymptotiquement stable s'il est stable et en plus $\exists R_0$ tel que pour tout $X(t_0) \in B(\bar{X}, R_0)$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \bar{X}$;

3. Un point d'équilibre est dit marginalement stable s'il est stable et non asymptotiquement stable ;

4. Un point est instable si il n'est pas stable ;

5. Un point est globalement asymptotiquement stable si pour tout $X(t_0)$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \bar{X}$.

Théorème 5.3.1. Si F est linéaire, une condition nécessaire et suffisante pour que le système $(**)$ admette 0 comme point d'équilibre asymptotiquement stable est que

$Re(\lambda) < 0$, pour toute valeur propre λ de F .

Si au moins une des valeurs propres de F vérifie $Re(\lambda) > 0$ alors le point d'équilibre 0 est instable .

Définition 5.3.3. Si le système non linéaire $(**)$ admet un point d'équilibre $\bar{X}$, on appelle matrice de linéarisation du système la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{\bar{X}},$$

le système $\frac{dY(t)}{dt} = \mathcal{A}Y(t)$ est dit système linearisé obtenu à partir du système $(**)$.

Théorème 5.3.2. Si le système non linéaire $(**)$ admet l'origine comme point fixe unique alors dans un voisinage de l'origine, les comportements du système non linéaire et du système linearisé sont équivalents à condition que le système n'admette pas de point centre (valeurs propres imaginaires pures).

Remarque 5.3.1. Le théorème peut s'appliquer aux points d'équilibre qui sont distincts de l'origine, il suffit d'introduire des coordonnées locales.

Théorème 5.3.3 (Théorème de Liapunov). Soient $\bar{X}$ un point d'équilibre de (**) et V une fonction définie de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 , U un voisinage de $\bar{X}$ tel que :

i) $V(\bar{X}) = 0$ et $V(X) > 0$ si $X \neq \bar{X}$,

ii) $\dot{V}(X) \leq 0 \quad \forall X \in U \setminus \{\bar{X}\}$.

Alors $\bar{X}$ est stable. Si de plus

iii) $\dot{V}(X) < 0 \quad \forall X \in U \setminus \{\bar{X}\}$

Alors $\bar{X}$ est asymptotiquement stable. $V(X)$ est dite fonction de Liapunov.

5.4 Système d'équations aux différences linéaires avec coefficients constants

Soit $\{y_n, n = N_0, N_0 + 1, \dots\}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et (α_n) une suite de réels. On appelle système d'équations aux différences linéaires d'ordre k le système d'équations suivantes

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \psi_n, n = N_0, N_0 + 1, \dots \text{ avec } \psi_n \in \mathbb{R}^m \quad (5.4.1)$$

Si de plus $\psi_n = 0$, le système est dit homogène :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0, n = N_0, N_0 + 1, \dots \quad (5.4.2)$$

La solution générale du système (5.4.1) s'obtient de façon similaire à celle qui donne la solution du système d'équations différentielles linéaires (5.2.1). Elle est donnée par la somme d'une solution (Y_n) du système homogène (5.4.2) et d'une solution particulière φ_n du système (5.4.1) ($y_n = Y_n + \varphi_n$).

Définition 5.4.1. On appelle polynôme caractéristique de l'équation aux différences

linéaires le polynôme défini par $\pi(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$. Si les racines r_j de $\pi(r)$ sont

simples alors la solution générale du système (5.4.1) est donnée sous la forme $y_n =$

$\sum_{j=1}^k \theta_j r_j^n + \varphi_n$, où φ_n est une solution particulière du système (5.4.1).

Si r_1 est une racine de $\pi(r)$ de multiplicité m , la solution générale du système

(5.4.1) est donnée sous la forme : $y_n = \sum_{j=1}^m n^{j-1} \theta_j r_1^n + \sum_{j=m+1}^k \theta_j r_j^n + \varphi_n$.

Exemple 5.4.1. $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 1, K = 2$ est une solution particulière

$$\pi(r) = r^2 - r + \frac{1}{2}, \quad \Delta = 1 - 2 = -1.$$

Les racines sont complexes conjugués $r_1 = (1 + i)/2$ et $r_2 = (1 - i)/2$. La solution générale est donnée par $y_n = \theta_1(1 + i)^n/2^n + \theta_2(1 - i)^n/2^n + 2$.

5.5 Méthodes numériques pour les problèmes de condition initiale

Considérons le problème de condition initiale

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = \alpha. \quad (5.5.1)$$

On suppose que ce problème admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$.

Les méthodes numériques utilisent la discretisation de l'intervalle $[a, b]$ en posant

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

où $h = \frac{b-a}{N}$ est le pas de discrétisation (ici le pas est supposé constant mais on peut envisager des pas h_i variables).

La solution exacte au point x_i est notée $y(x_i)$, la solution approchée est notée y_i ($y(x_i) \simeq y_i$), une méthode numérique est un système d'équations aux différences impliquant un certain nombre d'approximations successives $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ où k désigne le nombre de pas de la méthode.

Si $k = 1$ on parle de méthode à un pas.

Si $k > 1$ la méthode est dite à pas multiples ou multi-pas.

Exemple 5.5.1.

$$y_{n+1} - y_n = hf_n$$

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n)$$

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}(3f_{n+1} - 2f_n)$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{4}(k_1 + k_2)$$

avec

$$k_1 = f_n = f(x_n, y_n) \quad \text{et} \quad k_2 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{2}hk_2\right).$$

Ces exemples peuvent être donnés sous la forme générale

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \phi_f(y_{n+k}, \dots, y_n, x_n; h). \quad (5.5.2)$$

5.5.1 Convergence

Considérons une méthode numérique de type (5.5.2) avec des valeurs initiales appropriées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \phi_f(y_{n+k}, \dots, y_n, x_n; h) \\ y_{\kappa} = \gamma_{\kappa}(h), \kappa = 0, 1, \dots, k-1 \end{array} \right\} \quad (5.5.3)$$

Définition 5.5.1. La méthode (5.5.3) est dite convergente si pour tout problème de condition initiale vérifiant les hypothèses du théorème 5.1.1 (existence et unicité) on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| = 0 \quad \text{quand } h \longrightarrow 0$$

Définition 5.5.2. On appelle erreur de troncature locale de la méthode numérique le résidu $R_{n+k}(h)$ défini par

$$R_{n+k}(h) = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) - h \phi_f(y(x_{n+k}), y(x_{n+k-1}), \dots, y(x_n), x_n, h) \quad (5.5.4)$$

Remarque 5.5.1. Parfois on utilise aussi $\tau_n(h) = \frac{1}{h} R_{n+k}(h)$ comme définition d'erreur de troncature locale, mais dans le cadre de ce chapitre c'est la première définition qui est adoptée.

Définition 5.5.3. La méthode (5.5.3) est dite d'ordre p si $R_{n+k} = O(h^{p+1})$.

5.5.2 Consistance

La méthode numérique est dite consistante si son ordre est au moins 1 ou encore, pour tout p.c.i vérifiant les hypothèses du théorème 5.1.1 d'existence et d'unicité on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} R_{n+k}(h) = 0, \quad x = a + nh.$$

Lemme 5.5.1. La méthode numérique (5.5.2) est consistante si et seulement si

- i) $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0.$
- ii) $(\phi_f(y(x_n), y(x_n), \dots, y(x_n), x_n, 0)) / \sum_{j=0}^k j \alpha_j = f(x_n, y(x_n)).$

5.5.3 Stabilité

Considérons le problème de condition initiale

$$z' = f(x, z), \quad z(a) = \alpha, \quad x \in [a, b]$$

Avant de définir la stabilité de la méthode numérique, on pourrait se poser la question de savoir comment réagirait la solution $z(x)$ de ce problème à une perturbation des conditions initiales et/ou de f ? Soit donc z^* la solution du problème perturbé :

$$z' = f(x, z) + \delta(x), \quad z(a) = \alpha + \delta, \quad x \in [a, b].$$

Définition 5.5.4 (Hahn, Stetter). Si $(\delta(x), \delta)$ et $(\delta^*(x), \delta^*)$ sont deux perturbations et $z(x)$ et $z^*(x)$ les solutions qui en résultent et s'il existe une constante S telle que

$$\forall x \in [a, b], \|z(x) - z^*(x)\| < S\varepsilon \text{ si } \|\delta(x) - \delta^*(x)\| < \varepsilon \text{ et } \|\delta - \delta^*\| < \varepsilon$$

Alors le p.c.i est dit totalement stable.

Remarque 5.5.2. Dans cette définition de stabilité, on exige simplement l'existence d'une constante S finie (mais pas nécessairement petite) et on montre que les hypothèses du théorème 5.1.1 sont suffisantes pour que le p.c.i soit totalement stable. On dit aussi que le problème est bien posé.

