Électromagnétisme

Iannis Aliferis

École Polytechnique de l'Université Nice Sophia Antipolis
Polytech'Nice Sophia
Parcours des Écoles d'Ingénieurs Polytech, 2e année, 2012–2013

http://www.polytech.unice.fr/~aliferis

Ce document contient les transparents du cours mais il n'est en aucun cas complet (auto-suffisant) ; une grande quantité d'information (commentaires, explications, diagrammes, démonstrations etc.) est donnée pendant les séances, oralement ou à l'aide du tableau.

Le logo du logiciel R à droite d'un titre contient un lien vers le script illustrant les résultats présentés dans le transparent. L'étude du graphique (mais pas celle du script !) fait partie intégrante du cours. Tous les scripts sont accessibles dans la partie « Documents / Compléments multimédia » du site :
http://www.polytech.unice.fr/~aliferis/fr/teaching/courses/cip2/electromagnetisme/

Toutes les ressources externes, disponibles en lien hypertexte à partir de ce document, sont aussi répertoriées dans la partie « Ressources Externes » du site :
http://www.polytech.unice.fr/~aliferis/fr/teaching/courses/cip2/electromagnetisme/

Les extraits vidéo proviennent du cours du Professeur Walter Lewin, MIT : *Walter Lewin, 8.02 Electricity and Magnetism, Spring 2002. (Massachusetts Institute of Technology : MIT OpenCourseWare),* http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Physics/8-02Electricity-and-MagnetismSpring2002/CourseHome/ *(Accessed September 9, 2009). License : Creative Commons BY-NC-SA.*

Introduction

Plan du cours

- Introduction
- Analyse vectorielle
- Électrostatique
- Magnétostatique
- Phénomènes d'induction
- Équations de Maxwell
- Ondes électromagnétiques
  26 séances cours + 26 séances TD (39h $\times$ 2)
- *Optique ondulatoire*
  6 séances cours + 6 séances TD (9h $\times$ 2)

3

Règles du jeu / conseils

- Travail individuel
  - Contrôles : 3 (IA) + 1 (PV)
  - Coefficients croissants
    14%, 18%, 22%, 26%
  - Contrôle continu : quiz, tableau, etc.
    20% (harmonisation des notes entre groupes TD)
- Les transparents
- Classeurs, prise de notes
- J@lon : http://jalon.unice.fr
- ...

4

Un tout petit peu d'histoire. . .

- L'ambre (ἤλεκτρον) et l'aimant (μαγνήτης) :
  3000 ans d'histoire !
- Premières traces écrites :
  Thalès (624–547 av. J.C.)
  Platon (427–341 av. J.C.)
- Deux phénomènes distincts. . .
- . . . unifiés à la fin du XIXe siècle (1864)
  par James Clerk Maxwell (1837–1879)
- (et après ?)

5

Qu'est-ce qu'on fait ici ?

- Pourquoi étudier l'électromagnétisme ?
- La technologie (toutes ces applications. . .)
  C'est tout ?
- Les quatre forces (interactions) de la Nature :
  1. Gravitationnelle
  2. Électromagnétique
  3. Nucléaire forte
  4. Nucléaire faible
- Dans quels contextes ? Dans quel ordre ?

6

Forces gravitationnelle et électrique

- Deux électrons
  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
  $q_e = -1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- Force gravitationnelle

$$F_g = G\frac{m_e m_e}{r^2} \quad (G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}})$$

- Force électrique

$$F_e = k_c\frac{q_e q_e}{r^2} \quad (k_c = 8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})$$

- $F_e/F_g = 0.23 \times 10^{42}$
-

$$\frac{\text{Univers}}{\text{proton}} = \frac{1 \times 10^{26}\,\mathrm{m}}{1.6 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}} = 0.6 \times 10^{41}$$

7

L'É/M est partout !

Les forces et les phénomènes électromagnétiques se trouvent partout autour de nous !

(mais pourquoi on ne sent rien ?)

8

Champs électromagnétiques

- Pourquoi utiliser les champs $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ pour décrire ces phénomènes ?
- Force électrique entre deux charges : loi de Coulomb

$$\vec{\boldsymbol{F}} = k_c \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1\to 2}}$$

  Valable *uniquement* si les charges sont immobiles !
  Sinon ? la formule devient très compliquée. . .
- Force électromagnétique (force de Lorenz) :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}})} \qquad (1)$$

  Exercée sur une charge q de vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ se déplaçant dans un champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$.
  Valable *toujours*.

9

Comment ça marche ?

1. Les charges « sources » (immobiles ou pas) créent des champs.
2. Les champs agissent sur d'autres charges (force de Lorenz).
   Il suffit de (bien) décrire les champs ($\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$) créés par les sources.
   Charge : valeur multiple de q_e. . .

10

Champ électrostatique

- « Statique » : les charges ne se déplacent pas
- Loi de Coulomb (1785)
- Force exercée par la charge 1 sur la charge 2 :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{k_c} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}$$

- Champ électrique généré par la charge 1 :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} \triangleq \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}$$

- Donc, à partir du champ électrique :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}} = q_2 \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}}$$

11

Analyse vectorielle : champ, flux

12

La notion de champ

- *Champ scalaire* : l'association à chaque point de l'espace d'un scalaire (un seul nombre) : p.ex. température, altitude, ...
- *Champ vectoriel* : l'association à chaque point de l'espace d'un vecteur (longueur et orientation) : p.ex. vent, vitesse, ...
- Il faut d'abord pouvoir se repérer et s'orienter dans l'espace !
- Systèmes de coordonnées (1, 2 ou 3 dimensions ?)
- Vecteurs

13

Système de coordonnées cartésiennes

Variable	valeurs	longueur élémentaire
x	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}x$
y	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}y$
z	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}z$

- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  x constant : $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
  y constant : $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
  z constant : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Vecteur de position : $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$
- Un système d'exception ! les trois variables ont les mêmes dimensions (longueur) et sont équivalentes.
- (et l'oreille interne ?)

14

Système de coordonnées cylindriques

Variable	valeurs	longueur élémentaire
ρ	$[0,\infty[$	$\mathrm{d}\rho$
ϕ	$[0,2\pi]$	$\rho\,\mathrm{d}\phi$
z	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}z$

- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  ρ constant : $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
  ϕ constant : $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$
  z constant : $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
- Vecteur de position : $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$

15

Système de coordonnées sphériques

Variable	valeurs	longueur élémentaire
r	$[0, \infty[$	$\mathrm{d}r$
θ	$[0, \pi]$	$r\,\mathrm{d}\theta$
ϕ	$[0, 2\pi]$	$r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi$

- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  r constant : $r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$
  θ constant : $r \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$
  ϕ constant : $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
- Vecteur de position : $\vec{r} = r\hat{e}_r$

16

Vecteurs

- Objet mathématique ayant une longueur (norme), une direction et un sens (orientation).
- Notation :
  le vecteur : $\vec{A}$
  sa norme : $\|\vec{A}\|$ ou A (un nombre)
- Un vecteur est défini par ses trois *composantes* :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

  Les A_1, A_2, A_3 dépendent du système de coordonnées choisi, mais le vecteur non !
- Astuce : le vecteur $\hat{u}_A = \frac{1}{\|\vec{A}\|}\vec{A}$ a la même orientation que $\vec{A}$ mais $\boxed{\|\hat{u}_A\| = 1}$!
  Vecteur « unitaire »

17

Le produit scalaire : une projection

- Le produit scalaire de $\vec{A}$ et $\vec{B}$, deux vecteurs formant un angle θ :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta \tag{2}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta \quad \text{(notation plus simple)}$$

  (Ne pas oublier le point · entre les vecteurs !)
- $A\cos\theta$: la projection de $\vec{A}$ sur la direction de $\vec{B}$!
- Si $\hat{u}$ un vecteur unitaire (orientation) :

$$\boxed{\vec{A} \cdot \hat{u} = \text{projection de } \vec{A} \text{ sur la direction de } \hat{u}}$$

- Dans tous les systèmes de coordonnées :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{3}$$

18

Vecteurs unitaires

- Des vecteurs « à part »
- Notation : lettre miniscule + chapeau $\hat{u}$, $\hat{n}$, $\hat{e}$, ...
- Information sur l'orientation :
  - Systèmes de coordonnées : $\hat{e}_x$, $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\theta$, ...
    montrent le sens d'augmentation de la variable concernée
  - Surfaces : $\hat{n}$
    montrent le sens de la normale par rapport à la surface (donc la définissent + entrée/sortie)
- « Utilité » :
  - « Extraire » la composante d'un vecteur $\vec{A}$ sur la direction du vecteur unitaire $\hat{u}$: $\vec{A} \cdot \hat{u}$

  (C'est quoi les composantes d'un vecteur ?)

19

[Extra] Le vecteur de position $\vec{r}$

- Pour chaque point M, le vecteur $\vec{r}$ indique :
  la distance par rapport à l'origine (OM)
  l'orientation (de O vers M).
- Coordonnées cartésiennes, $M(x, y, z)$:

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}}$$

- Coordonnées cylindriques, $M(\rho, \phi, z)$:

$$\boxed{\vec{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}}$$

  (où est passé ϕ ?)
- Coordonnées sphériques, $M(r, \theta, \phi)$:

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}$$

  (où sont passés θ et ϕ ?)

20

Système de coordonnées cartésiennes (bis)

Variable	valeurs	longueur élémentaire
x	$]-\infty, \infty[$	$\mathrm{d}x$
y	$]-\infty, \infty[$	$\mathrm{d}y$
z	$]-\infty, \infty[$	$\mathrm{d}z$

- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  x constant : $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
  y constant : $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
  z constant : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Un système d'exception ! les trois variables ont les mêmes dimensions (longueur) et sont équivalentes.
- En plus, les trois vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, restent les mêmes à chaque point de l'espace !

21

Champ scalaire

- *Champ scalaire* : l'association à chaque point de l'espace d'un scalaire (un seul nombre) : p.ex. température, altitude, ...
- Un champ scalaire est une fonction de 3 variables
  p.ex. en coordonnées cartésiennes : $\Phi(x, y, z)$

22

Champ vectoriel

- *Champ vectoriel* : l'association à chaque point de l'espace d'un vecteur (module et direction) : p.ex. vent, vitesse, ...
- Un champ vectoriel est un ensemble de 3 fonctions (les composantes) chacune de 3 variables (les coordonnées) :

$$\vec{\boldsymbol{A}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

- *Ne pas confondre composantes et coordonnées !*

23

Flux d'un champ vectoriel (intro)

(Qu'est-ce qui traverse une surface ?)

- Champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{h}}$: $\mathrm{kg\,s^{-1}\,m^{-2}}$
- Surface élémentaire (ouverte) $\mathrm{d}S$
  - Vecteur normal à la surface $\hat{\boldsymbol{n}}$
  - Vecteur $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$
  - Que représente $\vec{\boldsymbol{h}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$?
- Surface ouverte S
  - Que représente $\int_S \vec{\boldsymbol{h}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$?
- Surface fermée S
  - Que représente $\oint_S \vec{\boldsymbol{h}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$?

24

Flux d'un champ vectoriel

- Champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{A}}$
- Surface (ouverte) S
  Flux du champ $\vec{\boldsymbol{A}}$ à travers S :

$$\int_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \quad \text{ou} \quad \int_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{4}$$

- Surface (fermée) S ($\hat{\boldsymbol{n}}$ sortant)
  Flux du champ $\vec{\boldsymbol{A}}$ à travers S :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \quad \text{ou} \quad \oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{5}$$

  Le flux à travers une surface *fermée* donne des informations sur les « sources » du champ à l'intérieur de la surface

25

Loi de Gauss (électrostatique)

- **Électrostatique** : les charges sont immobiles
- **Loi de Gauss** : « Le flux du champ électrique à travers une surface *fermée* est proportionnel à la charge totale incluse à *l'intérieur* de cette surface »

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{Q_{\mathsf{int}}}{\epsilon_0} \tag{6}$$

- La constante ϵ_0 (permittivité du vide) est égale à $8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\mathrm{F\,m^{-1}}$ (rappel sur les dimensions : $\mathrm{F} = \mathrm{C\,V^{-1}}$).
- $\hat{\boldsymbol{n}}$ est perpendiculaire à chaque point de la surface S et sa direction est vers *l'extérieur* de celle-ci.
- Le champ électrique en $\mathrm{V\,m^{-1}}$

26

Analyse vectorielle 2 : divergence

27

Couper un volume en morceaux...

- Volume $\mathcal{V}$ entouré par S (donc fermée)
- Partager $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, entourés par S_1, S_2

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}} \, \mathrm{d}S + \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{2}} \, \mathrm{d}S$$

- Continuer...

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \sum_i \left(\oint_{S_i} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} \, \mathrm{d}S \right) \tag{7}$$

- ... jusqu'où ?
- Surface fermée S_i élémentaire

28

Divergence

- Quel est le flux à travers une surface élémentaire fermée ?
- $\boxed{\text{Divergence = flux surface élémentaire / volume}}$
- $$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} \triangleq \lim_{\Delta\mathcal{V}\to 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \tag{8}$$
- div $\vec{\boldsymbol{A}}$: un champ *scalaire* ! $(> 0, < 0, = 0)$
- À chaque point de l'espace, div $\vec{\boldsymbol{A}} \propto$ flux à travers surface fermée autour de ce point
- flux $\propto$ sources
- *La divergence du champ $\vec{\boldsymbol{A}}$ est proportionnelle à la densité volumique des sources qui le génèrent.*

29

Loi de Gauss (électrostatique) : forme locale

- Surface élémentaire autour d'un volume élémentaire $\Delta\mathcal{V}$ incluant une charge ΔQ :

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}}$$

- Densité volumique de charge $\rho = \mathrm{d}Q/\,\mathrm{d}\mathcal{V}$
- Charge $\Delta Q = \int_{\Delta\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \rho\Delta\mathcal{V}$

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{\rho\Delta\mathcal{V}}{\epsilon_0}$$

$$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9}$$

- (et alors ?)

