Cours d'analyse numérique
SMI-S4

Introduction

L'objet de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques, en général issus de problèmes réels, et dont on cherche à calculer la solution à l'aide d'un ordinateur.

Exemples de problèmes à résoudre:

- Systèmes linéaires ou non linéaires.
- Optimisation.
- Equations différentielles ou aux dérivées partielles.

etc...

Références pour le cours:

(1) P. G. **Ciarlet**
Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
(2) A. **Quarteroni**
Méthodes numériques pour le calcul scientifique.
(3) M. **Sibony** & J. Cl. **Mardon**
Analyse numérique 1: Systèmes linéaires et non linéaires.
Analyse numérique 2: Approximations et équations différentielles.

1 Résolution de systèmes linéaires

Objectifs:

On note par $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre N.

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^N$.

On cherche à résoudre le système linéaire:

trouver $x \in \mathbb{R}^N$, tel que $Ax = b$.

Nous allons voir deux types de méthodes:

- Méthodes directes,
- Méthodes itératives.

Selon le type et la taille d'une matrice, on utilise une méthode directe ou une méthode itérative.

1.1 Quelques rappels d'algèbre linéaire

1.1.1 Matrices

- La *transposée*, d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$,est une matrice $A^T = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$, avec $a'_{i,j} = a_{j,i}$ pour $1 \leq i, j \leq N$.

On a evidemment les propriétés suivantes:

$(A^T)^T = A$;
$(A + B)^T = A^T + B^T$;
$(AB)^T = B^T A^T$;
$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
$\det(A^T) = \det(A)$.
Si A est inversible $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- La matrice *adjointe* de A est $A^* = \overline{A^T}$.on a alors les propriétés:

$(A^*)^* = A$;
$(A + B)^* = A^* + B^*$;
$(AB)^* = B^* A^*$;
$(\alpha A)^* = \alpha A^*, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
$\det(A^*) = \overline{\det(A)}$;
Si A est inversible $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est *symétrique* si $A^T = A$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est *hermitienne* si $A^* = A$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $A^T A = AA^T = I_N$.
(c'est à dire $A^T = A^{-1}$)
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est *unitaire* si $A^* A = AA^* = I_N$.
(c'est à dire $A^* = A^{-1}$).

On dit que A est *normale* si $A^* A = AA^*$.

- Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ la trace de A est définie par $tr(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,i}$.

1.1.2 Normes matricielles

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On définit $||.||$ une norme vectorielle sur E, c'est-à-dire une application: $E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$.

(iii) $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exemples de normes vectorielles sur $\mathbb{R}^N$:

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

1) $\quad x \to ||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N|$

2) $\quad x \to ||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_N|^2}$

3) $\quad x \to ||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|)$

sont trois normes vectorielles sur $\mathbb{R}^N$.

Définition 2:

Soit $||.||$ une norme vectorielle sur $E = \mathbb{R}^N$.

On appelle une norme matricielle induite, par cette norme vectorielle, sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, qu'on note encore par $||.||$:

$$A \to ||A|| = sup\{||Ax||, x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}.$$

Remarque:

on dit aussi que c'est une norme matricielle *subordonnée* ou associée à la norme vectorielle.

Proposition 1 *Si $||.||$ est une norme matricielle induite (par une norme vectorielle $||.||$ sur $E = \mathbb{R}^N$) sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, alors on a les propriétés suivantes:*

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^N$ et $\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,
$$||Ax|| \leq ||A||.||x||.$$
(2) $||A|| = max\{||Ax||, x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}$.

(3) $||A|| = max\{\frac{||Ax||}{||x||}, x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0\}$.

Démonstration

(1)Soit $x \in \mathbb{R}^N$ non nul,

$y = \frac{1}{||x||}x \implies ||y|| = 1$

$\Longrightarrow ||Ay|| \leq ||A||$ (par définition)

$\Longleftrightarrow ||A\frac{1}{||x||}x|| \leq ||A||$

$\Longleftrightarrow \frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A||$

$\Longleftrightarrow ||Ax|| \leq ||A||.||x||$.

Si $x = 0$ alors $Ax = 0$ et l'inégalité

$||Ax|| \leq ||A||.||x||$ est encore vérifiée.

(2) $||A|| = sup\{||Ax||, x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}$

Comme l'application $x \to ||x||$ est continue sur $\{x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}$

qui est un compact de $\mathbb{R}^N$,

$\exists x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}$ tel que:

$$||A|| = ||Ax_0|| = max\{||Ax||, x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}.$$

(3) Si x est non nul,

$$\frac{||Ax||}{||x||} = ||A(\frac{x}{||x||})||$$

et $\frac{x}{||x||} \in \{x \in \mathbb{R}^N, ||x|| = 1\}$.

Proposition

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$, on a

1) $||A||_1 = \sup_{||x||_1=1} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|$.