Si maintenant on considère la méthode numérique, on peut se demander quel effet aurait une perturbation de l'équations aux différences sur la solution numérique y_n . On a alors la définition suivante :

Définition 5.5.5 (Lambert). Soient $(\delta_n, n = 0, 1, \dots, N)$ et $(\delta_n^*, n = 0, 1, \dots, N)$ deux perturbations de l'équation aux différences (5.1.1) et $(z_n, n = 0, 1, \dots, N)$ et $(z_n^*, n = 0, 1, \dots, N)$ les solutions qui en résultent. On dira que la méthode numérique est zéro-stable si il existe deux constantes S et h_0 telles que pour tout $h \in [0, h_0]$, si $\|\delta_n - \delta_n^*\| < \varepsilon$ $0 \leq n \leq N$ alors $\|z_n - z_n^*\| < S\varepsilon$, $0 \leq n \leq N$.

Remarque 5.5.3. La zéro-stabilité est encore appelée stabilité au sens de Dahlquist.

Définition 5.5.6. On appelle 1^{er} polynôme caractéristique de la méthode numérique le polynôme $\rho(t)$ défini par $\rho(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$.

Définition 5.5.7. On dit que la méthode numérique satisfait les conditions aux racines si tous les zéros du 1^{er} polynôme caractéristique sont de module inférieur ou égal à 1 et ceux ayant un module égal à 1 sont des zéros simples.

Théorème 5.5.1. Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit zéro-stable et que la méthode vérifie la condition aux racines.

Théorème 5.5.2. Une condition suffisante et nécessaire pour que la méthode (5.5.2) soit convergente est qu'elle soit zéro-stable et consistante.

5.5.4 Méthode d'Euler

La plus simple et la plus connue des méthodes d'approximation des solutions des e.d.o est la méthode d'Euler donnée par :

$$y_{n+1} - y_n = hf_n, \quad y_0 = \alpha \quad (5.5.5)$$

En considérant

$$y(x_n + h) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) = \frac{1}{2}h^2 y''(\theta_n) \text{ avec } x_n \leq \theta_n \leq x_{n+1} \quad (5.5.6)$$

On voit que la méthode d'Euler est une méthode explicite d'ordre 1 (donc consistante).

Lemme 5.5.2. i) Pour tout $x \geq -1$ et toute constante positive m on a

$$0 \leq (1+x)^m \leq \exp(mx)$$

ii) Si s et t sont des réels positifs et $(z_n)_{n=0}^{n=k}$ une suite vérifiant

$$z_0 \geq -\frac{t}{s} \text{ et } z_{n+1} \leq (1+s)z_n + t \quad \forall n = 1, \dots, k$$

Alors on a

$$z_{n+1} \leq \exp((n+1)s) \left(\frac{t}{s} + z_0 \right) - \frac{t}{s}.$$

Théorème 5.5.3. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et vérifiant la condition de Lipschitz pour y sur $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ avec a et b finis. On suppose qu'il existe une constante M telle que $|y''(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $y(x)$ la solution unique du p.c.i $y'(x) = f(x, y)$, $y(a) = \alpha$ et $(y_n)_{n=0}^{n=N}$ la suite des approximations générée par la méthode d'Euler. Alors on a :

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2L} (\exp(L(x_n - a)) - 1) \text{ pour chaque } n = 0, 1, \dots, N$$

Preuve.

Pour $n = 0$, l'inégalité est vérifiée puisque $y(x_0) = y_0 = \alpha$.

Les équations (5.5.5) et (5.5.6) donnent :

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq |y(x_n) - y_n| + h|f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)| + \frac{1}{2}h^2|y''(\theta_n)| \quad (5.5.7)$$

Les hypothèses du théorème conduisent alors à la majoration

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq |y(x_n) - y_n|(1 + hL) + \frac{h^2 M}{2}$$

En appliquant le lemme avec $z_n = |y(x_n) - y_n|$, $s = hL$ et $t = \frac{h^2 M}{2}$ il vient :

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \exp((n+1)hL) \left(|y(x_0) - y_0| + \frac{h^2 M}{2hL} \right) - \frac{h^2 M}{2hL}$$

et comme $|y(x_0) - y_0| = 0$ et $(n+1)h = x_{n+1} - a$, on obtient :

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{hM}{2L} (\exp(L(x_{n+1} - a)) - 1)$$

D'après le théorème 5.5.3, l'erreur de la méthode d'Euler est majorée par une fonction linéaire en h . Ceci laisse comprendre que plus on diminue h plus on réduit l'erreur. Cependant, le corollaire qui va suivre indique autre chose.

Corollaire 5.5.1. Soit $y(x)$ la solution unique du p.c.i $y'(x) = f(x, y)$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = \alpha$ et $w_0, w_1, \dots, w_N$ les approximations vérifiant $w_0 = \alpha + \delta_0$ et $w_{n+1} = w_n + hf(x_n, w_n) + \delta_{n+1}$; $n = 0, \dots, N-1$. Si $|\delta_n| < \delta \forall n = 0, \dots, N$ et les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, alors

$$|y(x_n) - w_n| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) (\exp(L(x_n - a)) - 1) + |\delta_0| \exp L(x_n - a)$$

Preuve. Identique à celle du théorème avec $y(x_0) - w_0 = \delta_0$ et $t = \frac{h^2 M}{2} + |\delta_n|$.

Remarque 5.5.4. La simplicité de la méthode d'Euler en fait un exemple pédagogique d'introduction aux autres méthodes plus complexes. Cependant, un des critères principaux de l'analyse numérique consiste à chercher des méthodes ayant l'ordre de précision le plus élevé possible et comme la méthode d'Euler est d'ordre 1, son utilisation se trouve limitée en pratique et on est amené à considérer des méthodes plus précises. Trois directions principales permettent d'obtenir des méthodes d'ordres élevés.

La première direction consiste à travailler avec des méthodes à un pas mais en cherchant à atteindre des ordres élevés en utilisant un développement de Taylor et en négligeant le terme d'erreur mais ces méthodes ont un handicap à cause des dérivées successives de f .

Une deuxième possibilité est donnée par des choix appropriés de $\phi_f(y_{n+k}, \dots, y_n, x_n; h)$ dans l'équation (5.5.1), les méthodes de Runge-Kutta sont la meilleure illustration de cette direction.

Enfin, une troisième direction est offerte par les Méthodes Linéaires à Pas Multiples (MLPM).

En se basant sur le critère de précision, on voit qu'on est obligé de chercher des méthodes dont la performance est supérieure à celle d'Euler. On fait donc appel à d'autres méthodes plus précises.

5.5.5 Méthodes de Taylor dans le cas scalaire

Supposons que la solution $y(x)$ du p.c.i

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (5.5.8)$$

est de classe $C^{(n+1)}$. Alors en écrivant le développement de Taylor au point $x_{n+1} = x_n + h$ on obtient

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_n) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta_n),$$

$$x_n < \zeta_n < x_{n+1}$$

En remplaçant $y'(x_n)$ par $f(x_n, y_n)$ ainsi que les dérivées supérieures de y' par celles de f puis en laissant tomber le terme $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta_n)$, on obtient la méthode numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \alpha \\ y_{n+1} = y_n + hT_f^n(x_n, y_n, h), \\ T_f^n(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!}f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(x_n, y_n) \end{array} \right. \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.5.9)$$

Exemple 5.5.2. La méthode d'Euler fait partie des méthodes de Taylor.

Exercice 5.5.1. En faisant un développement de Taylor de $y(x)$ à l'ordre 3 puis en remplaçant $y''(x_n)$ par $\frac{1}{h}(y'(x_{n+1}) - y'(x_n)) + O(h)$, montrer qu'on obtient la méthode d'Euler modifiée $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$.

Remarque 5.5.5. Au vu du critère de précision et bien que les méthodes de Taylor paraissent faciles dans leur écriture, elles sont rarement utilisées dans la pratique à cause des difficultés engendrées par le calcul des dérivées successives de f comme fonction de deux variables. C'est pour cette raison qu'on cherche des méthodes permettant d'atteindre un ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées successives de f . Au critère de précision s'ajoute le critère de coût.