30

Calcul de la divergence

- Système de coordonnées cartésiennes
- Surface élémentaire autour de (x, y, z) :
  cube centré à (x, y, z), de dimensions $\Delta x, \Delta y, \Delta z$
- Calculer le flux à travers sa surface
- $$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\text{flux}}{\text{volume}}$$
- $$\boxed{\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \qquad (10)$$
- Systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques...

31

Théorème de la divergence (1)

- Surface fermée S autour d'un volume $\mathcal{V}$
- Découper $\mathcal{V}$ en plusieurs petits morceaux $\mathcal{V}_i$
- S_i la surface (fermée) autour de $\mathcal{V}_i$

$$\text{flux à travers } S = \sum_i \text{flux à travers } S_i$$

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \sum_i \left(\oint_{S_i} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}}\, \mathrm{d}S \right)$$

- À la limite où la surface S_i devient infiniment petite (englobe $\Delta\mathcal{V} \to 0$) :

$$\lim_{\Delta\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_{S_i} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}}\, \mathrm{d}S = \text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}$$

32

Théorème de la divergence (2)

$$\text{divergence} = \frac{\text{flux}}{\text{volume}}$$

$$\oint_{S_i} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} \, \mathrm{d}S = \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{A}} \, \mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Donc :

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{A}} \, \mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{11}$$

- Théorème
  - de la divergence
  - de Gauss
  - de Ostrogradsky

33

Loi de Gauss : intégrale vers locale

- Loi de Gauss, forme intégrale (6), tr.26 :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

- La charge à l'intérieur de S : $Q_{\text{int}} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\mathcal{V}$
- Le flux à travers S : $\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} \, \mathrm{d}\mathcal{V}$
-

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

34

Superposition

35

Le principe de superposition : $\vec{1} + \vec{1} = \vec{2}$

- L'effet de la somme = la somme des effets
- Charge ponctuelle q_i à $\vec{r}_i$,
  crée un champ $\vec{E}_i$ à $\vec{r}$:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|}$$

- Ensemble de charges crée $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$
- Distribution continue de charges,
  densité volumique ρ $(\mathrm{C\,m^{-3}})$, crée :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}'}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\underbrace{\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\mathcal{V}'}_{\mathrm{d}q}$$

- *Condition : pas d'interaction entre les charges !*

36

Exemple de superposition : deux plans infinis

- Deux plans parallèles
- Distance entre les plans : d
- Un plan infini de densité surfacique $+\rho_s$
- Un plan infini de densité surfacique $-\rho_s$
- Calculer le champ $\vec{E}$ partout dans l'espace
- (un seul plan : TD 1, 1.3 ; WL, L3, 37m58s-41m00s)

$$\vec{1} + \vec{1} = \vec{2}$$

37

Visualisation de champs vectoriels

38

Deux approches

1. Dessiner des vecteurs
   - À chaque point $\vec{r}$ dessiner le vecteur $\vec{E}(\vec{r})$
   - L'origine du vecteur à $\vec{r}$
   - Diagramme "quiver" (carquois)
2. Dessiner des « lignes de champ »
   - Lignes continues
   - Tangentes au champ $\vec{E}$ (orientation)
   - Lignes/surface $\propto \|\vec{E}\|$ (module)
   - Ne se croisent jamais
   - *Pas de superposition !*
   - (moins maniables que le champ. . .)

39

Un autre regard sur le flux (et la divergence)

- $$\frac{\text{nombre de lignes}}{\text{surface perpendiculaire}} \propto E$$
  $$\boxed{\text{flux à travers } S} = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
  $$\boxed{\propto} \int_S \text{nombre de lignes traversant } \mathrm{d}S$$
  $$= \boxed{\text{nombre de lignes traversant } S}$$
- lignes traversant = lignes sortant − lignes entrant
- Flux positif : sorties > entrées
- Flux nul : équilibre entrées/sorties
- Flux négatif : sorties < entrées
- Divergence : flux « local »

40

Lignes de champ en électrostatique

- Loi de Gauss :
  $\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ou div $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Nombre de lignes traversant une surface fermée
  $\propto Q$ (à l'intérieur)
- Trois règles d'or :
  1. Les lignes commencent ($\nearrow$) sur les charges positives...
  2. ...et se terminent ($\searrow$) sur les charges negatives
  3. Le nombre de lignes ($\nearrow - \searrow$) *autour* d'une charge Q, est proportionnel à Q
- Exemples de lignes de champ :
  Applet "Electric field lines"
  et expériences de Walter Lewin (MIT) :
  Graines de gazon (WL, L2, 42m25-43m40)
  Jeu de ballon ! (WL, L2, 45m55-49m24)

41

Travail dans un champ électrostatique : potentiel

Le travail de A vers B (1)

- Une charge (fixe) ponctuelle Q à l'origine
  (le reste n'est que superposition !)
- On déplace une charge « test » q
  dans le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ de Q
- Quel est le travail *dépensé* de A à B ?
  (« dépensé » : par celui qui déplace la charge)
- Travail = force × déplacement :

$$\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l \quad (\mathrm{J} = \mathrm{N\,m})$$

- $\hat{\boldsymbol{t}}$: vecteur unitaire, tangent à $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
-

$$W_{A\to B} = \int_{\Gamma:\, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

43

Le travail de A vers B (2)

- Force *exercée* sur la charge q pendant le déplacement :
  (« exercée » : par celui qui déplace la charge)

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{el}} = -(q\vec{E})$$

- Travail *dépensé* de A à B :

$$\boxed{W_{A\to B} = -q \int_{\Gamma:\ \vec{r}_A \to \vec{r}_B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} \tag{12}$$

$\Gamma:\ \vec{r}_A \to \vec{r}_B$ le chemin de A vers B (*lequel ?*)

44

De quoi dépend $W_{A\to B}$?

- ... après réflexion,
  $W_{A\to B}$ ne dépend que de $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$
- (parce que $\vec{E} \parallel \hat{e}_r$)
- Il n'y a que les points de départ et d'arrivée qui interviennent !
- Le chemin Γ de A à B ne compte pas !
- Conséquence :
  le travail le long d'une courbe *fermée* est nul,
  donc :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l = 0 \tag{13}$$

- « La *circulation* du champ électrique
  le long d'une courbe fermée, est nulle »
- Les forces électrostatiques sont conservatrices

45

Du travail au potentiel

- $W_{A\to B} = f(\vec{r}_A, \vec{r}_B) = ?$
- Remarque : $W_{P\to A} + W_{A\to P} = 0$
-

$$\boxed{W_{A\to B}} = W_{A\to P\to B} \text{ (le chemin ne compte pas)}$$
$$= W_{A\to P} + W_{P\to B}$$
$$\boxed{= -W_{P\to A} + W_{P\to B}}$$

- Travail *dépensé* de A à B par charge déplacée : $W_{A\to B}/q$
-

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{P\to B}}{q} - \frac{W_{P\to A}}{q} \tag{14}$$

46

Potentiel : le travail par charge

- On *choisit* un point de référence P et on *définit le potentiel* à chaque point A de l'espace :

$$V(\vec{r}_A) \triangleq \frac{W_{P\to A}}{q} \qquad (\mathrm{J\,C^{-1} = V}) \tag{15}$$

- Le potentiel $V(\vec{r})$ est un champ scalaire
- Le potentiel du point de référence :

$$V(\vec{r}_P) = \frac{W_{P\to P}}{q} = 0$$

- Le travail dépensé de A à B :

$$W_{A\to B} \overset{(14),(15)}{=} q[V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)] \tag{16}$$

47

Travail : charge × ddp

- $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$: différence de potentiel (ddp)

$$\boxed{W_{A\to B} = q[V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)] = \text{charge} \times \text{ddp}} \tag{17}$$

- Si $W_{A\to B} > 0$ on fournit de l'énergie à la charge déplacée
  - $q > 0$ et $V(\vec{r}_B) > V(\vec{r}_A)$
  - $q < 0$ et $V(\vec{r}_B) < V(\vec{r}_A)$
- Si $W_{A\to B} < 0$ on récupère de l'énergie (déplacement « *spontané* » $A \to B$)
  - $q > 0$ et $V(\vec{r}_B) < V(\vec{r}_A)$
  - $q < 0$ et $V(\vec{r}_B) > V(\vec{r}_A)$

48

Potentiel créé par une charge ponctuelle

- Charge Q à l'origine
- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r$
- Potentiel = travail / charge ; référence P à l'infini

$$\begin{aligned}\boxed{V(\vec{r}_A)} &= \frac{W_{\infty\to A}}{q} = -\int_{\Gamma:\, \vec{r}_\infty\to\vec{r}_A} \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Gamma:\, \vec{r}_\infty\to\vec{r}_A}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\cdot(-\hat{e}_r\,\mathrm{d}r) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \quad \textit{attention aux bornes !} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_A}}\end{aligned} \tag{18}$$

- Ensemble de charges ou distribution de charges : superposition

49

Du champ électrostatique au potentiel

- Travail dépensé de A vers B par charge déplacée :

$$\begin{aligned} \frac{W_{A\to B}}{q} &= V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) \\ &= -\int_{\Gamma:\ \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \\ \text{alors que } V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) &= \int_{\Gamma:\ \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \mathrm{d}V \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}} \tag{19}$$

- À un point de l'espace, examiner les cas :
  $\mathrm{d}V > 0$ (max ?) ; $\mathrm{d}V < 0$ (min ?) ; $\mathrm{d}V = 0$
- Exemple : un condensateur (plaques parallèles) ;
  Van de Graaf et tube fluorescent (WL, L4, 43m00-49m01) ;
  Applet "Charges and Fields"

50

Du potentiel au champ électrostatique

- $\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- En coordonnées cartésiennes, $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(x, y, z)$:

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

et

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

donc

$$-\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \triangleq \overrightarrow{\textbf{grad}}\,V$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}\,V \qquad (\mathrm{V\,m^{-1}}) \tag{20}$$

- Remarque : $\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

51

Analyse vectorielle 3 : gradient

Le gradient d'un champ scalaire

- $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l$

$$\boxed{\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} \text{ dérivée selon } \hat{\boldsymbol{t}}}$$

- Le gradient d'un champ scalaire V :
  1. Est un champ *vectoriel*
  2. Perpendiculaire aux *équipotentielles* ($V = \text{cste},\ \mathrm{d}V = 0$)
  3. Montre la direction de la plus *forte* augmentation de V ($\mathrm{d}V$ max)
  4. Module : $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}\Big|_{\text{max}}$ (max quand $\hat{\boldsymbol{t}} \parallel \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V$)

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = \int_{\Gamma:\ \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \underbrace{\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}}}_{\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l}\, \mathrm{d}l$$

$$\text{rappel : } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

53

Le gradient dans les trois systèmes de coordonnées

- $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- Exprimer $\mathrm{d}V$ et $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$...
- Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \tag{21}$$

- Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \tag{22}$$

- Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{23}$$

54

Du champ au potentiel : un raccourci

- $V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\,\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l$
- Deux conditions pour prendre un raccourci :
  1. Le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ n'a qu'*une seule composante*...
  2. ...correspondant à une *variable de longueur*
- Exemple : coord. cylindriques et $\vec{\boldsymbol{E}} = E_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$
  - Commencer par $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}\,V$
  - Équ. (22) : $\partial V/\partial\phi = 0$ et $\partial V/\partial z = 0$
  - Donc V est fonction uniquement de ρ !
  - $E_\rho(\rho) = -\frac{\mathrm{d}V(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = -V'(\rho)$

$$V(\rho) = -\int E_\rho(\rho)\,\mathrm{d}\rho + C \tag{24}$$

  - C : constante à déterminer en imposant une valeur de V (p.ex. $V_{\text{réf}} = 0$)

55

Analyse vectorielle 4 : circulation, rotationnel

Couper une surface en morceaux. . .

- *Circulation* du champ $\vec{A}$ le long de Γ :

$$\int_\Gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{ou} \quad \int_\Gamma \vec{A} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l \tag{25}$$

  Circulation : un nombre $(> 0, < 0, = 0)$
  égal à la valeur moyenne de $A_{\text{tan}} \times$ longueur de Γ
- À partir de maintenant : courbe Γ fermée
- Surface S (ouverte) entourée par Γ (fermée)
- Partager S en S_1, S_2, entourées par Γ_1, Γ_2

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \oint_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot \hat{t}_1\, \mathrm{d}l + \oint_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot \hat{t}_2\, \mathrm{d}l$$

- Continuer. . .