2) $||A||_\infty = \sup_{||x||_1=1} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

$||A||_1 = \max(4, 2) = 4$ et $||A||_\infty = 3$.

1.1.3 Rayon spectral

Définition:

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

On dit que λ est une *valeur propre* de A, s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^N, u \neq 0$ et tel que: $Au = \lambda u$.

On dit alors que u est un vecteur propre de A associé à λ.

Proposition 2 *On a l'équivalence suivante:*

λ *est une valeur propre de* $A \Longleftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$.

Les valeurs propres de A sont donc les racines du polynôme $P_A(x) = \det(A - xI)$, appelé le *polynôme caractéristique* de A.

C'est un polynôme de degré N, il a donc N racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

La matrice A a donc N valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes): $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$.

On montre qu'on a : $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i \text{ et } tr(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i}$

Propriété:

Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice *symétrique*

alors toutes ses *valeurs propres* sont *réelles*

et il existe une matrice *orthogonale* P ($P^{-1} = P^T$) telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0.. & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} = D$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

A est donc semblable à la matrice diagonale D.

Définition: On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$,

Les valeurs propres de A sont: $2, -1, -1$.

Les vecteurs propres sont:

Pour $\lambda_1 = -1 : \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Pour $\lambda_2 = 2 : \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Si $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque: Si on prend $P' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

son inverse: $P^{-1} = P^T$ et on a:

$P'^T AP'$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Définition

Le rayon spectral de A est

$$\rho(A) = max\{|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Proposition 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, alors pour toute norme matricielle, (induite ou non) on a:*

$$\rho(A) \leq ||A||$$

Démonstration

Soit λ une valeur propre de A telle que : $\rho(A) = |\lambda|$.

$\exists p \in \mathbb{R}^N$ non nul, tel que $Ap = \lambda p$.

p vecteur non nul $\Longrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^N$ tel que $pq^T \neq 0$.
$\Longrightarrow \rho(A)||pq^T|| = |\lambda|.||pq^T|| = ||(\lambda p)q^T||$
$= ||(Ap)q^T|| = ||A(pq^T)||$
$\leq ||A||.||pq^T||$
$\Longrightarrow \rho(A) \leq ||A||$.
On montre aussi le résultat suivant:

Proposition 4 *$\forall \epsilon > 0$ et $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que:*

$$||A|| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

On montre aussi la proposition suivante:

Proposition 5 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, alors on a*
$||A||_2 = \sup_{||x||_2=1} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$.

Théorème
On désigne par I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
1) Soit $||.||$ une norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est telle que $||A|| < 1$, alors
la matrice $I_N + A$ est inversible et
$$||(I_N + A) - 1|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$
2) Si $I_N + A$ est singulière, alors $||A|| \geq 1$, pour toute norme matricielle sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
Démonstration:
1)$(I_N + A)x = 0$
$\Longrightarrow ||x|| = ||Ax|| \leq ||A||.||x||$
Comme $||A|| < 1$, on a $x = 0$.
$\Longrightarrow I_N + A$ est inversible et on a
Comme $(I_N + A)^{-1} = I_N - A(I_N + A)^{-1}$
on a $||(I_N + A)^{-1}|| \leq 1 + ||A||.||(I_N + A) - 1||$
$\Longrightarrow (1 - ||A||).||(I_N + A)^{-1}|| \leq 1$
$\Longrightarrow ||(I_N + A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}$.
2) $I_N + A$ singulière$\Longleftrightarrow \det(I_N + A) = 0$
$\Longleftrightarrow \lambda = -1$ est une valeur propre de A
$\Longrightarrow 1 \leq \rho(A) \leq ||A||$.

1.1.4 Produit scalaire et matrices définies positives

Définition Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un produit scalaire sur E est une application de
$$E \times E \to \mathbb{K}$$
$$(x, y) \to < x, y >$$
qui vérifie les propriétés suivantes:
(i) $< x, x > \geq 0, , \forall x \in E$ et $< x, x >= 0 \Longrightarrow x = 0$.
(ii)$< \alpha(x + y), z >= \alpha < x, z > +\alpha < y, z >, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y, z \in E$

(iii)$< y, x >= \overline{< x, y >}, \forall x, y \in E$.
Exemple: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^N$,pour $x, y \in E$,
$x^T = (x_1, ..., x_N)$ et $y^T = (y_1, ..., y_N)$,
L'application $(x, y) \rightarrow < x, y >= y^T x = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.
Définition
Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est définie positive si
$$(Ax, x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$
Si l'inégalité stricte est remplacée par une inégalité au sens large (≥ 0), on dit que la matrice est semi-définie positive.
Définition: les mineurs principaux dominants de $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$
sont les N déterminants des sous-matrices de A:
$$(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, (1 \leq k \leq N).$$

Proposition 6 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.*

A est *définie positive* si et seulement si l'une des propriétés suivantes est satifaite:
(1) $(Ax, x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$.
(2) Les valeurs propres de A sont > 0.
(3) Les mineurs principaux dominants de A sont tous > 0.