5.5.6 Méthodes de Runge-Kutta (R.K) dans le cas scalaire

Revenons au p.c.i (5.1.3), les méthodes de R.K se présentent sous la forme :

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{i=1}^l b_i k_i$$

avec $k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^l a_{ij} k_j\right)$, $i, = 1, 2, \dots, l$ et on suppose que $c_i = \sum_{j=1}^l a_{ij}$, $i, = 1, 2, \dots, l$

Si $a_{ij} = 0$ pour $j > i$ alors :

$$k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j\right) \quad i, = 1, 2, \dots, l$$

on obtient ainsi :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + (c_3 - a_{32}) h k_1 + a_{32} h k_2)$$

Remarques 5.5.6. 1. Les méthodes de R.K sont des méthodes à un pas, elles peuvent-être écrite sous la forme générale $y_{n+1} - y_n = h \phi_f(x_n, y_n, h)$, où

$$\phi_f(x, y, h) = \sum_{i=1}^l b_i k_i.$$

2. Les méthodes de R.K satisfont la condition aux racines, elles sont donc zéro-stables. Par conséquent, pour étudier la convergence il suffit d'étudier la consistance.

5.5.7 Méthodes de Runge-Kutta explicites

Les méthodes explicites de R-K d'ordre 1,2,3 et 4 sont obtenues en considérant

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$$

en déterminant pour chaque ordre les valeurs possibles des paramètres.

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + (c_3 - a_{32}) h k_1 + a_{32} h k_2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Les formes explicites des méthodes d'ordre 1,2 et 3 sont obtenues après différentiation et identification.

Méthode d'ordre 1

En considérant $y_{n+1} = y_n + hb_1k_1$ avec $k_1 = f(x_n, y_n)$ on voit que le l'ordre maximal est 1 obtenu avec le paramètre b_1 égal à 1 et qui donne la méthode d'Euler :

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$$

Méthodes d'ordre 2

En partant de $y_{n+1} = y_n + hb_1k_1 + b_2k_2$ avec $k_1 = f(x_n, y_n)$ et $k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + c_2k_1)$, $p = 2$ est l'ordre maximal possible qu'on peut atteindre si les paramètres b_1, b_2 et c_2 vérifient les équations $b_1 + b_2 = 1$ et $b_2c_2 = \frac{1}{2}$. Comme on a deux équations pour trois inconnues, il en résulte une infinité de méthodes explicites d'ordre 2 . On en donne quelques unes :

Méthode d'Euler modifiée : ($b_1 = 0, b_2 = 1$ et $c_2 = \frac{1}{2}$)

$$y_{n+1} - y_n = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

Méthode d'Euler améliorée : ($b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ et $c_2 = 1$)

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + k_1))$$

Méthode de Heun d'ordre 2 ($b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4}$ et $c_2 = \frac{2}{3}$)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1)\right)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

Méthodes d'ordre 3

En considérant $y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3$ avec $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + c_2h, y_n + c_2hk_1)$ et $k_3 = hf(x_n + c_3h, y_n + (c_3 - a_{32})k_1 + a_{32}k_2)$.

On obtient une famille de méthode d'ordre 3 si les paramètres vérifient les équations

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 &= \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= \frac{1}{3} \\ b_3c_2a_{32} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Deux représentants de cette famille de méthode d'ordre 3 sont :

Méthode de Heun d'ordre 3 ($b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{3}{4}$ et $c_2 = \frac{1}{3}$ et $c_3 = \frac{2}{3}$, $a_{32} = \frac{2}{3}$)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1\right) \end{aligned}$$

Méthode de Kutta d'ordre 3 ($b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = \frac{1}{6}$ et $c_2 = \frac{1}{2}$ et $c_3 = 1$, $a_{32} = 2$)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \end{aligned}$$

Méthode d'ordre 4

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3) \end{aligned}$$

Méthodes de Runge-Kutta d'ordre supérieur et contrôle de l'erreur

Des méthodes de R-K d'ordres successifs peuvent être combinées pour le contrôle de l'erreur. Deux types de cette utilisation sont illustrées par :

1. Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg. Elle consiste à utiliser une méthode de R-K d'ordre 5

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

pour estimer l'erreur de troncature locale de la méthode de R-K d'ordre 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

avec

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) \\k_3 &= hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\k_4 &= hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\k_5 &= hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\k_6 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)\end{aligned}$$

2. Méthode de Runge-Kutta-Verner. Elle consiste à utiliser une méthode de R-K d'ordre 6 :

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8$$

pour estimer l'erreur de troncature locale de la méthode de R-K d'ordre 5 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

avec

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{6}h, y_n + \frac{1}{6}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{4}{15}h, y_n + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + \frac{5}{6}h, y_n - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right)$$

$$k_7 = hf\left(x_n + \frac{1}{15}h, y_n - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right)$$

$$k_8 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right)$$

Méthodes Linéaires à Pas Multiples (MLPM)

En posant $f_n = f(x_n, y_n)$, on définit une MLPM par $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$, avec α_j et β_j des constantes vérifiant les conditions $\alpha_k = 1$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

Exemple 5.5.3. $y_{n+2} - y_{n+1} = hf_{n+1}$ (ou de façon équivalente $y_{n+1} - y_n = hf_n$) est la méthode d'Euler à un pas.

Définition 5.5.8. On appelle 2^{eme} polynôme caractéristique de la méthode, le polynôme défini par $\sigma(t) = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j$.

L'opérateur de difference linéaire est défini par

$$L(z(x); h) := \sum_{j=0}^k (\alpha_j z(x + jh) - h\beta_j z'(x + jh))$$

Si on suppose que z est une fonction qu'on peut dériver autant de fois qu'on veut, on obtient :

$$L(z(x); h) = C_0 z(x) + C_1 h z'(x) + \dots + C_q h^q z^{(q)}(x) + \dots$$

Définition 5.5.9. La MLPM est dite d'ordre p si

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \text{ et } C_{p+1} \neq 0.$$

C_{p+1} est appelée constante d'erreur de la MLPM

5.6 Exercices

Exercice 5.6.1. On considère le modèle discret suivant :

$$S_{n+1} = \exp(-aI_n)S_n$$

$$I_{n+1} = bI_n + (1 - \exp(-aI_n))S_n$$

$$R_{n+1} = (1 - b)I_n + R_n$$

On suppose que $R_0 = 0$, montrer que

1. La population des susceptibles tend vers une limite S quand n tend vers l'infini.
2. Si $F = S/S_0$ alors

$$F = \exp(-aS_0/(1-b))(1 + I/S_0 - F).$$

3. Expliquer comment F peut jouer un rôle de seuil.

Exercice 5.6.2. Chercher l'ordre et la constante d'erreur C_p pour la méthode suivante :

$$y_{n+2} - (1 + \alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = h((1 + \beta)f_{n+2} - (\alpha + \beta + \alpha\beta)f_{n+1} + \alpha\beta f_n)$$

Exercice 5.6.3. Chercher les solutions des systèmes différentiels et aux différences suivants : $y' = Ay + \psi(x)$, $y(0) = \alpha$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$y_{n+4} - 6y_{n+3} + 14y_{n+2} - 16y_{n+1} + 8y_n = \phi_n \text{ avec } y_n \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \phi_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.6.4. Considérons le système aux différences :

$$y_{n+2} - 2\mu y_{n+1} + \mu y_n = c, \quad n = 0, 1, \dots$$

avec $y_n, c \in \mathbb{R}^m$ et $0 \leq \mu \leq 1$.

Montrer que y_n converge vers $c/(1 - \mu)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 5.6.5. A- Montrer que :

- i) Pour tout $x \geq -1$ et toute constante positive m on a :

$$0 \leq (1 + x)^m \leq \exp(mx)$$

ii) Si s et t sont des réels positifs et $(z_n)_{n=0}^{n=k}$ une suite vérifiant :

$$z_0 \geq -\frac{t}{s} \text{ et } z_{n+1} \leq (1+s)z_n + t \quad \forall n = 1, \dots, k$$

Alors on a :

$$z_{n+1} \leq \exp((n+1)(1+s)) \left(\frac{t}{s} + z_0 \right) - \frac{t}{s}.$$

B- Soit $y(x)$ la solution unique du p.c.i $y'(x) = f(x, y)$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = \alpha$ et $w_0, w_1, \dots, w_N$, les approximations vérifiant : $w_0 = \alpha + \delta_0$ et $w_{n+1} = w_n + hf(x_n, w_n) + \delta_{n+1}$; $n = 0, \dots, N-1$

1. On suppose que : $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ avec a et b finis

i) il existe une constante L positive telle que :

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*| \quad \forall y, y^* \in D$$

ii) il existe une constante M telle que : $|y''(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$.

iii) les perturbations vérifient : $|\delta_n| < \delta \quad \forall n = 0, \dots, N$

Montrer que :

$$|y(x_n) - w_n| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) (\exp(L(x_n - a)) - 1) + |\delta_0| \exp L(x_n - a)$$

(Preuve : identique à celle du théorème du cours avec $y(x_0) - w_0 = \delta_0$ et $t = \frac{h^2 M}{2} + |\delta_n|$)

2. En posant $\varepsilon(h) = \frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}$ et en remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \infty$, montrer qu'on peut déterminer une limite inférieure h_0 de h qui rend minimum $\varepsilon(h)$.