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{A} \cdot \hat{t}_i\, \mathrm{d}l \right) \tag{26}$$

- . . . jusqu'où ?
- Courbe fermée Γ_i et surface S_i : élémentaires

57

Rotationnel

- Quelle est la circulation le long d'une courbe élémentaire fermée ?
- Rotationnel $\triangleq \frac{\text{circulation courbe élémentaire fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}$
- Faire intervenir le vecteur $\hat{\boldsymbol{n}}$ de la surface
- Sens de circulation $\hat{\boldsymbol{t}} \leftrightarrow$ sens de la normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ (Périph' externe $\leftrightarrow$ tour Eiffel)
- $$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \triangleq \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l \tag{27}$$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$: un champ *vectoriel* ! (norme + sens)
- À chaque point de l'espace, $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$ (composante du $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$ selon $\hat{\boldsymbol{n}}$) $\propto$ circulation autour de ce point sur le bord d'une surface élémentaire $\perp \hat{\boldsymbol{n}}$
- Si le champ « tourne » ($\|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}\| \neq 0$), il fait des tourbillons autour du vecteur du rotationnel (règle de la main droite).
- La surface dont $\hat{\boldsymbol{n}} \parallel \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$ contient un tourbillon du champ.
- Visualisation : un moulin immergé dans le champ.

58

Rotationnel du champ électrostatique

- Courbe élémentaire autour d'une surface plane ΔS
- Circulation du champ électrostatique (13) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = 0$$

- Circulation par surface plane :

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} 0 = 0$$

- Pour toutes les surfaces ΔS, $\hat{\boldsymbol{n}}$!
- Rotationnel du champ électrostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}} \tag{28}$$

- (et alors ?)

59

Calcul du rotationnel

- Système de coordonnées cartésiennes

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\text{circulation courbe élémentaire fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}$$

- Trois courbes élémentaires autour de (x, y, z) :
  1. $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$: surface plane, centrée à (x, y, z),
  de dimensions $\Delta x, \Delta y$ ($\Delta S = \Delta x \Delta y$)
- Calculer la circulation le long de cette courbe

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}|_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

- Les deux autres courbes ($\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ et $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$) :

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}|_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad , \quad \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}|_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

60

Le rotationnel en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{29}$$

développer selon la première ligne !

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

61

Le rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho\hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right] \end{pmatrix} \tag{30}$$

62

Le rotationnel en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\,\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} \tag{31}$$

63

Énergie électrostatique

64

Charge ponctuelle

- Travail dépensé $P \to A =$ Énergie potentielle

$$W_{P\to A} = q[V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_P)] = qV(\vec{r}_A) = \mathcal{U}_e$$

- L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q :

$$\boxed{\mathcal{U}_e = qV(\vec{r})} \quad (32)$$

- $V(\vec{r})$: potentiel créé par toutes les *autres* charges

65

Ensemble de N charges (1)

- $\mathcal{U}_e$: Le travail dépensé pour déplacer *toutes* les charges de $P \to A$
- Charges déplacées l'une après l'autre, q_i à $\vec{r}_i$
- $V_j(\vec{r}_i)$: potentiel créé au point $\vec{r}_i$ par la charge q_j

Déplacée	Présente(s)	Travail dépensé
q_1	—	0
q_2	q_1	$q_2V_1(\vec{r}_2)$
q_3	q_1, q_2	$q_3V_1(\vec{r}_3) + q_3V_2(\vec{r}_3)$
...	...	...
q_N	$q_1, \ldots, q_{N-1}$	$q_N\,[V_1(\vec{r}_N) + \ldots + V_{N-1}(\vec{r}_N)]$
	Total :	$\mathcal{U}_e = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j<i} q_iV_j(\vec{r}_i)$

- Peut-on trouver une formule plus simple ?

66

Ensemble de N charges (2)

- $\mathcal{U}_\mathrm{e} = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i)$
- Remarque : $q_i V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = q_j V_i(\vec{r}_j)$ (normal !)
- On ajoute l'autre moité des termes et on divise par deux !

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\mathrm{e} &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} q_i V_j(\vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} q_i V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[q_i \left(\sum_{j\neq i} V_j(\vec{r}_i) \right) \right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)} \tag{33}$$

- $V(\vec{r}_i)$: potentiel créé au point $\vec{r}_i$ par toutes les *autres* charges (sauf la q_i)

67

Distribution continue de charges

1. Volumique : $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{34}$$

2. Surfacique : $\mathrm{d}q = \rho_s(\vec{r})\,\mathrm{d}S$

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_S \rho_s(\vec{r}) V(\vec{r})\,\mathrm{d}S \tag{35}$$

3. Linéique : $\mathrm{d}q = \rho_l(\vec{r})\,\mathrm{d}l$

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_\Gamma \rho_l(\vec{r}) V(\vec{r})\,\mathrm{d}l \tag{36}$$

- $V(\vec{r})$: le potentiel au point $\vec{r}$ créé par la distribution
- Intégrer *sur les charges*

68

Densité volumique d'énergie

- Peut-on exprimer l'énergie en termes de champ $\vec{E}$ plutôt que de potentiel V et de charges ρ ?

$$\mathcal{U}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$
$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$$
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,V$$

- Sans démonstration : la (34) devient

$$\boxed{\mathcal{U}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \epsilon_0 E^2(\vec{r})\,\mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{37}$$

- $\epsilon_0 E^2/2$: densité volumique d'énergie ($\mathrm{J\,m^{-3}}$)
- Intégrer *partout dans l'espace* !

69

Électrostatique : récapitulatif 70

Équations du champ électrique (1)

- Forme intégrale : flux et circulation
  Forme locale : divergence et rotationnel

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = 0 \qquad \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

- Potentiel

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}\,V$$

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\,\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l$$

$$\text{Si } \vec{\boldsymbol{E}} = E_x \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \;:\; V(x) = -\int E_x(x)\,\mathrm{d}x + C$$

71

Équations du champ électrique (2)

- Énergie potentielle électrostatique

$$\mathcal{U}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})$$

$$\mathcal{U}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) V(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\mathcal{U}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \epsilon_0 E^2(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

72

Conducteurs en électrostatique

73

Qu'est-ce qu'un conducteur ?

- Conducteur (contraire : isolant ou « diélectrique »)
- Contient des porteurs de charge en libre circulation
- « Porteurs de charge » :
  électrons libres dans le métal
- Les charges (électrons) sont *libres* à se déplacer
- Les charges ($+$ ou $-$) se repoussent le plus loin possible : on retrouve des *charges uniquement sur la surface* d'un conducteur…

74

Le champ et les charges à l'intérieur

- « À l'intérieur » : *dans* le métal
- À l'*équilibre électrostatique*, les charges ne se déplacent plus (par définition)...
- ...alors qu'il y a des électrons libres à l'intérieur !
- Pas de déplacement parce que pas de force !

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{à l'intérieur d'un conducteur}$$

- Loi de Gauss à l'intérieur du conducteur :
  forme intégrale : $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$
  forme locale : $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$
- L'intérieur du conducteur est *neutre* !

75

Le champ et les charges dans une cavité

- « Cavité » : la partie interne d'un conducteur creux
- Cavité vide (neutre)
- Calculer la circulation de $\vec{E}$: chemin Γ dans la cavité et dans le conducteur

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{dans une cavité sans charge}$$

- Loi de Gauss à l'intérieur du conducteur :
  forme intégrale : $Q_{\text{cav}} + Q_{\text{surf. int}} = 0$
- Pas de charges sur la surface interne si cavité vide !
  (WL, L5, 28m26–31m27)
- Mêmes résultats en présence d'un champ $\vec{E}_{\text{ext}}$
  (WL, L5, 43m13–45m41)
- Principe de *blindage* (cage de Faraday)
  (WL, L5, 45m43–49m58)

76

Le champ à la surface du conducteur (1)

- À l'équilibre, les charges ne se déplacent plus...
- ...pas de composante $\vec{E}$ *tangentielle*
- Le champ $\vec{E}$ est nul à l'intérieur
- Des charges uniquement sur la surface :
  densité surfacique ρ_s $(\mathrm{C\,m^{-2}})$
- Loi de Gauss : un cylindre autour de la surface

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}\hat{n}} \tag{38}$$

- Le champ $\vec{E}$ est
  1. *perpendiculaire* à la surface du conducteur
  2. proportionnel à la densité surfacique des charges
- Un conducteur (+ ses cavités sans charge)
  forme une région *équipotentielle*

77

Le champ à la surface du conducteur (2)

- Deux sphères métalliques, rayons R_1, R_2
- Très éloignées ; connectées par un fil conducteur
- Charges Q_1, Q_2
- Densité de charge surfacique $\rho_{si} = Q_i/4\pi R_i^2$
- Potentiel : $V(R_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{R_i}$
- « Connectées » : $V(R_1) = V(R_2)$
- $\Longrightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$
- Si $R_1 > R_2$, $\rho_{s1} < \rho_{s2}$ donc $E_1 < E_2$

  Le champ électrique est plus fort aux endroits où le rayon de courbure est petit (p.ex. pointes)

- Démonstration : une casserole chargée
  (WL, L6, 6m30–9m00)

78

Rigidité diélectrique

- Quand les isolants deviennent conducteurs. . .
- R.D. : valeur maximale du champ électrique dans un isolant avant qu'il ne devienne conducteur
- Mécanisme : quand $E > E_{\text{max}}$,
  électrons libres accélérés par le champ ; avalanche d'électrons libres ; le milieu s'ionise et devient conducteur ; formation d'arc électrique ; son et lumière à la recombinaison électrons/ions
- Dans l'air $\boxed{E_{\text{max}} = 3\,\text{MV/m}}$
- Si $E > E_{\text{max}}$, décharge électrostatique
  (WL, L6, 40m27–42m10)
- Effet corona : décharge électrostatique sans formation d'arc ; « fuite » de charges par les pointes ; champ électrique élevé, mais ne dépasse pas E_{max}
  (WL, L6, 42m12–46m00)

79

Rigidité diélectrique : quelques valeurs typiques

Matériau	R.D. ($\text{MV}\,\text{m}^{-1}$)
Air (sec, à $25\,°\text{C}$)	3
Quartz	8
Titanate de strontium	8
Néoprène	12
Nylon	14
Pyrex	14
Huile silicone	15
Papier	16
Bakelite	24
Polystyrène	24
Teflon	60

Remarque : $\text{MV}\,\text{m}^{-1} = \text{kV}\,\text{mm}^{-1}$

80

Courants électriques

81

Des charges en mouvement

- Courant électrique I = Charges / Temps
- Quelques précisions…
- « Courant » : à travers une *surface*
- « Charges » : traversant la surface de façon *perpendiculaire*
- Inclure la surface à la définition !
- *Densité* de courant $\vec{J}$
  - Vecteur (champ vectoriel)
  - Direction : celle des charges *positives*
  - Module : charges traversant une surface $\perp$ par unité de temps et de surface
  - Unités : $\mathrm{C\,s^{-1}\,m^{-2}} = \mathrm{A\,m^{-2}}$

82

Calculer la densité de courant

- Des porteurs de charges libres à se déplacer
- Densité volumique des porteurs : n $(\mathrm{m^{-3}})$
- Charge des porteurs : q (C)
- Vitesse des porteurs : $\vec{v}$ $(\mathrm{m\,s^{-1}})$
- Un cylindre de longueur l et de section A ; section $\perp \vec{v}$
- Charge totale dans le cylindre : $Q = nlAq$ traversant la section A en un temps $t = l/v$
- Densité de courant :

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}} \quad (\mathrm{A\,m^{-2}}) \tag{39}$$

- Si plusieurs types de porteurs :

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

83

Conservation de la charge : forme intégrale

- Courant à travers une surface élémentaire :

$$\mathrm{d}I = \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \quad (> 0 \text{ ou } < 0)$$

- Courant à travers une surface ouverte :

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q_{\text{surf}}}{\mathrm{d}t} = \int_S \mathrm{d}I = \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S} \tag{40}$$

- Courant à travers une surface *fermée* :

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\mathrm{d}t}} \tag{41}$$

- La charge totale dans l'Univers est constante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q_{\text{surf fermée}} + Q_{\text{int}}\right) = 0$$

84

Conservation de la charge : forme locale

- À partir de (41) on remplace :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{J}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} \text{ (th. de la divergence)}$$

$$Q_{\text{int}} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Conservation de la charge :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial t}} \tag{42}$$

- Les « sources » du champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{J}}$ sont les variations temporelles de ρ !

85

Électronique : loi des nœuds

- En Électronique (« basses fréquences »),
  pas d'accumulation de charges dans un circuit :

$$\frac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{J}} = 0$$

- Donc sur une surface S autour d'une jonction :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{J}}\, \mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

- Loi des nœuds (loi de Kirchhoff) :

$$\sum_i I_i = 0 \quad , \quad I \text{ sortant} > 0$$

- Courant I *constant* le long d'un fil !
  ($\neq$ d'une ligne de transmission. . .)

86

Vitesses des électrons dans les conducteurs (1)

- Électrons libres, en absence de champ électrique :
  mouvement *aléatoire*
- Données cuivre, température $T = 300\,\mathrm{K}$
- Vitesse de Fermi : $v_F \approx 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Temps entre les collisions $\tau \approx 10^{-14}\,\mathrm{s}$
- Distance entre les collisions : $d = v_F\tau \approx 10^{-8}\,\mathrm{m}$
- Densité des électrons libres : $n \approx 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}}$
- Densité de courant :

$$J = nqv_F \overset{?}{\approx} 10^{29} 1.6 \times 10^{-19} 10^6\,\mathrm{A\,m^{-2}}$$

- ? ? ?
- Vitesse *moyenne* nulle, $\vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{0}}$!