1.2 Méthodes directes

Une méthode directe de résolution d'un système linéaire est une méthode qui calcule x, la solution exacte du système, après un nombre fini d'opérations élémentaires $(+, -, x, /)$.

1.2.1 Méthode de Gauss et factorisation LU

Méthode de Gauss Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^N$.
pb: trouver $x \in \mathbb{R}^N$, $Ax = b$.
Méthode de Gauss:
On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$.
On construit une suite de matrices et de vecteurs:
$$A^{(1)} \rightarrow A^{(2)} \rightarrow .. \rightarrow A^{(k)} \rightarrow ... \rightarrow A^{(N)}.$$
$$b^{(1)} \rightarrow b^{(2)} \rightarrow .... \rightarrow b^{(k)} \rightarrow .. \rightarrow b^{(N)}.$$
Les systèmes linéaires obtenus sont équivalents:
$$Ax = b \Longleftrightarrow A^{(k)}x = b^{(k)} \Longleftrightarrow A^{(N)}x = b^{(N)},$$
La matrice $A^{(N)}$ est triangulaire supérieure.
Si aucun pivot n'est nul:
Passage de $A^{(k)}$ à $A^{(k+1)}, si\ a_{k,k}^{(k)} \neq 0$:
- Pour $i \leq k$ et pour $j = 1, 2, ..., N$
$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} \text{ et } b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}.$$

- Pour $i > k$:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} a_{k,j}^{(k)},$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} b_k^{(k)},$$

pour $i = j, ..., N$.

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,N}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{k,N}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & a_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{N,N}^{(k)} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq N.$$

La matrice $A^{(N)}$ est alors sous la forme:

$$A^{(N)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,N}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & . & \ddots & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{k,N}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{N,N}^{(N)} \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire $A^{(N)}x = b^{(N)}$se fait en remontant et on calcule successivement: $x_N, x_{N-1}, \ldots\ldots$et x_1 :

$$\begin{cases} x_N = \frac{b_N^{(N)}}{a_{N,N}^{(N)}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}^{(N)}} (b_i^{(N)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{i,j}^{(N)} x_j), \ i = N-1, ..., 1. \end{cases}$$

Remarques: $det(A) = det(A^{(k)}) = \det(A^{(N)})$.

Cas d'un pivot nul:

Si à l'étape k, le pivot $a_{k,k} = 0$, on peut permuter la ligne k avec une ligne i_0, telle que $i_0 > k$ et $a_{i_0,k} \neq 0$ et on continue la méthode de Gauss.

Coût de la méthode de Gauss pour résoudre le système linéaire $Ax = b$

1) Pour l'élimination: $A \to A^{(N)}$

Nombre d'additions:

$(N-1)^2 + (N-2)^2 + ... + 1^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$;

Nombre de multiplications: $\frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$;

Nombre de divisions: $(N-1) + (N-2) + ... + 1 = \frac{N(N-1)}{2}$.

2) Pour passer de $b \to b^{(N)}$:

$(N-1)+(N-2)+....+1=\frac{N(N-1)}{2} additions$
et $\frac{N(N-1)}{2} multiplications.$
3) Pour la remontée:
$\frac{N(N-1)}{2} additions$ et $\frac{N(N-1)}{2} multiplications$ et N divisions.

Au total, l'ordre du nombre d'opérations élémentaires nécessaires à la méthode de Gauss est:

$\frac{N^3}{3}$ additions, $\frac{N^3}{3}$ multiplications et $\frac{N^2}{2}$ divisions.

Comme le calcul direct d'un déterminant nécessite:

$N!-1$ additions et $(N-1)N!$ multplications,

la méthode de cramer va nécessiter
$(N+1)!$ additions, $(N+2)!$ multiplications et N divisions
Par exemple pour $N=10$:
La méthode de Gauss nécessite : 700 opérations,
et la méthode de Cramer: 500 000 000 opérations!
$(11!+12!=39\,916\,800+479\,001\,600=5.1892\times 10^8)$.

Stratégies de pivot Plusieurs stratégies de choix de i_0 sont possibles:

- Stratégie du pivot partiel:

On peut choisir i_0 tel que:

$$|a_{i_0,k}|=max\{|a_{i,k}|, i=k,\dots N\}.$$

- Stratégie du pivot total:

On choisit i_0, j_0 tels que:

$$|a_{i_0,j_0}|=max\{|a_{i,j}|, i,j=k,\dots N\},$$

et on permute

$$\begin{cases} \text{la ligne } k \text{ avec la ligne } i_0 \\ \qquad\qquad et \\ \text{la colonne } k \text{ avec la colonne } j_0 \end{cases}$$

Factorisation LU Supposons que dans l'élimination de Gauss on n'utilise aucune stratégie de pivotage et que tous les pivots $a_{k,k}^{(k)}\neq 0$.