Exercice 5.6.6. Soit A une matrice diagonalisable admettant les vecteurs propres V_j associés aux valeurs propres λ_j avec $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout j .

On considère les deux schémas d'Euler donnés par :

$$E1 : u_{n+1} = u_n + hAu_n, \quad u_0 = \eta$$

$$E2 : u_{n+1} = u_n + hAu_{n+1}, \quad u_0 = \eta$$

Montrer que les solutions de ces deux schémas sont données par :

$$S1 : u_n = \sum_{j=1}^k c_j (1 + h\lambda_j)^n V_j$$

$$S2 : u_n = \sum_{j=1}^k c_j (1 - h\lambda_j)^{-n} V_j$$

Quelles conditions doit-on imposer à h pour que les solutions S1 et S2 tendent vers zéro ou restent bornées quand $n \rightarrow \infty$

Exercice 5.6.7. En posant $f_n = f(x_n, y_n)$, on définit une MLPM par :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$$

avec α_j et β_j des constantes vérifiant les conditions :

$$\alpha_k = 1 \text{ et } |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$$

On appelle 1^{er} (resp. 2^{eme}) polynôme caractéristique de la MLPM le polynôme $\rho(t)$ (resp. $\sigma(t)$) :

$$\rho(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j, \quad \sigma(t) = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j.$$

Si l'opérateur de difference linéaire est donné par :

$$L(z(x); h) := \sum_{j=0}^k (\alpha_j z(x+jh) - h\beta_j z'(x+jh)) = C_0 z(x) + C_1 h z'(x) + \dots + C_q h^q z^{(q)}(x) + \dots$$

1. Montrer que :

$$C_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j = \rho(1)$$

$$C_1 = \sum_{j=0}^k (j\alpha_j - \beta_j) = \rho'(1) - \sigma(1)$$

$$C_q = \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{q} j^q \alpha_j - \frac{1}{(q-1)} j^{q-1} \beta_j \right), \quad q = 2, 3, \dots$$

2. La MLPM est dite consistante si son ordre est supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$)

Montrer que la MLPM est consistante si et seulement si :

$$\rho(1) = 0 \text{ et } \rho'(1) = \sigma(1)$$

Exercice 5.6.8. Chercher l'ordre des méthodes numériques suivantes :

$$1) \quad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{6}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$$

$$2) \quad y_{n+4} = y_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+1} - f_{n+2} + 2f_{n+3})$$

$$3) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left(f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1\right) \right), \quad k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$4) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2)$$

Exercice 5.6.9. Considérons la méthode numérique

$$y_{n+2} - (1 + \alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{2}((3 - \alpha)f_{n+1} - (1 + \alpha)f_n)$$

où $f_n = f(x_n, y_n)$ et $-1 \leq \alpha \leq 1$.

1. Donner l'erreur de troncature locale de la méthode et l'ordre de la méthode en fonction de α .
2. Cette méthode est utilisée numériquement pour résoudre l'équation scalaire

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en supposant que

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + \omega h^3 \\ y_1 &= \exp(h) + \theta h^3 \end{aligned}$$

Montrer que la solution approchée y_n peut-être donnée sous la forme

$$y_n = \frac{\Omega(r_2)r_1^n - \Omega(r_1)r_2^n}{r_1 - r_2}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique associées à l'équation aux différences. et $\Omega(r) = \exp(h) - r + (\theta - r\omega)h^3$.

3. On suppose que r_1 est de la forme

$$r_1 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

- (a) Donner une expression analogue pour r_2 .
- (b) Etudier la convergence de y_n dans le cas $\alpha = -1$.

Exercice 5.6.10. On considère la méthode numérique suivante

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n) \quad (M)$$

où $f_n = f(x_n, y_n)$ et $f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$.

1. Déterminer les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ et β_1 pour que la méthode soit d'ordre maximum.
2. La méthode est-elle zéro-stable pour les valeurs des constantes trouvées ?
3. On utilise la méthode (M) avec $y_0 = 1$ et $y_1 = \exp(-h)$ pour approcher la solution du problème de condition initiale suivant

$$y'(x) = -y(x), y(0) = 1 \quad (P)$$

Montrer qu'on obtient l'équation aux différences suivante

$$y_{n+2} + 4(1+h)y_{n+1} + (-5+2h)y_n = 0; n = 0, 1, \dots \quad (D)$$

4. Montrer que les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique associée à (D) sont

$$r_1 = -2 - 2h + 3 \left(1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2 \right)^{1/2} \text{ et } r_2 = -2 - 2h - 3 \left(1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2 \right)^{1/2}.$$

5. Montrer que la solution de (D) est de la forme

$$y_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n,$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{r_2 - \exp(-h)}{r_2 - r_1} \text{ et } C_2 = \frac{\exp(-h) - r_1}{r_2 - r_1}.$$

6. On donne $\left(1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2 \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{18}h^3 + \frac{1}{216}h^4 + O(h^5)$.

En déduire que $r_1 = 1 - h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{72}h^4 + O(h^5)$, $r_2 = -5 - 3h + O(h^2)$.

7. Montrer alors que $C_1 = 1 + O(h^2)$ et $C_2 = -\frac{1}{216}h^4 + O(h^5)$.
8. En considérant pour x fixé, $nh = x$, montrer que $C_1(r_1)^n \rightarrow \exp(-x)$ quand $n \rightarrow \infty$.
9. Montrer que (y_n) diverge. Cette divergence était-elle attendue ? (justifiez).

Chapitre 6

Examens

6.1 F.S.O Session ordinaire 2012-2013 (Durée : 1h30)

Exercice I (Méthode de Simpson)

Soient g une fonction de classe C^3 sur $[a, b]$; x_0, x_1 et x_2 3 réels de $[a, b]$

On suppose que $x_0 < x_1 < x_2$ et on note P le polynôme interpolant g aux points : x_0, x_1 et x_2 . On pose $h = (x_1 - x_0) = (x_2 - x_1)$ et $M_3 = \max_{a \leq t \leq b} |g^{(3)}(t)|$

1) Exprimer P dans la base de Lagrange

2) Exprimer P dans la base de Newton

3) Pour tout $x \in]x_0, x_2[$, on pose $e(x) = g(x) - P(x)$

a) Sans faire les calculs, dire comment on montre qu'il existe $c \in]x_0, x_2[$ tel que :

$$e(x) = \frac{g^{(3)}(c)}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

b) Montrer que : $\forall x \in]x_0, x_2[$, il existe $\theta \in]x_0, x_2[$ tel que

$$[g(x_0), g(x_1), g(x_2)] = \frac{g^{(2)}(\theta)}{2!}$$

c) Calculer $\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx$

d) Calculer $\int_{x_0}^{x_2} P(x)dx$

e) Montrer que $\left| \int_{x_0}^{x_2} (g(x) - P(x))dx \right| \leq M_3 \frac{h^4}{12}$

(Pour c) , d) et e) , on pourra faire le changement de variable $t = (x - x_1)$)

Exercice II

On considère le système linéaire $(S_1) : AX = B$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- 1) Donner les matrices de Gauss M_1 et M_2 qui permettent de transformer (S_1) en un système (S_2) de la forme $UX = C$ où U est triangulaire supérieure
- 2) Donner la solution X en solvant le système (S_2)
- 3) Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure

Exercice III

Soient h et g deux fonctions définies par :

$$h(x) = x^3 - 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3 + 1}{3} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

- 1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet 3 racines réelles : θ_1, θ_2 et θ_3

avec $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ et $\theta_3 > 1$

- 2) On suppose que $\theta_2 \in [0, \frac{1}{2}]$

a) Montrer que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $g(x) \in [0, \frac{1}{2}]$

b) Vérifier que $g(\theta_2) = \theta_2$

- 3) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente

définie par : $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ et $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

b) Donner l'ordre de convergence

- 4) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $y_{n+1} = y_n - \frac{h(y_n)}{h'(y_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avec $y_0 > \theta_3$

a) Montrer que $y_n > \theta_3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

c) Montrer que l'ordre de convergence est 2

6.2 F.S.O Session Rattrapage 2012-2013 (Durée : 1h30)

Exercice I

On considère le système linéaire $(S) : AX = B$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre le système (S) par les méthodes indirectes de type :

$$X_{k+1} = MX_k + D$$

- 1) Donner la matrice J de Jacobi associée à la matrice A
- 2) Donner la matrice G de Gauss-Seidel associée à la matrice A
- 3) Chercher les valeurs propres de J et dire si la méthode de Jacobi converge
- 4) Chercher les valeurs propres de G et dire si la méthode de Gauss-seidel converge
- 5) En cas de convergence des 2 méthodes, quelle est celle qui converge plus rapidement ?