87

Vitesses des électrons dans les conducteurs (2)

- Conducteur de longueur l, de section A
- Appliquer une ddp $U = V_{(+)} - V_{(-)}$
- Champ dans le conducteur $\neq \vec{\mathbf{0}}$!

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, V = -\frac{U}{l}\hat{\boldsymbol{e}}_{(-)\to(+)} = \frac{U}{l}\hat{\boldsymbol{e}}_{(+)\to(-)}$$

- Force $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = q_e\vec{\boldsymbol{E}}$ sur les électrons libres
- Collisions : force de « friction » $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}} = -f\vec{\boldsymbol{v}}$
- Forces et vitesse sur le même axe : pas de vecteurs

$$m_e\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q_eE - fv$$

$$\frac{m_e}{f}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = \frac{q_e}{f}E \tag{43}$$

88

Vitesses des électrons dans les conducteurs (3)

- Solution de (43) :

$$v = C\exp\left(-\frac{f}{m_e}t\right) + \frac{q_e}{f}E$$

- Conditions initiales : $v(t=0) = 0$
  donc $C = -q_eE/f$
- Unités de f/m_e : s^{-1}, on peut l'appeler $1/\tau$

$$v(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\frac{q_e\tau}{m_e}E \tag{44}$$

- Vitesse de dérive des électrons libres :

$$\boxed{v_d = \frac{q_e\tau}{m_e}E} \qquad t \gg \tau \approx 10^{-14}\,\mathrm{s} \tag{45}$$

- Mobilité : $\mu_e = q_e\tau/m_e$

89

Courants dans les conducteurs

- Vitesse de dérive $\longrightarrow$ densité de courant :

$$\vec{J} = nq_e\vec{v}_d = \frac{nq_e^2\tau}{m_e}\vec{E}$$

- Loi d'Ohm (1827)

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{46}$$

- Conductivité ($\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1} = \mho/\mathrm{m} = \mathrm{S}\,\mathrm{m}^{-1}$)

$$\boxed{\sigma = \frac{nq_e^2\tau}{m_e} = nq_e\mu_e} \tag{47}$$

- Résistivité $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ($\Omega\,\mathrm{m}$)

Conductivité : quelques valeurs typiques

Matériau	σ ($\mathrm{S}\,\mathrm{m}^{-1}$)
Quartz	$\approx 10^{-17}$
Polystyrène	$\approx 10^{-16}$
Caoutchouc	$\approx 10^{-15}$
Porcelaine	$\approx 10^{-14}$
Verre	$\approx 10^{-12}$
Eau distillée	$\approx 10^{-4}$
Sol sec	$\approx 10^{-3}$
Eau	$\approx 10^{-2}$
Graisse animale	$\approx 4 \times 10^{-2}$
Corps humain	≈ 0.2

Eau salée : quels porteurs ?
(WL, L9, 41m05–43m08)

Matériau	σ ($\mathrm{S}\,\mathrm{m}^{-1}$)
Eau salée	≈ 4
Silicone	10^{3}
Graphite	$\approx 10^{5}$
Acier	2×10^{6}
Plomb	5×10^{6}
Tungsten	1.8×10^{7}
Aluminium	3.5×10^{7}
Or	4.1×10^{7}
Cuivre	5.7×10^{7}
Argent	6.1×10^{7}

Électronique : loi d'Ohm

- $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ou $\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J}$
- Densité de courant : $J = I/A$
- Champ électrique : $E = U/l$

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} \longrightarrow \boxed{U = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}I \triangleq RI}$$

- Attention aux « conventions » :
  1. $U = V_{(+)} - V_{(-)}$ (ddp ou « tension »)
  2. Sens de I : de $(+)$ vers $(-)$ (comme $\vec{E}$ et $\vec{J}$)
- Attention, R n'est pas toujours constante !
- $\sigma \propto \tau$ (temps entre collisions)
- $I \uparrow \Rightarrow T \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow \Rightarrow \sigma \downarrow \Rightarrow \rho \uparrow \Rightarrow R \uparrow$
- Exemple : tungsten (WL, L9, 22m25–23m02)

92

Électronique : puissance consommée

- « Appliquer une ddp $U = V_{(+)} - V_{(-)}$ sur un conducteur »
- On crée un champ $\vec{E}$ et un courant $\vec{J}$
- Des charges positives se déplacent spontanément : $(+) \to (-)$
- $W_{(+)\to(-)} = q\left(V_{(-)} - V_{(+)}\right) = -qU$
- $W_{(+)\to(-)} < 0$: travail restitué par la charge...
- ...donc fourni par le champ ; consommation
- Le champ dépense $\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}q$ pour chaque charge $\mathrm{d}q$
- Débit de charges déplacées : $\mathrm{d}q/\,\mathrm{d}t = I$
- Puissance consommée :

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{U\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = UI} \qquad (48)$$

- U et I selon les « conventions » (tr.92)
- Si $P = UI < 0$: générateur !
  (WL, L10, 47m20–50m03)

93

Magnétostatique

94

Magnétisme

- Aimants, boussoles, ...
- Quel rapport avec l'électricité ?
- Aucun, avant 1820 !
- Hans Christian Ørsted (1777–1851)
  études médicales, thèse en philosophie (1799)
  Professeur à l'Univ. de Copenhague (1806)
- Avril 1820 : cycle de conférences
- « Pourquoi l'aiguille d'une boussole bouge pendant les orages ? »
- Étude de l'interaction entre un courant électrique et une boussole
- *LA Découverte : un courant électrique provoque un effet magnétique ! ! !*
- La naissance de l'électromagnétisme
  (WL, L11, 8m00–9m30)

95

Loi de Biot-Savart

- ... les nouvelles arrivent à Paris (11/9/1820)
- Biot (1774–1862) et Savart (1791–1841) : formulation quantitative (30/10/1820)
- Champ magnétique créé par un courant :
  (loi de Biot-Savart)

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\wedge\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}} \tag{49}$$

- $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$: longueur élémentaire de courant
- $\vec{\boldsymbol{r}}$: de l'élément de courant au point d'observation
- $\hat{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}/r$
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$: perméabilité du vide
  (valeur exacte)

96

Champ magnétique d'une charge en mouvement

- Loi de Biot-Savart : $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\wedge\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$
- Conducteur (fil) de section S
- $I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\boldsymbol{J}}S\,\mathrm{d}l$ (astuce !)
- $\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{S\,\mathrm{d}l\vec{\boldsymbol{J}}\wedge\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{S\,\mathrm{d}lnq\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

- $S\,\mathrm{d}ln$: nombre de charges dans l'élément de courant
- Champ magnétique créé par une seule charge :

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{50}$$

- *Attention* : pas de courant stationnaire avec une seule charge ! formule approximative. . .

97

Sources du champ magnétique

- $\vec{\boldsymbol{B}}$: créé par des charges en mouvement (courants)
- Impossible d'isoler des « charges magnétiques »
  (on a toujours deux pôles dans un aimant !)
- « Il n'existe pas de monopôles magnétiques » (?)
- Loi de Gauss pour le champ magnétique :

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0 \quad \text{forme intégrale}} \tag{51}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \text{forme locale}} \tag{52}$$

98

Force magnétique (Laplace et Lorentz)

- Une charge en mouvement dans un champ magnétique subit une force :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \quad \text{force de Laplace} \tag{53}$$

- Unités de $\vec{\boldsymbol{B}}$: $\mathrm{N\,s\,C^{-1}\,m^{-1}} = \mathrm{T}$: Tesla
- Unité non SI : Gauss, $1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$
- Champ magnétique terrestre : $\approx 0.5\,\mathrm{G}$
- $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$: pas de travail !
- En présence d'un champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ et d'un champ $\vec{\boldsymbol{B}}$:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}} &= \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = q\vec{\boldsymbol{E}} + q\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \\ &= q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \text{force de Lorentz} \end{aligned} \tag{54}$$

99

Force magnétique sur un courant

- Courant I dans un conducteur de section S
- Dans un champ $\vec{\boldsymbol{B}}$, sur chaque porteur de charge : $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$
- Force sur l'élément $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$:

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = n\,\mathrm{d}lS\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = n\,\mathrm{d}lSq\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$$

- $\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}$
- $\vec{\boldsymbol{J}}S\,\mathrm{d}l = \vec{\boldsymbol{I}}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- Force magnétique sur un élément de courant I :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}} \tag{55}$$

100

Force entre deux courants

- Deux conducteurs parallèles (infinis. . .)
- Courant I_1 génère champ $\vec{B}_1$ (TD 5.1)

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi\rho}$$

- Élement de courant I_2 subit force $\mathrm{d}\vec{F}_m$:

$$\mathrm{d}\vec{F}_m = I_2 \, \mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}_1 \quad , \quad \mathrm{d}\vec{l} \perp \vec{B}_1$$

$$\frac{\text{force magnétique}}{\text{longueur}} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi\rho}$$

- (Conducteurs infinis → force totale infinie !)
- Deux courants parallèles s'attirent
- Deux courants opposés se repoussent
  Ampère, 18/9/1820 (WL, L11, 15m00–17m15)

101

Loi d'Ampère (forme intégrale)

- Ørsted : « le "champ magnétique" décrit des cercles »
- Lignes de champ magnétique (TD 5.1 et 5.2) :
  entourent les courants
- Ampère : mise en équation
- La circulation du champ $\vec{B}$, calculée sur une courbe Γ, est proportionnelle au courant traversant la surface S associée à la courbe Γ :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \hat{t} \, \mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S \tag{56}$$

- Courbe Γ : pas nécessairement un cercle !
- Surface S : ouverte, Γ est son bord
- $\hat{t}$ et $\hat{n}$: Périph'externe ↔ Tour Eiffel (tr.#58)
- $\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S$: le courant I enlacé par la courbe Γ

102

Théorème du rotationnel

- (…après le rappel des tr.#57 et #58…)
- Surface S (ouverte) entourée par Γ (fermée)
- Partager S en $S_1, S_2, \ldots$, entourées par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l &= \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_i\,\mathrm{d}l\right)\\ &= \sum_i \left(\hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}\,\Delta S_i\right)\\ &= \int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = \int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S} \tag{57}$$

- Théorème de Stokes

103

Loi d'Ampère (forme locale)

- Point de départ : loi d'Ampère forme intégrale, éq.(56) :

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

- Appliquer théorème de Stokes :

$$\int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

pour toute surface ouverte S
- Loi d'Ampère (forme locale) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}} \tag{58}$$

- Le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ « tourne » autour de $\vec{\boldsymbol{J}}$

104

Magnétostatique : récapitulatif 105

Équations du champ magnétique

- Flux et circulation (formes intégrale et locale)

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = 0 \qquad \mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}$$

106

Analyse vectorielle 5 : le nabla $\vec{\nabla}$ 107

L'opérateur nabla

- « Opérateur » : doit agir sur quelque chose !
  (il ne doit jamais rester seul)
- Champs (scalaires ou vectoriels) : fonctions de plusieurs variables
- Coordonnées cartésiennes : les trois dimensions sont équivalentes
- Définir un « vecteur » spécial :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{59}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

- L'opérateur nabla est un vecteur gourmand !
  il agit sur des champs (scalaires ou vectoriels)

108

Opérations avec le nabla (1)

▼ On peut traiter $\vec{\nabla}$ comme un vecteur ordinaire

1. Vecteur fois scalaire : $\Phi(x,y,z)$ champ scalaire

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \overset{(21)}{=} \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi \tag{60}$$

2. Vecteur · vecteur : $\vec{A}(x,y,z)$ champ vectoriel

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \overset{(10)}{=} \text{div}\,\vec{A} \tag{61}$$

3. Vecteur ∧ vecteur : $\vec{A}(x,y,z)$ champ vectoriel

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \overset{(29)}{=} \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{A} \tag{62}$$

109

Opérations avec le nabla (2)

▼ Vecteur $\vec{\nabla}$: les résultats sont valables dans *tous* les systèmes de coordonnées !

▼ Mais $\vec{\nabla}$ a une forme simple que dans le cartésien

$$\text{p.ex.,}\qquad \vec{\nabla} \neq \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \quad !!!$$

▼

Opération	De	À
$\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi$	scalaire Φ	vecteur $\vec{\nabla}\Phi$
div $\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	scalaire $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	vecteur $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$
$\Delta\Phi$	scalaire Φ	scalaire $\nabla^2\Phi$
$\vec{\Delta}\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	vecteur $\vec{\nabla}^2\vec{A}$

110

Quelques formules avec le nabla

- Plutôt simples :

$$\text{div}\,\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi) \triangleq \nabla^2\Phi \tag{63}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge (\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi) = \vec{\mathbf{0}} \tag{64}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}) = 0 \tag{65}$$

- Et une plus compliquée...

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{\Delta}}\vec{\boldsymbol{A}} \tag{66}$$

ou

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{A}} \tag{67}$$

utiliser $\vec{\boldsymbol{A}} \wedge (\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$

111

Le(s) Laplacien(s) : nabla au carré

- L'operateur $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}$ prend deux formes :

1. Opérateur sur un scalaire : laplacien *scalaire*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &\triangleq \nabla^2\Phi \triangleq (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\Phi \\ &\overset{\text{cart}}{=} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{68}$$

   formules plus compliquées dans les autres systèmes !

2. Opérateur sur un vecteur : laplacien *vectoriel*

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\Delta}}\vec{\boldsymbol{A}} &\triangleq \vec{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{A}} \triangleq (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\vec{\boldsymbol{A}} \\ &\overset{\text{cart}}{=} (\nabla^2 A_x)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{69}$$

   Attention : décomposition en composantes $\nabla^2 A_i$ *uniquement* en cartésiennes !