Dans ce cas le passage de $A^{(k)}\to A^{(k+1)}$ $(1\leq k\leq N-1)$ revient à multiplier à gauche la matrice $A^{(k)}$ par la matrice $N\times N$:

$$E^{(k)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & -l_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -l_{N,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

avec $l_{i,k}=\frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$, pour $k+1\leq i\leq N$.

La matrice $A^{(N)}$, qui est triangulaire supérieure, est alors égale à

$$A^{(N)} = MA$$

avec $M = E^{(N-1)}E^{(N-2)}...E^{(1)}$

M est le produit de matrices triangulaires inférieures, donc M est aussi triangulaire inférieure, on a $\det(M) = \prod_{i=1}^{N-1} \det(E^{(i)}) = 1$ et l'inverse de M est aussi triangulaire inférieure.

En posant $U = A^{(N)}$ et $L = M^{-1}$, on a $A = LU$.

$$(E^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & l_{k+1,k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{N,k} & 0 & ..0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L = M^{-1} = (E^{(1)})^{-1}(E^{(2)})^{-1}.....(E^{(N-1)})^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & l_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{N,1} & \cdots & \cdots & l_{N,k} & \cdots & \cdots l_{N,N-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}; A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{-9}{20} & 1 \end{pmatrix} \; et \; A = LU$$

Théorème

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice carrée d'ordre N telle que les N sous-matrices de A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq N$$

soient inversibles,

alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ii})_{1 \leq i \leq N}$, avec $l_{ii} = 1$ $(1 \leq i \leq N)$, et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.

De plus cette factorisation est unique.

Démonstration

Il suffit de montrer qu'aucun pivot n'est nul.

1.2.2 Matrice symétrique définie positive: Méthode de Cholesky

Dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive, la condition du théorème précédent est satisfaite et elle admet une factorisation $A = LU$, avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ l_{N,1} & l_{N,N-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,N} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & u_{N,N} \end{pmatrix}$$

Comme la matrice A est définie positive, on a

$$\prod_{i=1}^{k} u_{i,i} = \Delta_k > 0, k = 1, 2, ..., N,$$

(les Δ_k sont les mineurs principaux dominants de A)

et $u_{i,i} > 0$, pour $i = 1, 2, ..., N$.

Si on pose $D = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1,1}} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_{N,N}} \end{pmatrix}$

Cette matrice est inversible et son inverse est

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{1,1}}} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{u_{N,N}}} \end{pmatrix}$$

$A = LU = (LD)(D^{-1}U) = RB^T$

La matrice $R = LD$ est triangulaire inférieure et $B^T = D^{-1}U$ est triangulaire supérieure et elles sont toutes les deux inversibles.

Comme A est symétrique, on a $A^T = A$.

$\Longrightarrow RB^T = BR^T \Longrightarrow B^{-1}R = R^T(B^T)^{-1}$

De plus $B^{-1}R$ est une matrice triangulaire inférieure et $R^T(B^T)^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure, ce qui implique que

$$B^{-1}R = R^T(B^T)^{-1} = \textit{matrice diagonale}$$

Or les éléments diagonaux: $(B^{-1}R)_{i,i} = 1$

$\Longrightarrow B^{-1}R = R^T(B^T)^{-1} = I_N$

$\Longrightarrow B = R$ et $A = RR^T$.

Comme $R = LD = (r_{i,j}) \Longrightarrow r_{i,i} = \sqrt{u_{i,i}} > 0$, pour $1 \leq i \leq N$.

Unicité de R:

Supposons que $A = RR^T = BB^T$, avec $R = (r_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ des matrices triangulaires inférieures avec des éléments diagonaux $r_{ii} > 0$ et $b_{i,i} > 0$, pour $1 \leq i \leq N$.

$RR^T = BB^T \Longrightarrow R^T(B^T)^{-1} = R^{-1}B$

$\Longrightarrow R^T(B^T)^{-1} = R^{-1}B = D$ matrice diagonale,

et $\frac{r_{i,i}}{b_{i,i}} = \frac{b_{i,i}}{r_{i,i}} \Longrightarrow r_{i,i}^2 = b_{i,i}^2$, $1 \leq i \leq N \Longrightarrow r_{i,i} = b_{i,i}$, $1 \leq i \leq N$.

et alors $d_{ii} = \frac{b_{i,i}}{r_{i,i}} = 1, 1 \leq i \leq N$ et $R = B$.

On a donc montré le théorème suivant:

Théorème

Une matrice A est symétrique définie positive *si et seulement si* il existe une matrice triangulaire inférieure inversible R telle que: $A = RR^T$.

Si on impose que les éléments diagonaux de R, $r_{ii} > 0, 1 \leq i \leq N$, cette décomposition est unique.