Exercice II

Soit $T(x) = x^2 + bx + c$ où b et c sont des réels.

On suppose que $T(x)$ admet deux racines réelles α et β et on définit les suites suivantes :

$$x_{n+1} = -\left(\frac{bx_n + c}{x_n}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{(y_n^2 + by_n + c)\phi(y_n)}{y_n^2 + by_n + c} \quad \text{où } \phi \text{ une fonction de classe } C^1(\mathbb{R})$$

- 1) Montrer que si $|\beta| < |\alpha|$ alors (x_n) converge localement vers α
- 2) Déterminer l'ordre de convergence de la suite (x_n) lorsqu'elle converge
- 3) Montrer que la suite (x_n) est un cas particulier de la suite (y_n) pour une fonction ϕ que l'on précisera.
- 4) Montrer que si $0 < (\alpha - \beta)\phi(\alpha) < 2$ alors (y_n) converge localement vers α
- 5) En cas de convergence de (y_n) vers α , déterminer l'ordre de convergence
- 6) Si $\phi(x) = \frac{1}{2x + b}$, quelle méthode retrouve-t-on ? et quel est son ordre de convergence ?

Exercice III

Soient x_0, x_1 deux réels tels que $x_0 < x_1$, g une fonction de classe $C^3([x_0, x_1])$ et $P(x)$ le polynôme de degré 2 vérifiant :

$$P(x_0) = g(x_0); P(x_1) = g(x_1) \text{ et } P'(x_0) = g'(x_0)$$

Pour un x arbitraire dans $]x_0, x_1[$, on considère la fonction R définie par :

$$R(t) = g(t) - P(t) - \frac{g(x) - P(x)}{(x - x_0)^2(x - x_1)}(t - x_0)^2(t - x_1)$$

- 1) Vérifier que R s'annule en 3 points de $[x_0, x_1]$
- 2) Montrer que R' s'annule en 3 points de $[x_0, x_1]$
- 3) Dédire qu'il existe $\theta_x \in [x_0, x_1]$ tel que $R^{(3)}(\theta_x) = 0$
- 4) Conclure qu'il existe $\theta_x \in [x_0, x_1]$ tel que :

$$g(x) - P(x) = \frac{g^{(3)}(\theta_x)}{6}(x - x_0)^2(x - x_1)$$

$$5) \text{ On pose } h = x_1 - x_0 \text{ et } M_3 = \max_{x_0 \leq t \leq x_1} |g^{(3)}(t)|$$

$$a) \text{ Montrer que } |g(x) - P(x)| \leq \frac{2M_3h^3}{81} \quad \forall x \in]x_0, x_1[$$

$$b) \text{ Dédire que } \left| \int_{x_0}^{x_1} (g(x) - P(x)) dx \right| \leq \frac{2}{81} M_3 h^4$$

c) Trouver une constante C qui vérifie :

$$0 < C < \frac{2}{81} \text{ et } \left| \int_{x_0}^{x_1} (g(x) - P(x)) dx \right| \leq CM_3 h^4$$

6.3 F.S.O Session ordinaire 2011-2012 (Durée : 1h30)

Exercice I

Soit g une fonction de classe $C^3([a, b])$, On pose $M_3 = \max_{a \leq t \leq b} |g^{(3)}(t)|$

On considère 3 points distincts de l'intervalle $[a, b]$, $a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b$

1) En utilisant la base de Newton, écrire le polynôme P_2 de degré 2 qui vérifie $P_2(x_0) = g(x_0)$, $P_2(x_1) = g(x_1)$, $P_2(x_2) = g(x_2)$

2) En utilisant la base de Newton, écrire le polynôme H_2 de degré 2 qui vérifie $H_2(x_0) = g(x_0)$, $H_2'(x_0) = g'(x_0)$, $H_2(x_1) = g(x_1)$

3) Montrer qu'il existe $\theta \in [a, b]$ tel que : $[g(x_0), g(x_1), g(x_2)] = \frac{g^{(2)}(\theta)}{2!}$

4) En déduire que $[g(x_0), g(x_0), g(x_0)] = \frac{g^{(2)}(x_0)}{2!}$

Dans la suite on posera $h = (x_1 - x_0)$

5) Montrer que : $\forall x \in]x_0, x_1[$, il existe $\theta \in]x_0, x_1[$ tel que :

$$g(x) - H_2(x) = \frac{g^{(3)}(\theta)}{6}(x - x_0)^2(x - x_1)$$

6) Déduire que : $\forall x \in]x_0, x_1[$ on a $|g(x) - H_2(x)| \leq \frac{2h^3 M_3}{81}$

7) En calculant $\int_{x_0}^{x_1} H_2(t) dt$, montrer qu'on peut approcher $\int_{x_0}^{x_1} g(t) dt$ par :

$$\int_{x_0}^{x_1} g(t) dt \approx \frac{2h}{3} g(x_0) + \frac{h}{3} g(x_1) + \frac{h^2}{6} g'(x_0) (*)$$

8) Application : $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$

a) Calculer $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x} dx$ et donner une approximation à l'aide de (*)

b) Que donne l'approximation (*) dans le cas de $\int_0^{\frac{2}{3}} x^2 dx$? Commentez

Exercice II

Soient E et λ deux réels positifs, ϕ , h et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\phi(x) = \frac{E}{x}; \quad h(x) = x + \lambda(\phi(x) - x); \quad g(x) = a\frac{E}{x} + bx + c\frac{x^3}{E}$$

1) Le schéma : $\{x_{n+1} = \phi(x_n), x_0 \text{ donné}\}$ converge-t-il vers $\sqrt{E}$?

2) Pour quelles valeurs de λ a-t-on convergence locale vers $\sqrt{E}$ du schéma : $\{x_{n+1} = h(x_n), x_0 \text{ donné}\}$?

3) Trouver la valeur optimale λ_0 de λ qui assure la convergence la plus rapide puis comparer avec la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - E$

- 4) On cherche les constantes a, b, c qui vérifient les conditions : $g(\sqrt{E}) = \sqrt{E}$;
 $g'(\sqrt{E}) = 0$ et $g''(\sqrt{E}) = 0$ (**)
- a) En posant $X^T = (a, b, c)$, écrire le système linéaire $AX = B$ qui en résulte
 - b) Résoudre le système linéaire $AX = B$ par la méthode de Gauss sans pivot
 - c) Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$
- 5) On suppose que le schéma $\{x_{n+1} = g(x_n), x_0 \text{ donné}\}$ converge sous les conditions (**) (valeurs de a, b, c trouvées au 4) b)
- a) Quel est son ordre de convergence p ?
 - b) Donner la constante d'erreur asymptotique C

6.4 F.S.O Session de rattrapage 2011-2012 (Durée : 1h30)

Exercice I : (7 points)

Soit $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $g(x) = \frac{3x - x^3}{2}$

On considère le schéma itératif suivant : $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$; avec x_0 donné.

- 1) Montrer que la fonction g est croissante et déterminer l'image $g([-1, 1])$
- 2) Trouver les points fixes de la fonctions g
- 3) On veut étudier la convergence de la suite (x_n)
- 3.a) Etudier la convergence locale de (x_n) vers chacun des points fixes de g
- 3.b) Pour tout choix initial $x_0 \in]0, 1[$, montrer que (x_n) est croissante
- 3.c) Dédurre que si $x_0 \in]0, 1[$ alors (x_n) converge vers l'un des points fixes de g qu'on précisera et qu'on notera θ_1
- 3.d) Déterminer l'ordre de convergence vers θ_1 , et la constante d'erreur asymptotique
- 3.e) La suite (x_n) peut-elle converger vers les autres points fixes ? si oui, indiquer le choix de $x_0 \in [-1, 1]$ qui permettrait cette convergence.