112

Gauss, Stokes, etc. : un autre point de vue (1)

- Théorème de Gauss (11) :

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \qquad (3\text{D} \to 2\text{D})$$

- Théorème de Stokes (57)

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \qquad (2\text{D} \to 1\text{D})$$

- Formule du gradient (tr.#53)

$$\int_{\Gamma:\,\vec{r}_A\to\vec{r}_B} \overrightarrow{\text{grad}}\,V\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) \qquad (1\text{D} \to 0\text{D})$$

- Formule de la primitive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad (1\text{D} \to 0\text{D sur une ligne droite})$$

113

Gauss, Stokes, etc. : un autre point de vue (2)

- Théorème de Gauss (11) :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \qquad (3\text{D} \to 2\text{D})$$

- Théorème de Stokes (57)

$$\int_S \vec{\nabla}\wedge\vec{A}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \qquad (2\text{D} \to 1\text{D})$$

- Formule du gradient (tr.#53)

$$\int_{\Gamma:\,\vec{r}_A\to\vec{r}_B} \vec{\nabla}V\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) \qquad (1\text{D} \to 0\text{D})$$

- Formule de la primitive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad (1\text{D} \to 0\text{D sur une ligne droite})$$

114

Électrostatique – Magnétostatique : une comparaison

115

Deux champs bien différents (?)

- 2+2 équations (formes locales)

Électrostatique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

(sources sans tourbillons)
Potentiel scalaire V

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V = \vec{0}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Magnétostatique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(tourbillons sans sources)
Potentiel vectoriel $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

116

Phénomènes d'Induction (enfin, un peu de mouvement !) 117

« Force » électromotrice (1)

- Dans un circuit (Électronique) :
  force par charge, $\vec{\boldsymbol{f}}$, crée le courant

$$\vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}} + \vec{\boldsymbol{E}} \tag{70}$$

- $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}}$: force par charge *dans* la source
- $\vec{\boldsymbol{E}}$: champ électrostatique (partout)
- « Force » électromotrice (définition générale) :

$$\boxed{\text{fem} \triangleq \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l} \quad (V) \tag{71}$$

- Champ électrostatique : circulation nulle

$$\text{fem} = \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l \quad (V) \tag{72}$$

- Équ. (72) : cas spécial d'un circuit avec source

118

« Force » électromotrice (2)

- Loi d'Ohm : $\vec{J} = \sigma \vec{f}$
- À l'intérieur de la source idéale : pas de résistance
  $\sigma = \infty \Rightarrow \vec{f} = \vec{J}/\sigma = 0 \Rightarrow \vec{f}_s = -\vec{E}$
- ddp aux bornes de la source :

$$\begin{aligned} V_+ - V_- &= -\int_{\Gamma:(-)\to(+)} \vec{E} \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l \\ &= -\int_{\Gamma:(-)\to(+)} (-\vec{f}_s) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l \\ &= \oint_{\Gamma} \vec{f}_s \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l \overset{(72)}{=} \text{fem} \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{fem} = \text{ddp aux bornes de la source !}}$
- *Polarité : le vecteur $\hat{t}$ va du (-) au (+) de la source*
- fem $= IR$

119

fem due au mouvement

- Un circuit se déplace dans un champ magnétique
- ...
- fem : *uniquement* pendant les phases d'entrée/sortie
- fem due au mouvement :

$$\text{fem} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad (73)$$

  où Φ_B est le flux magnétique à travers le circuit :

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S$$

- Changement de flux : source de tension !
- $\boxed{\text{fem génère } I \text{ qui } \textit{s'oppose} \text{ au changement de } \Phi_B\text{ !}}$

120

fem due au mouvement : des exemples !

$\vec{B}$: constant et uniforme dans une région

- Circuit en déplacement $|\text{fem}| = Blv$ (TD 8.1)
- Circuit en rotation (TD 8.2)
  (WL, L17, 17m10–18m20)
  (gén. humain : WL, L17, 25m13–27m25)
  (ampoule : WL, L17, 41m52–44m40)
- Conducteur sur rails $|\text{fem}| = Blv$ (TD 8.3)
- Courants de Foucault (frein magnétique)
  (WL, L17, 40m18–41m52)
- Circuit en chute « libre » dans un champ magnétique
  (WL, L17, 47m18–48m40)

121

Induction électromagnétique

- Expériences de Faraday (1831)
- « Puisque $\vec{J}$ crée $\vec{B}$...
  est-ce que $\vec{B}$ crée $\vec{J}$? »
- Conclusion : ce n'est pas $\vec{B}$ qui crée $\vec{J}$...
  mais les *changements* de $\vec{B}$!
- Aimant et boucle (WL, L16, 10m30–12m30)
- Il n'y a pas de source dans la boucle ! $\vec{f}_s = \vec{0}$
- $\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E} = \vec{E}$
- fem due au champ électrique *induit* (71)

$$\text{fem} = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l \neq 0 \quad \text{(comparer avec (13) !)} \tag{74}$$

- La *variation* de $\vec{B}$ crée un champ $\vec{E}$! ! !
- « Champ électrique *induit* »

122

Loi de Faraday (forme intégrale)

- $$\text{fem} = \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}l = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S \tag{75}$$
- Courbe (fermée) Γ : le bord de la surface (ouverte) S
- Signe $-$: loi de Lenz :
  Le champ électrique induit génère des courants qui, à leur tour, génèrent un champ secondaire $\vec{\boldsymbol{B}}'$ s'opposant à la variation du flux du champ magnétique initial.
- (La Nature n'aime pas le changement)
- Rappel (TD 5) : champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ créé par une boucle de courant
- Solénoïde et boucle (WL, L16, 30m00–32m30)

Loi de Faraday (forme locale)

- Point de départ : loi de Faraday (75) :

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}l = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

- Appliquer le théorème de Stokes :

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

  pour toute surface S
- Loi de Faraday (forme locale) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \tag{76}$$

La règle du flux magnétique

- On combine la fem due au mouvement (73)...
- et la fem due aux variations de $\vec{B}(t)$ (75)
- (deux phénomènes bien *différents* ! ! !)
-

$$\text{fem} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{77}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{78}$$

- En déhors de l'électrostatique, le champ $\vec{E}$ n'est plus conservatif ! (circulation $\neq 0$)
- L'intégrale

$$\int_{\Gamma:\vec{r}_A\to\vec{r}_B} \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l$$

dépend du chemin choisi !
- (on reviendra sur ce sujet contre-intuitif, tr.#131)

125

Le champ électrique induit

- Que nous dit la loi de Faraday ?
- Les variations de $\vec{B}$ créent un champ $\vec{E}$ induit
- Dans une région neutre ($\rho = 0$),

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

- Analogie avec le champ $\vec{B}$ en magnétostatique :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- *Les lignes du champ $\vec{E}$ induit sont des boucles !*
- équivalences :

$\vec{B}$	$\vec{E}$ induit
$\mu_0\vec{J}$	$-\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}t$
$\mu_0 I_{\text{enlacé}}$	$-\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$

126

Inductance : mutuelle

- Deux circuits séparés (p.ex. solénoïde et boucle)
- Courant $I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \Phi_2$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 \, \mathrm{d}S_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \, \mathrm{d}\vec{l}_1 \wedge \hat{r}}{r^2} \propto I_1$$

- Le flux à travers le 2 est proportionnel au courant de 1 :

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{79}$$

- $M_{21} = M_{12} = M$ inductance mutuelle entre les circuits
- M : paramètre purement *géométrique*
- Variations de I_1 génèrent un courant $I_2 = \text{fem}_2/R_2$:

$$\text{fem}_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{80}$$

127

Inductance : self

- Même phénomène avec un seul circuit !
- Courant $I \Rightarrow \vec{B} \Rightarrow \Phi_B$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S \quad \text{et} \quad \vec{B} = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{B} = \oint_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, \mathrm{d}\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2} \propto I$$

- Flux magnétique à travers un circuit $\propto$ courant

$$\Phi_B = LI \tag{81}$$

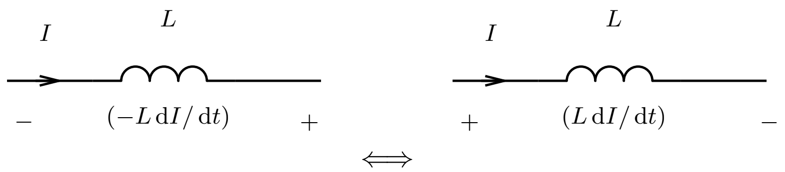
- L : self-inductance ; unités Henry : $\mathrm{H} = \mathrm{Wb\,A^{-1}} = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$
- $L = \Phi_B/I$: paramètre purement *géométrique*
- Variations de I génèrent une f.e.m. ... :

$$\text{fem} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{82}$$

- ... s'opposant aux variations !

128

Énergie magnétique (1)



- Puissance « consommée » : emmagasinée dans la self

$$P = \left(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) I \tag{83}$$

- $P > 0$ quand $I \uparrow$
- $I(t = 0) = 0$ et $I(t = t_0) = I_0$
- Énergie magnétique stockée dans la self :

$$\mathcal{U}_\mathsf{m} = \int_0^{t_0} P\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{84}$$

129

Énergie magnétique (2)

- Sans démonstration : la (84) devient

$$\boxed{\mathcal{U}_\mathsf{m} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r})\,\mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{85}$$

- $B^2/(2\mu_0)$: densité volumique d'énergie ($\mathrm{J\,m^{-3}}$)
- Intégrer *partout dans l'espace* !
- À comparer avec (37) :

$$\boxed{\mathcal{U}_\mathsf{e} = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0 E^2(\vec{r})\,\mathrm{d}V}$$

130

[Bizarre] Champ $\vec{E}$ non conservatif

- Circuit simple : pile (fem $= 1\,\mathrm{V}$), $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 900\,\Omega$
  Calculer courant et tensions
- Remplacer pile par $\mathrm{d}\Phi_B/\,\mathrm{d}t$
  Calculer courant et tensions : $\boxed{V_{R_1} \neq V_{R_2}}$! ! !
  L'intégrale
  $$-\int_{\Gamma:\vec{r}_A\to\vec{r}_B} \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \stackrel{?}{=} V_B - V_A$$
  dépend du chemin choisi WL, L16, 48m25–51m27
  (vidéo avec la théorie WL, L16, 34m51–51m27 ; texte détaillé)
- Champ électrique non conservatif :
  $$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \neq 0$$
  ddp sur un chemin fermé $\neq 0$ (CONTRE-INTUITIF)
  M. C. Escher, "Ascending and descending", 1960

131

Induction : récapitulatif

Les 4 équations, forme intégrale

- Flux et circulation

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho \,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = 0$$

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \,\mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S$$

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S$$

133

Les 4 équations, forme locale

- Divergence et rotationnel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

134

Équations de Maxwell 135

Un problème avec la loi d'Ampère ?

1. « Tester » les équations du rotationnel :
   - $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ OK
   - $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0\,???$

     $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \xrightarrow{(42)} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
2. Appliquer la loi d'Ampère dans un cas $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$:
   fil + condensateur

   La loi d'Ampère n'est pas valide en dehors de la magnétostatique

136

Le terme qui manque : courant de déplacement

- Loi d'Ampère (forme locale) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Loi d'Ampère-Maxwell (forme locale) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \vec{J_d} \right) = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} \right) \tag{86}$$

- Loi d'Ampère-Maxwell (forme intégrale) :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S + \mu_0 \int_S \underbrace{\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{J}_d} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S \tag{87}$$

- $\vec{J}_d$: courant « de déplacement »
- *Les variations de $\vec{E}$ créent un champ $\vec{B}$ induit !*

137

James Clerk Maxwell (1831–1879)

138

Les trois régimes en électromagnétisme

- Électrostatique (aucun déplacement de charges, $\mathrm{d}\rho/\,\mathrm{d}t = 0$)
  Magnétostatique (courants invariables dans le temps ; pas d'accumulation de charges, $\mathrm{d}\rho/\,\mathrm{d}t = 0 \overset{(42)}{\longrightarrow} \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- Quasistatique : des variations lentes dans le temps

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \underbrace{\ldots}_{\approx 0}$$

- Régime « complet » : les équations de Maxwell

139

Les équations de Maxwell

- Maxwell, 1864

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{88}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{89}$$
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \tag{90}$$
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} \tag{91}$$

- 4 équations = 2 scalaires + 2 vectorielles = $2 + 6 = 8$
- Équations : sources vers champs
- Force de Lorentz : effet des champs, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$
- Conservation de la charge : $\vec{\nabla}\cdot(91) \overset{(88)}{\longrightarrow} \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\,\mathrm{d}\rho/\,\mathrm{d}t$
- Le champ électromagnétique s'auto-alimente !

140

Ondes

141

Qu'est-ce qu'une onde ?

- Vagues (océan, fleuve, ...)
- Ondes acoustiques
- Vibrations d'une corde
- Ondes sismiques
- Signaux électriques
  (lignes de transmission, neurones)
- ...
- Vagues mexicaines (la ola) : concert, match de foot.