Calcul effectif de la matrice R:

$A = RR^T, R = (r_{i,j}) \Longrightarrow a_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} r_{i,k}r_{j,k}$ pour $1 \leq i, j \leq N$

i=1 on détermine la $1^{ère}$ colonne de R:

$\rightarrow j = 1 : a_{1,1} = r_{1,1}^2 \Longrightarrow r_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$;

$\rightarrow j = 2 : \ a_{1,2} = r_{1,1}r_{2,1} \Longrightarrow r_{2,1} = \frac{a_{1,2}}{r_{1,1}}$;

$\vdots$

$\rightarrow j = N : a_{1,N} = r_{1,1}r_{N,1} \Longrightarrow r_{N,1} = \frac{a_{1,N}}{r_{1,1}}$;

De proche en proche, on détermine la $i^{ème}$ colonne de R (i=2,..,N):

i

$\rightarrow j = i : a_{i,i} = r_{i,1}^2 + ... + r_{i,i}^2$

$\Longrightarrow r_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - (r_{i,1}^2 + ... + r_{i,i-1}^2)}$;

$\rightarrow j = i + 1 : \ a_{i,i+1} = r_{i,1}r_{i+1,1} + .. + r_{i,i}r_{i+1,i}$

$\Longrightarrow r_{i+1,i} = \frac{a_{i,i+1} - (r_{i,1}r_{i+1,1} + .. + r_{i,i-1}r_{i+1,i-1})}{r_{i,i}}$;

$\vdots$

$\rightarrow j = N : a_{i,N} = r_{i,1}r_{i,N} + .. + r_{i,i}r_{N,i}$

$\Longrightarrow r_{N,i} = \frac{a_{i,N} - (r_{i,1}r_{N,1} + .. + r_{i,i-1}r_{N,i-1})}{r_{i,i}}$.

Applications de la factorisation de Cholesky:

1) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ se ramène à résoudre successivement les 2 systèmes linéaires à matrices triangulaires:

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ry = b \\ R^T x = y \end{cases}$$

2) Calcul du déterminant de A: $det(A) = (\prod_{i=1}^{N} r_{i,i})^2$.

L'ordre du nombre d'opérations pour résoudre un système linéaire, par la méthode de Cholesky:

$\frac{N^3}{6}$ additions;
$\frac{N^3}{6}$ multiplications;
$\frac{N^2}{6}$ divisions;
N extractions de racines carrées.

Exemple:
$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; la factorisation de Cholesky de A:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{30} \end{pmatrix} = RR^T.$
1) $dét(A) = (\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{5}}{30})^2 = \frac{1}{2160}$.
2) Pour résoudre $Ax = b$; avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$Ry = b \Longrightarrow y_1 = 1, y_2 = \sqrt{3}$ et $y_3 = \sqrt{5}$
$R^T x = y \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{pmatrix}$.

1.3 Conditionnement d'un système linéaire

Soit $|||$une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

On définit le nombre

$$cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

appelé le conditionnement de la matrice A, relativement à la norme matricielle considérée.

Théorème:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et x un vecteur tel que:

$$Ax = b,$$

1) Soit $x + \delta x$ la solution de

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

On suppose $b \neq 0$,alors on a :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (1)$$

et c'est la meilleure possible (c'est à dire: $\exists b \neq 0$ et $\exists \delta b \neq 0$ tels que (1) devienne égalité).

2) Soit $x + \Delta x$ solution de

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

On suppose $b \neq 0$,alors on a :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (2)$$

et c'est la meilleure possible

(c'est à dire: $\exists b \neq 0$ et $\exists \delta b \neq 0$ tels que (2) devienne égalité).

Démonstration:

1) $\rightarrow Ax = b \Longrightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \,.\, \|x\| \Longrightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$

et $A(x + \delta x) = b + \delta b \Longrightarrow A(\delta x) = \delta b$

Donc

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\left\|A^{-1}\delta b\right\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|.\|\delta b\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|\delta b\| \,.\, \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$\Longrightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

$\rightarrow$ Si on choisit

un vecteur y tel que: $\|Ay\| = \|A\| \,.\, \|y\|$

et

δb tel que: $\left\|A^{-1}\delta b\right\| = \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|\delta b\|$,

on a l'égalité dans (1).

2) $\rightarrow (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

$\Longrightarrow \Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$

$\Longrightarrow \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|\Delta A\| \,.\, \|x + \Delta x\|$

$\Longrightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} = \frac{\left\|A^{-1}\Delta A(x+\Delta x)\right\|}{\|x+\Delta x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|\Delta A\| = cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.

$\rightarrow$ Si on choisit;

un vecteur $y \neq 0$, tel que: $\left\|A^{-1}y\right\| = \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|y\|$

et

un scalaire $\beta \neq 0$,

et on prend alors:

$b = (A + \beta I)y,\ \Delta A = \beta I$ et $\Delta x = -\beta A^{-1}y$,

$\Longrightarrow x + \Delta x = y, Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (A + \beta I)y = b$.