Exercice II (7 points)

On considère le système linéaire $(S_1) : AX = B$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1) On cherche à résoudre le système (S_1) par les méthodes directes
- 1.a) Donner les matrices de Gauss M_1 et M_2 qui permettent de transformer (S_1) en un système (S_2) de la forme $UX = C$ où U est triangulaire supérieure. Donner U et C
- 1.b) Donner la solution X en solvant le système (S_1) ou (S_2)
- 1.c) Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure
- 2) On cherche à résoudre (S_1) par les méthodes indirectes de type : $X_{k+1} = TX_k + D$
- 2.a) Donner la matrice J de Jacobi associée à la matrice A
- 2.b) Donner la matrice G de Gauss-Seidel associée à la matrice A
- 2.c) Trouver les valeurs propres de J et de G
- 2.d) Etudier la convergence pour les 2 méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel

Exercice III (6 points)

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , On pose $\Delta g = 4g(0) - 8g(\frac{1}{2}) + 4g(1)$

- 1) Vérifier que pour tout polynôme Q de degré ≤ 2 , on a $\Delta Q = Q''(\frac{1}{2})$
- 2) Donner en fonction de $g(0)$, $g(\frac{1}{2})$ et $g(1)$ le polynôme P de degré 2 qui vérifie : $P(0) = g(0)$, $P(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ et $P(1) = g(1)$
- 3) On pose pour tout $x \in [0, 1]$, $r(x) = g(x) - P(x)$
 - 3.a) Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que : $r''(\theta) = 0$
 - 3.b) Dédire qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que : $[g(0), g(\frac{1}{2}), g(1)] = \frac{g''(\theta)}{2}$
 - 3.c) Vérifier que $[g(0), g(\frac{1}{2}), g(1)] = \frac{1}{2}\Delta g$
 - 3.d) Montrer que $g''(\frac{1}{2}) - \Delta g = r''(\frac{1}{2})$

6.5 F.S.O Session ordinaire 2010-2011 (Durée :1h30)

Soient x_0 et x_1 deux réels $\in [0, 1]$ tels que $x_0 < x_1$, g une fonction de classe $C^3([x_0, x_1])$ et $P(x)$ le polynôme de degré 2 vérifiant :

$$P(x_0) = g(x_0); P(x_1) = g(x_1) \text{ et } P'(x_1) = g'(x_1) (*)$$

I

Pour un x arbitraire dans $]x_0, x_1[$, on considère la fonction R définie par :

$$R(t) = g(t) - P(t) - \frac{g(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)^2} (t - x_0)(t - x_1)^2$$

a) Vérifier que R s'annule en 3 points de $[x_0, x_1]$

b) Montrer que R' s'annule en 3 points de $[x_0, x_1]$

c) Dédurre qu'il existe $\theta_x \in]x_0, x_1[$ tel que $R^{(3)}(\theta_x) = 0$

d) Conclure qu'il existe $\theta_x \in]x_0, x_1[$ tel que :

$$g(x) - P(x) = \frac{g^{(3)}(\theta_x)}{6} (x - x_0)(x - x_1)^2$$

II

On prend $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifiant $(*)$,
c.a.d : $P(0) = g(0); P(1) = g(1)$ et $P'(1) = g'(1)$

A

a) Montrer que les réels a, b et c sont solution du système linéaire :

$$(S_1) : AX = B1$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } B1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Donner les matrices de Gauss M_1 et M_2 qui permettent de transformer (S_1) en un système (S_2) de la forme $UX = B_2$ où U est triangulaire supérieure

c) Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure

d) Trouver les réels a, b et c en solvant (S_2) , (S_1) ou autrement.

e) Montrer que $|g(x) - P(x)| \leq \frac{4}{27} \forall x \in]0, 1[$

f) Montrer que $\left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 P(x) dx \right| \leq \frac{1}{12}$

B

On subdivise $[0, 1]$ en N sous intervalles de même longueur h

a) Ecrire la formule des trapèzes composée approximant $\int_0^1 g(x)dx$

b) Quel nombre de sous-intervalles faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-3}

c) On prend $N = 3$

i) Evaluer numériquement $\int_0^1 g(x)dx$ par la méthode des trapèzes composée

ii) Calculer l'erreur d'intégration par la formule des trapèzes composée

6.6 F.S.O Session Rattrapage 2010-2011 (Durée : 1h30)

Barème : 1 point par question (la **réponse** doit être **justifiée**) + 1 point pour présentation

Exercice I

On cherche à résoudre le système $Ax = b$ par les méthodes directe et indirecte.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée vérifiant les conditions suivantes :

$$a_{ii} > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$a_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

Soit D la matrice diagonale ($d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

1) Montrer que la matrice D est inversible et donner D^{-1}

2) Montrer que la matrice A vérifie : $\sum_{j \neq i, j=1}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad 1 \leq i \leq n$ (*)

3) Donner l'expression du terme général de la matrice $A^{(1)}$ obtenue après la première étape du procédé d'élimination de Gauss sans pivot

4) Montrer que la matrice B d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de $A^{(1)}$ en enlevant la première ligne et la première colonne vérifie une relation similaire à (*)

5) Ecrire le schéma itératif de Jacobi $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$

(T étant la matrice de Jacobi associée à A)

6) Expliciter les composantes $x_j^{(k+1)}$ en fonction de celles de $x^{(k)}$ et de C

7) Montrer que la méthode de Jacobi converge

(on pourra montrer que $\|T\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |t_{ij}| < 1$)

8) Application :

$$\text{On donne } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Donner la matrice T de Jacobi associée à A

b) Calculer la 1^{ère} itération $x^{(1)}$ obtenue en utilisant la méthode de Jacobi

Exercice II

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x \exp(x)$

1) Montrer qu'il existe une solution unique $\theta \in]0, +\infty[$ qui vérifie $g(\theta) = 1$

2) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $\frac{g''(x)}{g'(x)} \leq 2$

3) On considère la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{g(x) - 1}{g'(x)}$

a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, il existe $c \in]0, x[$ tel que : $h(x) - \theta = \frac{1}{2}(\theta - x)^2 \frac{g''(c)}{g'(x)}$

b) Dédire que $\forall x \in]0, +\infty[$, $h(x) \geq \theta$

4) On considère la méthode itérative définie par : la donnée de $x_0 \geq \theta$ et $x_{n+1} = h(x_n)$

i) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

ii) Dédire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite

iii) Montrer que pour tout $x \geq \theta$ on a $h(x) - \theta \leq (\theta - x)^2$

iv) Dédire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k - \theta \leq (x_0 - \theta)^p$ où p est un entier à préciser

4) Trouver le polynôme P de degré 1 qui interpole la fonction g aux points 0 et

1

5) Montrer que $|g(x) - P(x)| \leq \frac{3e}{8}$ où $e = \exp(1)$

6.7 F.S.O Examen 2009-2010

Exercice I

Soient $P^\varepsilon(x)$ le polynôme interpolant h aux points $0, \varepsilon$ et 1

1) Exprimer $P^\varepsilon(x)$ dans la base de Newton

2) Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon) - h(0)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(1) - h(\varepsilon)}{1 - \varepsilon}$$

3) En déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^\varepsilon(x) = P(x) = h(0) + xh'(0) + (h(1) - h(0) - h'(0))x^2$

4) Montrer que le polynôme $P(x)$ trouvé en 3) est l'unique polynôme qui vérifie :

$$P(0) = h(0); P(1) = h(1) \text{ et } P'(0) = h'(0)$$

4) Pour un x arbitraire dans $]0, 1[$, on pose $K = \frac{h(x) - P(x)}{x^2(x-1)}$

soit Ψ la fonction définie par :

$$\Psi(t) = h(t) - P(t) - Kt^2(t-1) = h(t) - P(t) - \frac{h(x) - P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$$

a) Vérifier que $\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi(1) = \Psi(x) = 0$

b) Montrer que Ψ' s'annule en 3 points de $[0, 1]$

c) Déduire qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que $\Psi^{(3)}(\theta) = 0$

d) Conclure que $h(x) - P(x) = \frac{h^{(3)}(\theta)}{6}x^2(x-1)$

5) a) On pose $M_3 = \max_{0 \leq t \leq 1} |h^{(3)}(t)|$

Montrer que $|h(x) - P(x)| \leq \frac{2M_3}{81} \quad \forall x \in [0, 1]$

b) Montrer que $\left| \int_0^1 (h(x) - P(x))dx \right| \leq \frac{M_3}{72}$

Exercice II

Soit h une fonction de classe $C^3(\mathbb{R})$ dont la dérivée et la dérivée seconde ne s'annulent pas au voisinage de a et telle que : $h(a) = 0$

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par la donnée de x_0 et les relations :

$$y_n = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{h(y_n)}{h'(y_n)}$$

On suppose que ces suites convergent vers a et que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a$ et $y_n \neq a$

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - a}{(x_n - a)^2} = \frac{h''(a)}{2h'(a)}$

2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)(y_n - a)} = \frac{h''(a)}{h'(a)}$

- 3) Démontrer que l'ordre de convergence de la suite (x_n) est au moins 3
 4) Démontrer que l'ordre de convergence de la suite (y_n) est au moins 3

Exercice III

Soient h une fonction de classe $C^2([a, b])$; α et β 2 réels de $[a, b]$

On suppose que $\alpha < \beta$ et on considère sur $[\alpha, \beta]$ les fonctions :

$$\Psi_0(x) = 1 - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3}; \Psi_2(x) = (\beta - \alpha) \left(\frac{(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)} - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} \right)$$

$$\Psi_1(x) = \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3}; \Psi_3(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \left(\frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} \right)$$