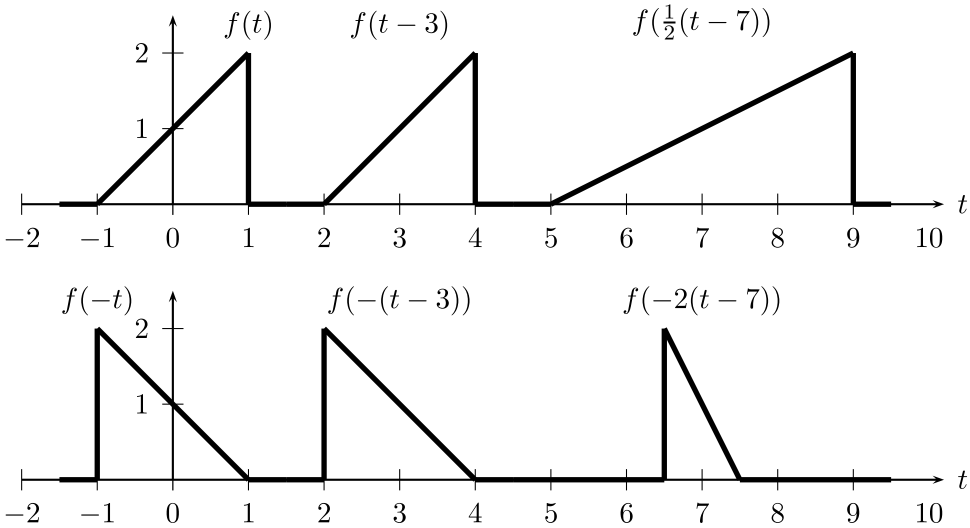
Onde : une *perturbation* qui se *propage* dans un *milieu*, sans transporter de matière.

"Wave on a string"

142

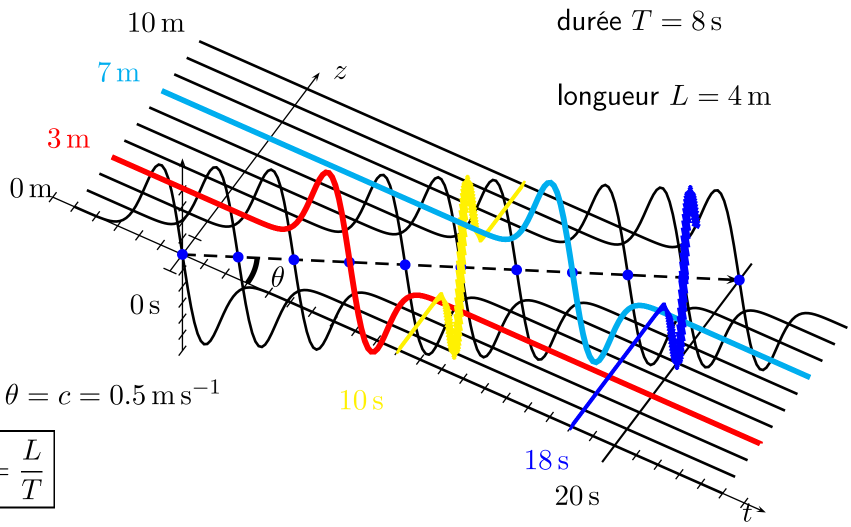
[Rappel] L'argument d'une fonction

- $f(t)$: fonction initiale
- Comment décaler / retourner / changer d'échelle ?



143

Propagation d'une impulsion



$\boxed{c = \frac{L}{T}}$

À $z = z_0$, $f(t - z_0/c)$: $f(\cdot)$ retardée de z_0/c

À $t = t_0$, $f\left(-\frac{1}{c}(z - ct_0)\right)$: $f(\cdot)$ retournée, dilatée par c, décalée à ct_0

144

L'équation d'onde (1)

- $f(t - \frac{z}{c})$: onde se propageant vers $+z$
- $f(t + \frac{z}{c})$: onde se propageant vers $-z$
- $f(t \pm \frac{z}{c}) = f(\frac{ct \pm z}{c}) = g(z \pm ct)$: autre vue
- $f(x,t)$: fonction à deux variables, espace et temps
- Dérivées temporelles et spatiales. . . premières

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'\left(t \pm \frac{z}{c}\right)' = f' \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f'\left(t \pm \frac{z}{c}\right)' = \pm\frac{1}{c}f'$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \pm\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

- et secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f'' \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\pm\frac{1}{c}\right)^2 f''$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \tag{92}$$

- (92) : équation d'onde (une dimension)

145

L'équation d'onde (2)

- Équation d'onde (trois dimensions)

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \tag{93}$$

- Équations à dérivées partielles (spatiales et temporelle) :
  la solution dépend des conditions initiales $f(\vec{\boldsymbol{r}}, t = 0)$ et des conditions aux limites $f(\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}, t)$
- f : propriété du milieu de propagation
  - hauteur de la surface de l'eau
  - pression acoustique
  - déplacement transversal d'une corde
  - ...
- vitesse de propagation c : dépend des paramètres du milieu

146

Ondes électromagnétiques

La prévision théorique de Maxwell (1)

- Les équations de Maxwell dans le vide, sans charges ni sources :

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

- Équations différentielles couplées
- Dérivée seconde pour découpler : agir avec $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$
  (agir, mais comment ? quelles opérations ?)

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \vec{\boldsymbol{E}}$$

148

La prévision théorique de Maxwell (2)

- Équation vectorielle

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{94}$$

se décompose (*uniquement en coordonnées cartésiennes*) :

$$\nabla^2 E_{x,y,z} = \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} \tag{95}$$

- Des *ondes électromagnétiques* existent !
- Vitesse de propagation :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} 4\pi 10^{-7}}} \mathrm{m\,s^{-1}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{96}$$

149

La lumière est une onde électromagnétique !

- $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- À partir de ϵ_0 et μ_0 on obtient la vitesse de la lumière
- Une pure coïncidence ?

  > « La vitesse des ondes électromagnétiques est presque celle de la lumière... ce qui donne une bonne raison de conclure que la lumière est en quelque sorte elle-même (en incluant le rayonnement de chaleur, et les autres radiations du même type) une perturbation électromagnétique qui se propage selon les lois de l'électromagnétisme. »
  > J.C. Maxwell, 1864

- Confirmation expérimentale en 1888 par H. Hertz (1857–1894)
- « Monsieur, à quoi ça sert ? »—« À rien. »

150

Le spectre électromagnétique

Type	Longueur d'onde λ (m)	Fréquence f (Hz)
Radio	$> 1 \times 10^{-1}$	$< 3 \times 10^{9}$
Micro-ondes	1×10^{-3}–1×10^{-1}	3×10^{9}–3×10^{11}
Infrarouge	7×10^{-7}–1×10^{-3}	3×10^{11}–4×10^{14}
Visible	4×10^{-7}–7×10^{-7}	4×10^{14}–7.5×10^{14}
Ultraviolet	1×10^{-8}–4×10^{-7}	7.5×10^{14}–3×10^{16}
Rayons X	1×10^{-11}–1×10^{-8}	3×10^{16}–3×10^{19}
Rayons Γ	$< 1 \times 10^{-11}$	$> 3 \times 10^{19}$

151

Ondes électromagnétiques planes, progressives, monochromatiques (OPPM) 152

Onde monochromatique vers +z

- Rappel TD 10.1 + visualisation en 3D
- Perturbation initiale harmonique (à $z = 0$) :

$$f(z = 0, t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \cos(\omega t)$$

- Onde se propageant selon $+\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$: $t \to t - \frac{z}{c}$

$$f(z, t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \cos(\omega t - kz)$$

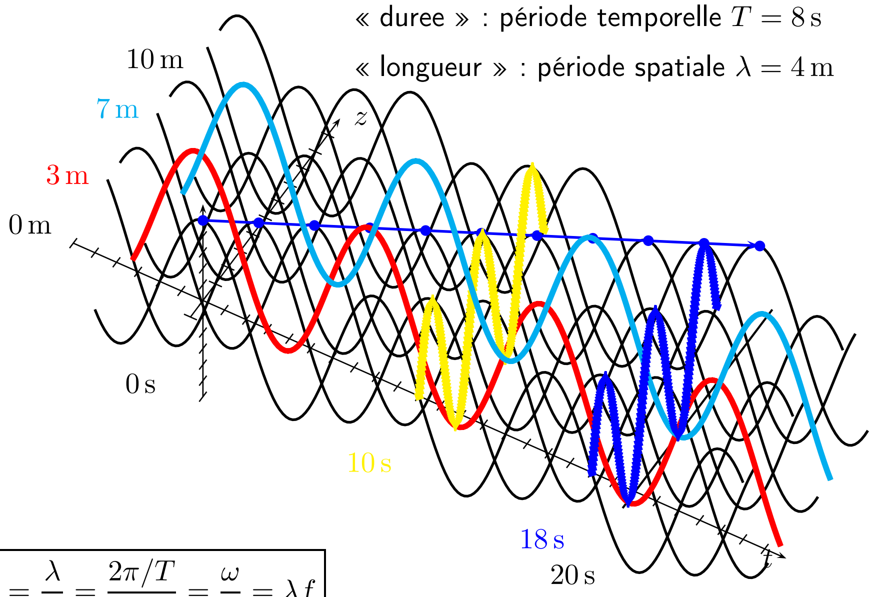
- $\lambda = cT$: longueur d'onde, la période spatiale (en m)
- $k = 2\pi/\lambda$: nombre d'onde (en $\mathrm{rad\,m^{-1}}$)
- $\vec{\boldsymbol{k}} = k\hat{\boldsymbol{k}} = k(+\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}})$: vecteur d'onde
- $\phi(z, t) = \omega t - kz$: la phase de l'onde
- $v_\phi = \omega/k = c$: la vitesse de phase

153

Propagation d'une sinusoïde

« duree » : période temporelle $T = 8\,\mathrm{s}$

« longueur » : période spatiale $\lambda = 4\,\mathrm{m}$



$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k} = \lambda f}$$

154

Onde électromagnétique PPM selon $+\hat{e}_z$

- Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{E}_0}_{\text{cste}} \cos(\omega t - kz) = \vec{\mathcal{E}}(z, t) \quad (97)$$

- « Monochromatique » : $\cos(\omega t - kz_0)$
  À chaque point de l'espace ($\vec{r}$ fixe), le champ $\vec{\mathcal{E}}$ oscille dans le temps.
  Les oscillations sont déphasées en fonction de l'endroit.
- « Progressive » : temps/espace couplés
  $f(t - z/c)$, onde selon $+\hat{e}_z$
- « Plane » : le champ $\vec{\mathcal{E}}$ est constant sur tout le plan $z = z_0$
- « Front d'onde » : lieu de points de même phase à t fixe
- Onde plane = fronts d'onde plans
- (D'autres formes d'onde existent : cylindriques, sphériques, ...)

155

Onde électromagnétique PPM selon $\hat{\boldsymbol{k}}$

- Onde PPM se propageant selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$:

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \cos(\omega t - kz)$$

- La phase de l'onde dépend uniquement de z
- z : la projection de $\vec{\boldsymbol{r}}$ sur la direction de propagation $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$

$$z = \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} = \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$$

- Cas général, onde PPM se propageant selon $\hat{\boldsymbol{k}}$:

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \cos(\omega t - k \underbrace{\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}}_{z \text{ si } \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}}) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \cos(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}) \tag{98}$$

- Fronts d'onde : des plans perpendiculaires à $\hat{\boldsymbol{k}}$
- OPPM : remplit *tout l'espace* (modèle mathématique !)
- Déphasage entre deux points $\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{2}}$:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \vec{\boldsymbol{k}} \cdot (\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{2}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1}}) = \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1} \to \mathbf{2}} \tag{99}$$

156

Notation complexe : définition

- Formule d'Euler :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{j}\,\sin(\phi) \;\rightarrow\; \cos(\phi) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}\right\}$$

- Application à une OPPM :

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \cos(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + \delta) \\
&= \mathrm{Re}\left\{\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + \delta)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{0}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}})}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\mathbf{0}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}})}\right\} \\
&\triangleq \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{\boldsymbol{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}
\end{aligned} \tag{100}$$

- $\vec{\underline{\boldsymbol{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega)$: représentation (ou amplitude) *complexe* de $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$

$$\boxed{\text{temps} \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \longleftrightarrow \vec{\underline{\boldsymbol{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) \quad \text{fréquence}}$$

157

Notation complexe : avantages (1)

- $\vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega)$: plus simple à manipuler ! (addition)

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}, t) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}, t) \\ &= \vec{E}_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1) + \vec{E}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_2) \\ &= \ldots ??? \ldots \\ &= \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}_1(\vec{r}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}_2(\vec{r}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{\underline{E}}_1(\vec{r}, \omega) + \vec{\underline{E}}_2(\vec{r}, \omega)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}\end{aligned}$$

$$\vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega) = \vec{\underline{E}}_1(\vec{r}, \omega) + \vec{\underline{E}}_2(\vec{r}, \omega) \tag{101}$$

- On additionne les représentations complexes, comme des vecteurs
- On ne multiplie *jamais* des représentations complexes !
  (*une seule* exception, quand on sait ce qu'on fait. . . ; équ. (136), tr.#183)

158

Notation complexe : avantages (2)

- $\vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega)$: plus simple à manipuler ! $(\partial/\partial t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega) \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\,\omega \vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\omega \vec{\underline{E}}(\vec{r}, \omega) \tag{102}$$

159

Notation complexe : avantages (3)