$\Longrightarrow \|\Delta x\| \leq |\beta|.\left\|A^{-1}y\right\| = |\beta|.\left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|y\| = \|\Delta A\| \,.\, \left\|A^{-1}\right\| \,.\, \|x + \Delta x\|$.

De plus si β n'est pas une valeur propre de A, alors $b \neq 0$.

Propriétés Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

1) Si $\Delta A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, alors $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

$\Longrightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A).\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.\frac{1}{1-\|A^{-1}\|.\|\Delta A\|}$.

2) (i) $cond(A) \geq 1$,

(ii) $cond(A) = cond(A^{-1})$,

(iii) $cond(\alpha A) = cond(A), \forall \alpha$ scalaire $\neq 0$.

3) On désigne par $cond_2(A)$

le conditionnement de la matrice A,relatif à la norme euclidienne.

(i) $cond_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_N(A)}{\mu_1(A)}}$,

où $\mu_1(A)$ et $\mu_N(A)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice A^TA.

(on rappelle que A inversible$\Longrightarrow A^TA$ symétrique définie positive)

(ii) Si A est une matrice normale ($AA^T = A^TA$),

$$cond_2(A) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|},$$

où les $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de la matrice A.
(iii) Si A est unitaire ou orthogonale, $cond_2(A) = 1$.
(iv) U orthogonale ($U^T U = UU^T = I_N$)
$\Longrightarrow cond_2(A) = cond_2(AU) = cond_2(UA) = cond_2(U^T AU)$.

1.4 Méthodes itératives

On va voir un type de méthodes itératives de résolution du système linéaire $Ax = b$ sous la forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \text{ vecteur arbitraire,} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, k \geq 0 \end{cases}$$

lorsque

$$Ax = b \Longleftrightarrow x = Bx + c,$$

la matrice B et le vecteur c sont en fonction de A et b.

Définition
La méthode itérative (3) est convergente si

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x, \ \forall x^{(0)}.$$

Remarque:
Si on Pose $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, pour $k = 0, 1, ...$
Comme $x = Bx + c$ et $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$,on a
$e^{(k)} = Bx^{(k-1)} - Bx = Be^{(k-1)} = ... = B^k e^{(0)}$

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \Longleftrightarrow \lim_{k \to +\infty} e^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{k \to +\infty} B^k e^{(0)} = 0$$

Donc
La méthode itérative (3) est convergente si

$$\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0, \ \forall v$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{k \to +\infty} ||B^k v|| = 0, \ \forall v$$

pour toute norme vectorielle $||.||$.

1.4.1 Convergence des méthodes itératives

Théorème
Les propositions suivantes sont équivalentes:
(1)la méthode itérative (3) est convergente;
(2)$\rho(B) < 1$;
(3)$||B|| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $||.||$.
Démonstration
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Supposons $\rho(B) \geq 1$, $\rho(B) = |\lambda|$, donc $\exists$ un vecteur p :

$$p \neq 0, \ Bp = \lambda p \text{ et } |\lambda| \geq 1$$

$$\Longrightarrow \forall k \geq 0, \ ||B^k p|| = ||\lambda^k p|| = |\lambda^k|.||p|| = |\lambda|^k.||p|| \geq ||p||$$

ce qui contredit $\lim_{k\to+\infty} B^k p = 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

On utilise la proposition 4:$\forall \epsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que:

$$||B|| \leq \rho(B) + \epsilon.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

Soit $||.||$ une norme matricielle subordonnée.

On utilise alors la propriété:

$$\forall k \geq 0,\ \forall v,\quad ||B^k v|| \leq\ ||B^k||.||v|| \leq ||B||^k.||v||$$

$$||B|| < 1 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} ||B||^k = 0 \ \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} ||B^k v|| = 0.$$

1.4.2 Méthode de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation

Ces méthodes sont des cas particuliers de la méthode suivante:

$A = M - N$ avec M *inversible* et *assez simple*. On aurait alors:

$$\begin{aligned} Ax = b &\Longleftrightarrow Mx = Nx + b \\ &\Longleftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ &\Longleftrightarrow x = Bx + c, \end{aligned}$$

avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$.

Méthode de Jacobi: En posant $A = D - (E + F)$,

$M = D$ est la diagonale de A et $N = E + F$.

$$Ax = b \Longleftrightarrow Dx = (E + F)x + b.$$

On suppose que D est inversible, c'est à dire $a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq N$.

La matrice

$$J = D^{-1}(E + F) = I_N - D^{-1}A$$

est appelée la matrice de Jacobi.