1) Calculer $\Psi_k(\alpha)$; $\Psi_k(\beta)$, $\Psi'_k(\alpha)$ et $\Psi''_k(\alpha)$ pour $0 \leq k \leq 3$

2) Soit P le polynôme défini sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$P(x) = h(\alpha)\Psi_0(x) + h(\beta)\Psi_1(x) + h'(\alpha)\Psi'_2(x) + h(\alpha)\Psi''_3(x)$$

Montrer P que vérifie les conditions suivantes :

$$P(\alpha) = h(\alpha); P(\beta) = h(\beta); P'(\alpha) = h'(\alpha); P''(\alpha) = h''(\alpha)$$

3) Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = (x - \alpha)^3(\beta - \alpha)$

On suppose que h est de classe $C^4([a, b])$ et on pose :

$$g(t) = h(t) - P(t) = \frac{Q(t)}{Q(x)}(h(x) - P(x))$$

a) Montrer que g admet 3 zéros

b) Montrer que g' admet 3 zéros

c) Montrer que g'' admet 3 zéros

d) Montrer que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ il existe $\theta \in]\alpha, \beta[$ tel que :

$$h(x) - P(x) = \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} Q(x)$$

e) Dédire que $|h(x) - P(x)| \leq \frac{9}{2048} \max_{0 \leq t \leq 1} |h^{(4)}(t)| \quad \forall x \in [a, b]$

6.8 F.S.O Session ordinaire 2008/2009

Exercice I

Soient $h = \beta - \alpha$ avec α et $\beta \in [a, b]$ et g une fonction de classe $C^4([a, b])$.

Montrer que :

$$1) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \frac{h}{2} \{g(\alpha) + g(\beta)\} + \frac{h^2}{12} \{g'(\alpha) - g'(\beta)\} + \frac{1}{24} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)^2 (x - \alpha)^2 g^{(4)}(x) dx$$

$$2) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \frac{h}{2} \{g(\alpha) + g(\beta)\} + \frac{h^2}{12} \{g'(\alpha) - g'(\beta)\} + \frac{h^5}{720} g^{(4)}(\theta) \text{ avec } \theta \in [\alpha, \beta]$$

3) On suppose que $[a, b]$ est subdivisé en n sous intervalles

$$[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\text{Montrer que : } \int_a^b g(t) dt = \frac{h}{2} \{g(a) + 2[g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1})] + g(b)\} + \frac{h^2}{12} \{g'(a) - g'(b)\} + \frac{(b-a)^5}{720} g^{(4)}(\lambda) \text{ où } \lambda \in [a, b] \text{ et } h = x_{i+1} - x_i$$

(Justifiez bien vos réponses pour montrer la différence entre $g^{(4)}(x)$, $g^{(4)}(\theta)$ et $g^{(4)}(\lambda)$)

4) On prend $g(x) = \exp(-x^2)$ et on donne $g(1) = 0.368$, $g(\frac{1}{2}) = 0.779$ et $g'(1) = -0.736$

En prenant $\max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(4)}(t)| = 12$, donner une approximation de $\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ avec précision 10^{-2}

Exercice II

Soient δ et $\varepsilon \in]0, 1[$ et g une fonction $C^4([a, b])$ avec $a < b$.

On considère α et $\beta \in [a, b]$ avec $\alpha < \beta$ et on pose $h = \beta - \alpha$

Soit $P^{\varepsilon, \delta}(x)$ le polynôme interpolant g aux points α , $\alpha + \varepsilon$, β , et $\beta + \delta$

1) Exprimer $P^{\varepsilon, \delta}(x)$ dans la base de Newton

2) Donner l'expression de l'erreur d'interpolation : $e^{\varepsilon, \delta}(x) = g(x) - P^{\varepsilon, \delta}(x)$

3) On définit :

$$[g(\alpha), g(\alpha)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g(\alpha), g(\alpha + \varepsilon)] \text{ et } [g(\beta), g(\beta)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} [g(\beta), g(\beta + \delta)]$$

Montrer que :

$$i) [g(\alpha), g(\alpha), g(\beta)] = \frac{1}{h} \left\{ \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{h} - g'(\alpha) \right\}$$

$$ii) [g(\alpha), g(\alpha), g(\beta), g(\beta)] = \frac{1}{h^2} \left\{ g'(\alpha) - 2 \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{h} + g'(\beta) \right\}$$

$$4) \text{ Soit } H(x) = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} P^{\varepsilon, \delta}(x) \text{ et } M_4 = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |g^{(4)}(t)|$$

Montrer que $|g(x) - H(x)| = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} |e^{\varepsilon, \delta}(x)| \leq \frac{h^4 M_4}{384} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

Exercice III

On définit la fonction $h(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [0, 1[$

1) Calculer $H(x) = \int_0^x h(t) dt$ où $x < 1$ et donner la valeur de $H(\frac{2}{3})$

2) Donner l'expression du polynôme de Lagrange $Q(x)$ interpolant h en $0, \frac{1}{3}$ et

$\frac{2}{3}$

3) Trouver les coefficients C_0, C_1, C_2 tels que pour tout polynôme P de degré ≤ 2

on ait : $\int_0^{\frac{2}{3}} P(t) dt = C_0 P(0) + C_1 P(\frac{1}{3}) + C_2 P(\frac{2}{3})$ (E)

4) Utiliser l'égalité (E) pour donner une valeur approchée de $\log(3)$

6.9 F.S.O Session rattrapage 2008-2009

Soient x_0, x_1, x_2 et x_3 4 points distincts de $[a, b]$ et g une fonction de classe $C^4([a, b])$ avec $a < b$, soit $p(x)$ le polynôme interpolant g aux points x_0, x_1, x_2 et x_3

1) Exprimer $P(x)$ dans la base de Lagrange $(L_i(x)), i = 0, 1, 2, 3$

2) Si $g(x)$ est un polynôme de degré ≤ 3 , quelle est l'erreur d'interpolation :
 $e(x) = g(x) - P(x)$

3) Montrer que $L_i(x) = \frac{\pi_4(x)}{(x - x_i)\pi_4'(x_i)}$ où $\pi_4(x) = \prod_{i=0}^3 (x - x_i)$

4) Soit $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \theta)$.

Montrer que si les 3 racines de $Q(x)$ sont distinctes alors la méthode de Newton avec $x_0 = \frac{\beta + \alpha}{2}$ converge vers θ en un seul pas.

5) Soit $T(x) = x^2 + bx + c$, admettant deux racines réelles α et β

On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_{n+1} = -(\frac{bx_n + c}{x_n}), n \geq 0$ et x_0 donné

Montrer que si $|\alpha| > |\beta|$ alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α

6.10 F.S.O Session ordinaire 2007-2008(Durée : 1h30)

Soient h une fonction de classe $C^3([a, b])$; α et β deux réels de $[a, b]$

On suppose que $\alpha < \beta$ et on considère sur $[\alpha, \beta]$ les fonctions :

$$\Psi_0(x) = 1 - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3}; \Psi_2(x) = (\beta - \alpha) \left(\frac{(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)} - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} \right)$$

$$\Psi_1(x) = \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3}; \Psi_3(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \left(\frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} - \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} \right)$$

1) Soit P le polynôme défini sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$P(x) = h(\alpha)\Psi_0(x) + h(\beta)\Psi_1(x) + h'(\alpha)\Psi_2(x) + h''(\alpha)\Psi_3(x)$$

Montrer que P vérifie les conditions suivantes :

$$P(\alpha) = h(\alpha); P(\beta) = h(\beta); P'(\alpha) = h'(\alpha); P''(\alpha) = h''(\alpha)$$

P est dit interpolant d'Hermite de h aux points α et β .

2) Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = (x - \alpha)^3(x - \beta)$

On suppose que h est de classe $C^4([a, b])$ et on pose :

$$g(t) = h(t) - P(t) = \frac{Q(t)}{Q(x)}(h(x) - P(x))$$

a) Montrer que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ il existe $\theta \in]\alpha, \beta[$ tel que :

$$h(x) - P(x) = \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} Q(x)$$

b) Dédurre que $|h(x) - P(x)| \leq \frac{9}{2048} \max_{0 \leq t \leq 1} |h^{(4)}(t)| \quad \forall x \in [a, b]$

4) i) Calculer les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} \Psi_k(x) dx$ pour $0 \leq k \leq 3$

ii) En déduire l'expression de $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) dx$ en fonction de $\alpha, \beta, h(\alpha), h(\beta), h'(\alpha), h''(\alpha)$

5) On suppose que la fonction h est de classe $C^4([a, b])$.