- $\vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega)$: plus simple à manipuler ! $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \overset{\text{OPPM}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\text{Re}\left\{\vec{\underline{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right\} = \text{Re}\left\{\underbrace{\vec{\underline{E}}_0}_{\text{cste}} \frac{\partial}{\partial x} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right\}$$

$$= \text{Re}\left\{-j\,k_x \vec{\underline{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right\} = \text{Re}\left\{-j\,k_x \vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega) e^{j\omega t}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \longleftrightarrow -j\,k_x \vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow -j\,k_x\hat{e}_x - j\,k_y\hat{e}_y - j\,k_z\hat{e}_z = -j\,\vec{k} \tag{103}$$

160

Notation complexe : application

- Notation complexe :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \text{Re}\left\{\vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega) e^{j\omega t}\right\}$$

$$\text{Si OPPM : } \vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega) = \vec{\underline{E}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{104}$$

- Passer du domaine « temporel » au domaine « fréquentiel »
- Remplacer dans les équations de Maxwell :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega) \tag{105}$$

$$\partial/\partial t \longrightarrow +j\,\omega \tag{106}$$

$$\text{Si OPPM : } \vec{\nabla} \longrightarrow -j\,\vec{k} \tag{107}$$

161

Équations de Maxwell : régime harmonique

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}$$

- Dans le vide, sans charges ni courants :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\underline{E}} = 0 \tag{108}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\underline{B}} = 0 \tag{109}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{\underline{E}} = -\,\mathrm{j}\,\omega\vec{\underline{B}} \tag{110}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{B}} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{\underline{B}} = \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}} \tag{111}$$

- L'équation d'ondes (94) devient l'équation de Helmholtz :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{\underline{E}} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\vec{\underline{E}} = 0} \tag{112}$$

Équations de Maxwell dans le cas d'une OPPM

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \delta) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\vec{\underline{E}}(\vec{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}$$

- Dans le vide, sans charges ni courants :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \longrightarrow \quad -\,\mathrm{j}\,\vec{k}\cdot\vec{\underline{E}} = 0 \tag{113}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \longrightarrow \quad -\,\mathrm{j}\,\vec{k}\cdot\vec{\underline{B}} = 0 \tag{114}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -\,\mathrm{j}\,\vec{k}\wedge\vec{\underline{E}} = -\,\mathrm{j}\,\omega\vec{\underline{B}} \tag{115}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{B}} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -\,\mathrm{j}\,\vec{k}\wedge\vec{\underline{B}} = \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}} \tag{116}$$

1. (113) : $\vec{\underline{E}}\perp\vec{k}$, le champ électrique est transversal
2. (114) : $\vec{\underline{B}}\perp\vec{k}$, le champ magnétique est transversal
3. (115) ; $\vec{\underline{B}} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{\underline{E}}$;(116) : $\vec{\underline{E}} = c^2\frac{1}{\omega}\vec{\underline{B}}\wedge\vec{k}$ (rappel $k = \omega/c$)
4. (115) ou (116) : $\vec{\underline{E}}\perp\vec{\underline{B}}$

Propriétés d'une OPPM dans le vide

- Une OPPM est une onde TEM :
  - Le champ électrique est transversal (TE) : perpendiculaire à $\hat{\boldsymbol{k}}$
  - Le champ magnétique est transversal (TM) : perpendiculaire à $\hat{\boldsymbol{k}}$
- Les vecteurs $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ forment un trièdre direct :

$$\vec{\boldsymbol{E}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \parallel \vec{\boldsymbol{k}} \tag{117}$$

- Les champs électrique et magnétique sont en phase
- L'équation d'ondes en régime harmonique (112) impose :

$$(-\mathrm{j}\,\vec{\boldsymbol{k}})^2 + \omega^2\mu_0\epsilon_0 = 0 \longrightarrow \boxed{k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0} \tag{118}$$

- Le rapport $\|\vec{\boldsymbol{E}}\|/\|\vec{\boldsymbol{B}}\|$ est constant :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}}{\omega}} \xrightarrow{\vec{E}\perp\vec{k}} \|\vec{\boldsymbol{B}}\| = \frac{1}{c}\|\vec{\boldsymbol{E}}\| \tag{119}$$

Polarisation linéaire d'une OPPM

- « Polarisation » : l'orientation du vecteur du champ électrique

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = E_0\cos(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{u}}$$

- Cas d'une OPPM $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$: $\vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$
- Polarisation *linéaire* : l'orientation ne change pas dans le temps
  - Polarisation verticale (V) : $\vec{\underline{\boldsymbol{E}}} = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$
  - Polarisation horizontale (H) : $\vec{\underline{\boldsymbol{E}}} = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$
  - Cas général : angle θ entre $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} &= E_0\cos(\omega t - kz)(\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}) \\ \vec{\underline{\boldsymbol{E}}} &= E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}(\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}})\end{aligned} \tag{120}$$

Polarisation circulaire d'une OPPM

- Deux composantes $\tilde{E}_x$ et $\tilde{E}_y$
- Même amplitude, déphasage $90°$

$$\vec{\tilde{E}} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, kz}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \mathrm{j}\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}})$$
$$\vec{\mathcal{E}} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} - E_0 \sin(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \quad (121)$$

- À t fixe, regarder *dans le sens de propagation*
- Rotation dans le sens horaire : polarisation droite (RCP)
- Rotation dans le sens anti-horaire : polarisation gauche (LCP) :

$$\vec{\tilde{E}} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, kz}(\mathrm{j}\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}})$$
$$\vec{\mathcal{E}} = -E_0 \sin(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \quad (122)$$

- Attention : à z fixe, le vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ tourne dans l'autre sens !

166

OPPM dans les conducteurs

167

Conducteurs et loi d'Ohm (bis)

- Loi d'Ohm (46) :

$$\vec{\tilde{J}} = \sigma \vec{\tilde{E}}$$

- Conducteur électrique « parfait » (PEC) : $\sigma = \infty$:

$$\vec{\tilde{E}} = \frac{\vec{\tilde{J}}}{\sigma} \xrightarrow{\text{PEC}} 0$$

- Champ $\vec{\tilde{E}}$ nul à l'intérieur d'un conducteur *parfait*
- (Électrostatique : $\vec{E} = 0$ indépendamment de σ)
- Rappel TD 4.4 :

$$\rho(t) = \rho(t=0)\mathrm{e}^{-t/t_r} \quad , \quad t_r = \epsilon_0/\sigma$$

  Régime harmonique : dans un conducteur $\rho = 0$ si $T \gg t_r \longrightarrow f \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- « Bon conducteur » : $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$

168

Les équations de Maxwell dans un conducteur

▼

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\vec{\tilde{B}} \qquad \begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{B}} &= \mu_0\vec{\tilde{J}} + \mathrm{j}\,\omega\mu_0\epsilon_0\vec{\tilde{E}} \\ &= \mu_0(\sigma + \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0)\vec{\tilde{E}}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{B}} = (-\mathrm{j}\,\mu_0\omega\sigma + \mu_0\epsilon_0\omega^2)\vec{\tilde{E}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}}) - \vec{\nabla}^2\vec{\tilde{E}} = -\vec{\nabla}^2\vec{\tilde{E}}$$

▼ Équation d'onde (vectorielle) :

$$\vec{\nabla}^2\vec{\tilde{E}} = (\mathrm{j}\,\mu_0\omega\sigma - \mu_0\epsilon_0\omega^2)\vec{\tilde{E}} \tag{123}$$

169

L'équation d'onde dans un conducteur

▼ Équation d'onde (scalaire, en cartésiennes) :

$$\nabla^2\tilde{E} = (\mathrm{j}\,\mu_0\omega\sigma - \mu_0\epsilon_0\omega^2)\tilde{E} \tag{124}$$

▼ Essayer une solution type OPPM (104) :

$$\tilde{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$-k^2 = -\mu_0\epsilon_0\omega^2 + \mathrm{j}\,\mu_0\omega\sigma \longrightarrow k^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)$$

▼ Nombre d'onde complexe $\tilde{k}$!

▼ Approximation bon conducteur :

$$\sigma \gg \epsilon_0\omega \to \tilde{k}^2 = -\mathrm{j}\,\mu_0\omega\sigma \to \boxed{\tilde{k} = \frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\omega\sigma}} \tag{125}$$

170

OPPM dans un bon conducteur

- Direction de propagation $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{\boldsymbol{E}}} &= \vec{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\tilde{k}z} \\ &= \vec{\boldsymbol{E}}_0 \underbrace{\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}z}}_{\text{atténuation}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}z}}_{\text{propagation}}\end{aligned} \tag{126}$$

- Épaisseur de peau :

$$\boxed{\delta \triangleq \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}} \tag{127}$$

- OPPM dans un bon conducteur :

$$\boxed{\tilde{\vec{\boldsymbol{E}}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0 \mathrm{e}^{-z/\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,z/\delta}} \tag{128}$$

- Longueur d'onde : $\lambda = 2\pi\delta$
- Vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{1/\delta} = \sqrt{2\omega/\mu_0\sigma}$ (dépend de ω !)

171

Conditions aux limites vide-conducteur

Interface vide-conducteur

- Les équations de Maxwell dans un conducteur :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = -\,\mathrm{j}\,\omega \vec{\tilde{B}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{B}} &= \mu_0 \vec{\tilde{J}} + \mathrm{j}\,\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{\tilde{E}} \\
&= \mu_0 (\sigma + \mathrm{j}\,\omega \epsilon_0) \vec{\tilde{E}} \\
&= \mathrm{j}\,\omega \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\mathrm{j}\,\omega \epsilon_0}\right) \vec{\tilde{E}} \\
&= \mathrm{j}\,\omega \mu_0 \underbrace{\epsilon_0 \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)}_{\tilde{\epsilon}} \vec{\tilde{E}}
\end{aligned}$$

- Que se passe-t-il *à l'interface* entre deux milieux ?
- Les champs peuvent être continus ou pas !
- Appliquer chaque équation sous forme intégrale :
  choisir volumes/surfaces/courbes *élémentaires* de part et d'autre de l'interface

173

Conditions aux limites

- Milieu 1 : vide ; milieu 2 : conducteur
- $\hat{\boldsymbol{n}}$: $\perp$ à l'interface ; du métal (2) vers le vide (1)

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\tilde{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\tilde{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{2}}) = \tilde{\rho}_s/\epsilon_0 \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\tilde{\boldsymbol{B}}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\tilde{\boldsymbol{B}}}_{\boldsymbol{2}}) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \wedge (\vec{\tilde{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\tilde{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{2}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \wedge (\vec{\tilde{\boldsymbol{B}}}_{\boldsymbol{1}} - \vec{\tilde{\boldsymbol{B}}}_{\boldsymbol{2}}) = \mu_0 \vec{\tilde{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{s}}$$

- ρ_s : densité de charges surfacique $(\mathrm{C\,m^{-2}})$
- $\vec{\tilde{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{s}}$: densité de courant surfacique $(\mathrm{A\,m^{-1}})$
  $\neq 0$ seulement si $\sigma = \infty$
- $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$: composante *normale* à l'interface
- $\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}$: composante *tangentielle* à l'interface

$$\tilde{E}_{\mathsf{nor1}} - \tilde{E}_{\mathsf{nor2}} = \tilde{\rho}_s/\epsilon_0 \qquad \tilde{B}_{\mathsf{nor1}} - \tilde{B}_{\mathsf{nor2}} = 0$$

$$\tilde{E}_{\mathsf{tan1}} - \tilde{E}_{\mathsf{tan2}} = 0 \qquad \tilde{B}_{\mathsf{tan1}} - \tilde{B}_{\mathsf{tan2}} = \mu_0 \tilde{J}_s$$

- Composantes tangentielles du champ électrique continues
- Composantes normales du champ magnétique continues

174

Puissance électromagnétique : vecteur de Poynting

[Rappel] Énergie électro/magnétostatique

- Énergie électrostatique $\mathcal{U}_\mathsf{e}$ (37) :

$$\mathcal{U}_\mathsf{e} = \frac{1}{2}\int_\mathcal{V} \epsilon_0 E^2(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Énergie magnétostatique $\mathcal{U}_\mathsf{m}$ (85) :

$$\mathcal{U}_\mathsf{m} = \frac{1}{2}\int_\mathcal{V} \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Électromagnétisme : les champs dépendent du temps

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \to \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \qquad E^2(\vec{\boldsymbol{r}}) \to \mathcal{E}^2(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \to \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \qquad B^2(\vec{\boldsymbol{r}}) \to \mathcal{B}^2(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

176

Énergie électromagnétique

- L'énergie « stockée » dans un volume V :

$$\boxed{\mathcal{U}_{\text{em}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\left(\epsilon_0\mathcal{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}^2(\vec{r},t)\right)\mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{129}$$

- Comment évolue l'énergie électromagnétique dans le temps ?
- Que se passe-t-il dans un volume $\mathcal{V}$?
  1. Énergie $\mathcal{U}_{\text{em}}$ *emmagasinée* dans les champs $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$
  2. *Travail* du champ sur les charges du volume (« milieu »)
     à travers la force de Lorentz : puissance $\mathcal{P}$ fournie au milieu
  3. *Échange* d'énergie avec le monde extérieur
     à travers la surface S qui englobe $\mathcal{V}$:
     puissance $\mathcal{P}_t$ sortant du volume
- Conservation de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P} + \mathcal{P}_t = 0$$

177

Travail du champ électromagnétique

- Le champ électromagnétique $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t), \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$ agit sur les charges du volume :

$$\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\wedge\vec{\mathcal{B}})$$