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b, k \geq 0 \end{cases}$$

A chaque étape, on calcule les N composantes $x_1^{(k+1)}, .., x_N^{(k+1)}$ du vecteur $x^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{(k+1)} = \quad -a_{1,2}x_2^{(k)} - ... - a_{1,N}x_N^{(k)} + b_1 \\ a_{2,2}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)} ... - a_{2,N}x_N^{(k)} + b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{N,N}x_N^{(k+1)} = -a_{N,1}^{(k)}x_1^{(k)} - ... - a_{N,N-1}^{(k)}x_{N-1}^{(k)} + b_N \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel M est la partie triangulaire inférieure de A: $M = D - E$ et $N = F$.

On pourrait améliorer la méthode précédente en utilisant les quantités déjà calculées, on calcule successivent les N composantes

$x_1^{(k+1)}, .., x_N^{(k+1)}$ du vecteur $x^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{(k+1)} = & -a_{1,2}x_2^{(k)} - ... - a_{1,N}x_N^{(k)} + b_1 \\ a_{2,2}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k+1)} & - a_{2,3}x_3^{(k)} ... - a_{2,N}x_N^{(k)} + b_2 \\ \vdots & \\ a_{N,N}x_N^{(k+1)} = -a_{N,1}x_1^{(k+1)} - . & .. - a_{N,N-1}x_{N-1}^{(k+1)} + b_N \end{cases}$$

ce qui revient à écrire:

$$Dx^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b$$

ou encore

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

$$\Updownarrow$$

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$$

$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$ est la matrice de Gauss-Seidel.

Elle est inversible si $a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq N$.

Méthode de relaxation Pour $\omega \neq 0$, en posant $M = \frac{1}{\omega}D - E$, $N = (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$, on a

$$A = M - N = \{\tfrac{1}{\omega}D - E\} - \{(\tfrac{1-\omega}{\omega})D + F\}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}.x_1^{(k+1)} = a_{1,1}x_1^{(k)} - \omega\{a_{1,1}x_1^{(k)} + a_{1,2}x_2^{(k)} + ... + a_{1,N}x_N^{(k)} + b_1\} \\ a_{2,2}.x_2^{(k+1)} = a_{22}x_2^{(k)} - \omega\{a_{2,1}x_1^{(k+1)} + a_{2,2}x_2^{(k)} ... + a_{2,N}x_N^{(k)} + b_2\} \\ \vdots \\ a_{N,N}.x_N^{(k+1)} = a_{N,N}x_N^{(k)} - \omega\{a_{N,1}x_1^{(k+1)} + .. + a_{N,N-1}x_{N-1}^{(k+1)} + a_{N,N}x_N^{(k)} + b_N\} \end{cases}$$

ce qui revient à écrire:

$$\{\tfrac{1}{\omega}D - E\}x^{(k+1)} = \{(\tfrac{1-\omega}{\omega})D + F\}x^{(k)} + b$$

La matrice de relaxation est

$\mathcal{L}_\omega = \{\frac{1}{\omega}D - E\}^{-1}\{(\frac{1-\omega}{\omega})D + F\} = (D - \omega E)^{-1}\{(1-\omega)D + \omega F\}$

Exemples: Etude de la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel dans le cas où la matrice du système linéaire est:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

Les deux méthodes convergent.

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

la méthode de Jacobi diverge et La méthode de Gauss-Seidel converge.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

la méthode de Jacobi converge et la méthode de Gauss-Seidel diverge.

1.4.3 Convergence des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et relaxation

Théorème

Soit A une matrice symétrique définie positve.

On suppose que

$A = M - N$, avec M inversible.

Si la matrice symétrique

$M^T + N$

est définie positive,

alors

$\rho(M^{-1}N) < 1$.

Démonstration

1) $M^T + N$ est symétrique:

$A = M - N \Longrightarrow M^T + N = A^T + N^T + N = A + N^T + N = M + N^T$.

2) Comme A est symétrique définie positive, l'application

$v \in \mathbb{R}^N \rightarrow ||v|| = (v^T A v)^{\frac{1}{2}}$

définit une norme sur $\mathbb{R}^N$.

On considère alors la norme matricielle $||.||$ induite par cette norme vectorielle.

$||M^{-1}N|| = ||I_N - M^{-1}A|| = \sup_{||v||=1} ||v - M^{-1}Av||$

Soit v un vecteur tel que $||v|| = 1$.On pose $w = M^{-1}Av$,

$||v - w||^2 = (v - w)^T A(v - w) = 1 - v^T Aw - w^T Av + w^T Aw$

$= 1 - w^T M^T w - w^T Mw + w^T Aw$

$= 1 - w^T(M^T + N)w$.

$v \neq 0 \Longrightarrow w = M^{-1}Av \neq 0 \Longrightarrow w^T(M^T + N)w > 0$

Donc si la matrice symétrique $M^T + N$ est définie positive, on a

$||v - w||^2 = 1 - w^T(M^T + N)w < 1$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Pour tout $u \in \mathbb{R}^N$,

$$u^T Au = u_1^2 + u_N^2 + \sum_{i=2}^{N} (u_i - u_{i-1})^2$$

$\Longrightarrow$ la matrice symétrique A est $définie$ positive.