En posant $M_4 = \max_{a \leq t \leq b} |h^{(4)}(t)|$, montrer que : $\left| \int_{\alpha}^{\beta} (h(x) - P(x)) dx \right| \leq M_4 \frac{(\beta - \alpha)^5}{480}$

6) On considère une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ régulière de pas $h = \frac{(b - a)}{n}$

On note P_j l'interpolant d'Hermite de h aux points x_j et x_{j+1}

On pose $H_n = \sum_{j=0}^{j=n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_j(x) dx$

6) Montrer que : $H_n = \frac{3}{4} I_n^g + \frac{1}{4} I_n^d + \frac{(b - a)^2}{4n^2} \sum_{j=0}^{j=n-1} h'(x_j) + \frac{(b - a)^3}{24n^3} \sum_{j=0}^{j=n-1} h''(x_j)$

7) Si h est de classe $C^2([a, b])$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b - a)}{n} \sum_{j=0}^{j=n-1} h'(x_j) = h(b) - h(a) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b - a)}{n} \sum_{j=0}^{j=n-1} h''(x_j) = h'(b) - h'(a)$$

- 8) Si h est de classe $C^4([a, b])$, montrer que : $\left| \int_a^b h(x) dx - H_n \right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{480n^4}$
- 9) Application : En admettant que $M_4 = 12$, donner une valeur approchée de $\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ avec la précision $\varepsilon = 10^{-4}$

6.11 F.S.O Examen blanc 2007-2008

Exercice I

Soit f une fonction de classe $C^3[a, b]$ et soient α et β deux réels dans $[a, b]$.

On suppose $\alpha < \beta$ et on note $q(x)$ le polynôme interpolant f aux points : $\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}$ et β .

- 1) Exprimer $q(x)$ dans la base de Lagrange (1 point)
- 2) Exprimer $q(x)$ dans la base de Newton puis calculer $\int_{\alpha}^{\beta} q(x)dx$ (1.5 point)
- 3) Donner l'erreur d'interpolation $e(x) = f(x) - q(x)$ pour $x \in [\alpha, \beta]$ (0.5 point)
- 4) Dédire que $|\int_{\alpha}^{\beta} f(x) - q(x)dx| \leq M_3 \frac{(\beta - \alpha)^4}{192}$ où $M_3 = \max_{\alpha < t < \beta} |f^{(3)}(t)|$ (1.5 point)
- 5) Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$ et $q_k(x)$ le polynôme interpolant f aux points : $x_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_k(x)dx$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$ (0.5 point)

- 6) Dédire que $|\int_a^b f(x) - S_n| \leq M_3 \frac{(b-a)^4}{192n^3}$ (1 point)

Exercice II

Soient h une fonction de classe $C^2([a, b])$; α et β deux réels de $[a, b]$

On suppose que $\alpha < \beta$ et on considère sur $[\alpha, \beta]$ les fonctions :

$$\Psi_0(x) = 2 \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} - 3 \frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} + 1; \phi_0(x) = (\beta - \alpha) \left(\frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} - 2 \frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} + \frac{(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)} \right)$$

$$\Psi_1(x) = 3 \frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} - 2 \frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3}; \phi_1(x) = (\beta - \alpha) \left(\frac{(x - \alpha)^3}{(\beta - \alpha)^3} - \frac{(x - \alpha)^2}{(\beta - \alpha)^2} \right)$$

- 1) Calculer $\Psi_0(\alpha), \Psi_0'(\alpha), \Psi_0(\beta), \Psi_0'(\beta)$ et $\phi_0(\alpha), \phi_0'(\alpha), \phi_0(\beta), \phi_0'(\beta)$

- 2) Soit P le polynôme défini sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$P(x) = h(\alpha)\Psi_0(x) + h(\beta)\Psi_1(x) + h'(\alpha)\phi_0(x) + h'(\beta)\phi_1(x)$$

Vérifier que P satisfait les conditions suivantes (dites conditions de Hermite) :

$$P(\alpha) = h(\alpha), P'(\alpha) = h'(\alpha), P(\beta) = h(\beta) \text{ et } P'(\beta) = h'(\beta)$$

- 3) Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$

On suppose que h est de classe $C^4([a, b])$ et on pose :

Montrer que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ il existe $\theta \in]\alpha, \beta[$ tel que :

$$h(x) - P(x) = \frac{h^{(4)}(\theta)}{4!} Q(x)$$

(On pourra montrer que la fonction $g(t) = h(t) - P(t) = \frac{Q(t)}{Q(x)}(h(x) - P(x))$ et montrer qu'elle admet 3 zéros et que sa dérivée admet 4 zéros)

4) i) Calculer les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} \Psi_k(x) dx$ et $\int_{\alpha}^{\beta} \phi_k(x) dx$ pour $k = 0, 1$

ii) Dédurre l'expression de $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) dx$ en fonction de $\alpha, \beta, h(\alpha), h(\beta), h'(\alpha)$ et $h'(\beta)$

5) On suppose que la fonction h est de classe $C^4([a, b])$.

En posant $M_4 = \max_{a \leq t \leq b} |h^{(4)}(t)|$, montrer que : $\left| \int_{\alpha}^{\beta} (h(x) - P(x)) dx \right| \leq M_4 \frac{(\beta - \alpha)^5}{720}$

6) On considère une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ régulière de pas $h = \frac{(b-a)}{n}$

On note P_j l'interpolant d'Hermite de h aux points x_j et x_{j+1}

On pose $H_n = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} P_j(x) dx$

6) On note T_n l'intégrale approchée de $\int_a^b h(x) dx$ par la méthode des trapèzes

Montrer que : $H_n = T_n + \frac{(b-a)^2}{12n^2} (h'(a) - h'(b))$

7) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$

8) Si h est de classe $C^4([a, b])$, montrer que : $\left| \int_a^b h(x) dx - H_n \right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{720n^4}$

9) Application : En admettant que $M_4 = 12$, donner une valeur approchée de $\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ avec la précision $\varepsilon = 10^{-4}$

6.12 F.S.O Devoir à faire chez soi 2007-2008

Soit P_3 un polynôme de degré 3 et $f \in C^2([a, b])$ avec $f^{(2)} \prec 0$

Soit $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ et I_n^T l'approximation de $I(f)$ par la méthode des trapèzes.

Soit I_m^n (resp. I_g^n) l'approximation de $I(f)$ par la méthode des triangles droits (resp. gauches)

1) Ecrire les expressions de I_g^n, I_m^n et I_n^T (1 point)

2) Montrer que $I_n^T = \frac{I_g^n + I_d^n}{2}$ (1 point)

3) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^T = I(f)$ (1 point)

4) Prouver que $|I(f) - I_n^T| \leq M_2(b-a) \frac{(f(b) - f(a))}{2}$ (1 point)

5) Etablir les inégalités : $(b-a)f(\frac{b+a}{2}) \geq \int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f(\frac{f(b)+f(a)}{2})$ (2 points)

6) Etablir l'égalité : $\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6}[P_3(a) + 4P_3(\frac{b+a}{2}) + P_3(b)]$ (2 points)

7) Soit $a = x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$

Montrer que :

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f^{(2)}(x)dx$ (2 points)

8) Si $x_{i+1} - x_i = h$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, montrer que l'erreur d'approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la méthode des trapèzes est de la forme : $-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\theta)$, $\theta \in [x_i, x_{i+1}]$ (1 point)

6.13 F.S.O Session ordinaire Janvier 2003

Soit g une fonction de classe $\mathbb{C}^p$ avec $p \geq 1$ et $g(x^*) \neq 1$

on suppose que le procédé itératif $x_{n+1} = g(x_n)$ vérifie :

$$x_{n+1} - x^* = (k + \delta_n)(x_n - x^*) \text{ avec } |k| < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

$$\text{soit } z_n = x_n + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

1) Chercher : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - x^*}{x_n - x^*}$ et comparer la vitesse de convergence des suites (x_n) et (z_n) .

2) on généralise le procédé précédent de la manière suivante :

$$\text{on définit la fonction } h \text{ par : } h(x) = \frac{xg(g(x)) - (g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$

puis on pose $y_n = g(x_n)$, $z_n = g(y_n)$ et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour $n = 0, 2, 3, \dots$

a) Prouver que $g(x^*) = x^* \Leftrightarrow h(x^*) = x^*$

b) On suppose de plus que : $g'(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$ et que : $g^{(p)}(x^*) = p!A \neq 0$

$$\text{en prenant } x^* = 0 \text{ et } g(x) = Ax^p + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}g^{(p+1)}(\theta x), 0 < \theta < 1,$$

montrer que : $h(x) = -A^2x^{2p-1} + O(x^{2p})$ si $p > 1$ $h(x) = O(x^2)$ si $p = 1$