2) Pour la méthode de Jacobi:

$M = D$ et $N = E + F$:

$A = M - N$ est symétrique définie positive, car

$$u^T(M^T + N)u = u_1^2 + u_N^2 + \sum_{i=2}^{N} (u_i + u_{i-1})^2$$

> 0, si $u \neq 0$.

$M^T + N$ est définie positive$\Longrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 7 *(CS) Soit A une matrice symétrique définie positive.*

$0 < \omega < 2 \Longrightarrow$la méthode de relaxation converge.

Démonstration

On applique le résultat précédent.

On a $A = M - N$

avec $M = \frac{1}{\omega}D - E$ *et* $N = (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$

$M^T + N = \frac{1}{\omega}D - E^T + (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$

$= \frac{1}{\omega}D + (\frac{1-\omega}{\omega})D$

$= (\frac{2-\omega}{\omega})D$

$0 < \omega < 2 \Longrightarrow \frac{2-\omega}{\omega} > 0$

$\Longrightarrow (\frac{2-\omega}{\omega})D$ est définie positive.

Proposition 8 *Soit A une matrice, alors pour tout $\omega \neq 0, \rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$.*

Démonstration

$\prod_{i=1}^{N} \lambda_i(\mathcal{L}_\omega) = dét(\mathcal{L}_\omega) = \frac{dét(\frac{1-\omega}{\omega}D+F)}{dét(\frac{1}{\omega}D-E)} = (1-\omega)^N$

$\Longrightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\prod_{i=1}^{N} \lambda_i(\mathcal{L}_\omega)|^{\frac{1}{N}} = |1-\omega|.$

Corollaire

Si A est une matrice symétrique définie positive,

alors

$0 < \omega < 2 \Longleftrightarrow$la méthode de relaxation converge.

1.4.4 Autres méthodes itératives:

Méthode du gradient $\begin{cases} x^{(0)} \text{ arbitraire} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b), k \geq 0 \end{cases}$

où α est une constante fixée.

Si on pose $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b, k \geq 0$ on a

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b)$

$= x^{(k)} - \alpha Ar^{(k)}$

$\Longrightarrow r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha Ar^{(k)}$

$= (I - \alpha A)r^{(k)}.$

Une condition nécessaire et suffisante

de convergence est:

$$\rho(I - \alpha A) < 1.$$

Proposition 9 *Si la matrice A est symétrique définie positive alors la méthode du gradient à pas fixe converge si et seulement si*

$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$

Avec λ_n la plus grande valeur propre de A.

De plus $\alpha = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ est une valeur optimale ($I - \alpha A$ a le plus petit rayon spectral)

Méthode du gradient à pas optimal $\left\{ \begin{array}{c} x^{(0)} \text{ arbitraire} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k(Ax^{(k)} - b), k \geq 0 \end{array} \right.$

où α_k est choisi tel que:

$$r^{(k+1)} \perp r^{(k)}$$

avec $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b, k \geq 0$.
Donc $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k.r^{(k)}$.
$r^{(k+1)} \perp r^{(k)} \Longleftrightarrow < r^{(k)}, r^{(k)} - \alpha_k.Ar^{(k)} >= 0$

$$\Longleftrightarrow \alpha_k = \frac{||r^{(k)}||_2^2}{<r^{(k)}, Ar^{(k)}>}.$$

L'algorithme est:
(0) $k = 0$
$x^{(0)}$ arbitraire
(1) calcul de $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$
(2) Si $r^{(k)} = 0$, c'est terminé.
(3) Si $r^{(k)} \neq 0$,on calcule:
$\alpha_k = \frac{||r^{(k)}||_2^2}{<r^{(k)}, Ar^{(k)}>}$
et
$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k.r^{(k)}$.
(3) $k := k + 1$ et aller à (1).
On montre le résultat suivant:
Proposition
Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode du gradient à pas optimal converge.
Exemples:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
La solution de $Ax = b$ est $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$
Les valeurs propres de
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
sont
$\lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1.382\,0$
et
$\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{2} = 3.618$
Donc A est symétrique définie positive.
On choisit $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
et on calcule le premier itéré pour:
1) la méthode de Jacobi:
$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$
2) la méthode de Gauss-Seidel:
$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$
3) la méthode du gradient à pas fixe

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
Si on choisit α tel que
$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_2} = \frac{2}{3.618} = 0.552\,79,$$
$\alpha = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{2}{5}$
la méthode converge.
Si on prend $\alpha = \frac{1}{2}$:
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
Si on prend $\alpha = \frac{2}{5}$
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
4) la méthode du gradient à pas optimal:
$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$||r^{(0)}||_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{2}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{123}{4}$$
$\lambda_0 = \frac{17}{2} \frac{4}{124} = \frac{17}{62}$
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{17}{62} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{73}{124} \\ -\frac{23}{124} \end{pmatrix}$$