- Travail élementaire dans un volume $\mathrm{d}\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\wedge\vec{\mathcal{B}})\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t \\ &= q\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}\mathrm{d}\mathcal{V}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Puissance fournie par le champ É/M aux charges du volume $\mathcal{V}$:

$$\boxed{\mathcal{P} = \int_V \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}\mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{130}$$

178

Énergie É/M et puissance fournie (1)

- Écrire $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}$ en fonction uniquement de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$
- Utiliser Maxwell-Ampère pour éliminer $\vec{\mathcal{J}}$:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) - \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

- Propriété analyse vectorielle :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{B}}) = \vec{\mathcal{B}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}})$$

- Loi de Faraday :

$$\vec{\mathcal{B}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}}) = -\vec{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

- Regrouper les trois équations :

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \ldots \text{ (transparent suivant)}$$

179

Énergie É/M et puissance fournie (2)

- Densité volumique de puissance fournie :

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} = -\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{B}})$$

- Densité volumique d'énergie électrique :

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathcal{E}^2\right) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

- Densité volumique d'énergie magnétique :

$$\frac{1}{2\mu_0}\mathcal{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}^2\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

180

Énergie É/M et puissance fournie (3)

- Ce qui se passe dans un volume élementaire :

$$\underbrace{\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}}_{\text{puissance}/\mathrm{m}^3}+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}+\frac{1}{2\mu_0}\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}\right)}_{\text{énergie}/\mathrm{m}^3}+\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{\mathcal{B}})}_{\text{flux de ?}/\mathrm{m}^3}=0 \tag{131}$$

- Intégrer sur le volume $\mathcal{V}$ (+ théorème de la divergence) :

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}\,\mathrm{d}\mathcal{V}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}+\frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}\right)\mathrm{d}\mathcal{V}$$
$$+\oint_S\frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{\mathcal{B}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=0 \tag{132}$$

- Conservation de l'énergie :

$$\mathcal{P}+\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t}+(\text{puissance qui sort de }\mathcal{V})=0 \tag{133}$$

Puissance É/M transportée : vecteur de Poynting

- Puissance qui sort du volume $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{P}_{\text{t}}=\oint_S\frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{\mathcal{B}})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

- Densité surfacique de puissance transportée :

$$\boxed{\vec{\mathcal{S}}\triangleq\frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{\mathcal{B}}}\quad(\mathrm{W\,m^{-2}}) \tag{134}$$

- $\vec{\mathcal{S}}$: *vecteur de Poynting*, montre la direction de la puissance
- Puissance transportée par une onde à travers une surface S :

$$\mathcal{P}_{\text{t}}=\int_S\vec{\mathcal{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{135}$$

[Produit de deux fonctions harmoniques]

- Exemple : les champs d'une onde É/M harmonique

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \phi) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - kz)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}$$
$$\vec{\mathcal{B}}(z,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kz + \theta) = \mathrm{Re}\left\{\vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - kz)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{B}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}$$

- Produit des modules : $\boxed{\mathcal{E}\mathcal{B} \neq \tilde{E}\tilde{B}}$!

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\mathcal{B} &= E_0 B_0 \cos(\omega t - kz + \phi)\cos(\omega t - kz + \theta) \\ &= \frac{1}{2} E_0 B_0 \left[\cos(\phi - \theta) + \cos(2\omega t - 2kz + \phi + \theta)\right] \\ <\mathcal{E}\mathcal{B}> &= \frac{1}{2} E_0 B_0 \cos(\phi - \theta) = \ldots = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi} B_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\theta}\right\}\end{aligned}$$

$$\boxed{<\mathcal{E}\mathcal{B}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tilde{E}\tilde{B}^*\right\}} \qquad (136)$$

- Le seul cas où on peut multiplier des amplitudes complexes ! (cf. tr.#158)

183

Énergie et puissance d'ondes É/M harmoniques

- Énergie *moyenne* É/M emmagasinée dans les champs :

$$<\mathcal{U}_{\mathrm{em}}> = \frac{1}{4}\int_{\mathcal{V}} \left(\epsilon_0 \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^*\right\} + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{B}} \cdot \tilde{\vec{B}}^*\right\}\right) \mathrm{d}\mathcal{V} \qquad (137)$$

- Puissance *moyenne* É/M fournie au milieu :

$$<\mathcal{P}> = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{J}}^*\right\} \mathrm{d}\mathcal{V} \qquad (138)$$

- Puissance *moyenne* É/M transportée par l'onde :

$$<\mathcal{P}_{\mathrm{t}}> = \int_S <\vec{\mathcal{S}}> \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S \qquad (139)$$

$$\boxed{<\vec{\mathcal{S}}> = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}} \wedge \tilde{\vec{B}}^*\right\}} \qquad (140)$$

- *Intensité* : $I = \| <\vec{\mathcal{S}}> \| \quad (\mathrm{W\,m^{-2}})$

184

OPPM énergie électrique = magnétique

- Une OPPM d'amplitude E_0 se propageant selon $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ dans le vide :

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \qquad \vec{\underline{\boldsymbol{E}}} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \qquad \vec{\underline{\boldsymbol{B}}} = \frac{k}{\omega} E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$$

- Densités volumiques d'énergie (TD 13.1a) :

	instantanée	moyenne	
élec. :	$\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\omega t - 2kz)\right]$	$\frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2$	(141)
mag. :	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\frac{k^2}{\omega^2} E_0^2 \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\omega t - 2kz)\right]$	$\frac{1}{4}\frac{1}{\mu_0}\frac{k^2}{\omega^2} E_0^2$	(142)

- OPPM dans le vide : énergie électrique = énergie magnétique
- Égalité en énergies instantanées (et moyennes)

Impédance caractéristique du vide

- Densité de puissance transportée par une OPPM (TD 13.1e) :

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{k}{\omega} E_0^2 \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\omega t - 2kz)\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

$$<\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}}> = \frac{1}{2\mu_0}\frac{k}{\omega} E_0^2 \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

- On peut réécrire le dernier résultat :

$$\| <\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}}> \| = \frac{\left(E_0/\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \frac{\left(E_0/\sqrt{2}\right)^2}{Z_0} \qquad (143)$$

- Rappel : en électronique, $<P> = V_{\text{eff}}^2/R$
- Impédance caractéristique du vide :

$$\boxed{Z_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = (120\pi)\Omega \approx 377\,\Omega \qquad (144)$$

Champ électrique dans la matière 187

Diélectriques (isolants)

- Les charges ne sont pas libres à se déplacer
- Tous les électrons sont liés aux atomes/molécules
- $\neq$ conducteurs
- Intrinséquement neutres
- Quel est l'effet d'un champ $\vec{E}$ extérieur ?
  (retour pour l'instant à l'électrostatique)
  1. Création de dipôles $(-q/+q)$ induits

  $$\vec{p} \triangleq qd\hat{u}_{-\to+} \quad \text{moment dipolaire}$$

  2. Effet proportionnel à la cause

  $$\vec{p} = \alpha\vec{E} \quad \alpha : \text{polarisabilité atomique}$$

  3. Alignement des dipôles permanents
     Rappel : graines de gazon
     (WL, L2, 42m25-43m40)

188

Effet de la polarisation de la matière

- « Polarisation » : se réfère aux dipôles
- (Rien à voir avec linéaire/circulaire etc.)
- On n'examine pas les *causes* pour l'instant
  (polarisation induite ou permanente)
- Matière : grand nombre de dipôles dans un volume
- Vecteur de polarisation $\vec{P}$:
  densité volumique de moment dipolaire électrique :

$$\vec{P} \triangleq \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i \quad (\mathrm{C\,m\,m^{-3}} = \mathrm{C\,m^{-2}}) \qquad (145)$$

189

Polarisation : charges induits

- Matière neutre polarisée :
  apparition de charges « liées » !
- Dans un volume V :
  1. À la surface :
  $$\rho_{s\ \text{liées}} = \vec{\boldsymbol{P}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \quad (\mathrm{C\,m^{-2}}) \tag{146}$$
  2. À l'intérieur :
  $$\rho_{\text{liées}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{P}} \quad (\mathrm{C\,m^{-3}}) \tag{147}$$
  3. Matière neutre :
  $$\oint_S \rho_{s\ \text{liées}}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{liées}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$
- $\rho_{\text{liées}}, \rho_{s\ \text{liées}}$ génèrent champ électrique dû à $\vec{\boldsymbol{P}}$

190

Loi de Gauss dans les diélectriques

- Deux types de charges :
  1. « Libres » : on peut les choisir/placer etc.
  2. « Liées » : on n'a aucun contrôle sur elles
- Loi de Gauss (électrostatique) :

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{\text{liées}} + \rho_{\text{libres}}) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}(-\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{P}} + \rho_{\text{libres}})\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}}) = \rho_{\text{libres}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{D}} \triangleq \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}}}\,(\mathrm{C\,m^{-2}}) \tag{148}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_{\text{libres}}} \tag{149}$$

- $\vec{\boldsymbol{D}}$: déplacement (ou induction) électrique, en $\mathrm{C\,m^{-2}}$

191

Milieux LHI

- Linéaire :

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{\boldsymbol{E}} \tag{150}$$

χ_e : susceptibilité électrique

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{D}} &= \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{\boldsymbol{E}} \\ &\triangleq \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\boldsymbol{E}} = \varepsilon \vec{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{151}$$

ϵ_r : permittivité relative ε / ϵ_0 (ou constante diélectrique)

- Homogène : ϵ_r ne dépend pas de $\vec{\boldsymbol{r}}$
- Isotrope : ϵ_r est un scalaire
- Milieux lhi :

$$(149) : \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_{\text{libres}} \overset{\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\boldsymbol{E}}}{\longrightarrow} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho_{\text{libres}} / \epsilon_0 \epsilon_r$$

remplacer $\rho \longrightarrow \rho_{\text{libres}}$ et $\epsilon_0 \longrightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ dans la loi de Gauss

192

Permittivité relative : quelques valeurs typiques

Matériau	ϵ_r
Vide	1
Hydrogène	1.00025
Air (sec)	1.00054
Diamand	5.2
Sel	5.9
Silicone	11.8
Eau	80.1
Glace ($-30\,^\circ\mathrm{C}$)	99

193

Champ magnétique dans la matière

194

Phénomènes magnétiques : dus aux courants

- Aimants, boussoles, Pôle Nord, etc. :
  des courants dans la matière
- Une boucle de courant I :

$$\vec{m} \triangleq IA\hat{n}$$

- $\vec{m}$: moment dipolaire magnétique
- A : aire de la boucle
- Dans la matière, $\vec{m}$ créés par les électrons
- Orientation aléatoire : résultat nul
- Quel est l'effet d'un champ $\vec{B}$ extérieur ?

1. Diamagnétisme : $\vec{m}$ s'orientent *contre* $\vec{B}$
2. Paramagnétisme : $\vec{m}$ s'orientent *selon* $\vec{B}$
3. Ferromagnétisme : $\vec{m}$ s'orientent *selon* $\vec{B}$ à grandes échelles

195

Magnétisation : courants induits

- Équivalent de la polarisation $\vec{P}$
- Vecteur de magnétisation $\vec{M}$:
  densité volumique de moment dipolaire magnétique :

$$\vec{M} \triangleq \lim_{\Delta\mathcal{V}\to 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \sum_i \vec{m}_i \quad (\mathrm{A\,m^2\,m^{-3}} = \mathrm{A\,m^{-1}}) \tag{152}$$

- Dans un volume $\mathcal{V}$:

1. À la surface :

$$\vec{J}_{s\ \text{liés}} = \vec{M} \wedge \hat{n} \quad (\mathrm{A\,m^{-1}}) \tag{153}$$

2. À l'intérieur :

$$\vec{J}_{\text{liés}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (\mathrm{A\,m^{-2}}) \tag{154}$$

196

Loi d'Ampère dans les diélectriques

- Deux types de courants :
  1. « Libres » : on peut les choisir/placer etc.
  2. « Liés » : on n'a aucun contrôle sur eux
- Loi d'Ampère (magnétostatique) :

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0(\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{liés}} + \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}}) \\ &= \mu_0(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{M}} + \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}})\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{M}}\right) = \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{H}} \triangleq \frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{M}}}\ (\mathrm{A\,m^{-1}}) \tag{155}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}}} \tag{156}$$

- $\vec{\boldsymbol{H}}$: « champ H » (excitation magnétique) en $\mathrm{A\,m^{-1}}$

197

Milieux LHI

- Linéaire :

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \chi_m \vec{\boldsymbol{H}} \tag{157}$$

χ_m : susceptibilité magnétique

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0(\vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\boldsymbol{M}}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{\boldsymbol{H}} \\ &\triangleq \mu_0\mu_r\vec{\boldsymbol{H}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}\end{aligned} \tag{158}$$

μ_r : perméabilité relative μ/μ_0

- Homogène : μ_r ne dépend pas de $\vec{\boldsymbol{r}}$
- Isotrope : μ_r est un scalaire
- Milieux lhi :

$$(156) : \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}} \xrightarrow{\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\mu_r\vec{\boldsymbol{H}}} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\mu_r\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}}$$

remplacer $\vec{\boldsymbol{J}} \longrightarrow \vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}}$ et $\mu_0 \longrightarrow \mu_0\mu_r$ dans la loi d'Ampère

198

Susceptibilité magnétique : quelques valeurs

Matériau dia-	χ_m	Matériau para-	χ_m
Or	-3.4×10^{-5}	Oxygène	1.9×10^{-6}
Argent	-2.4×10^{-5}	Sodium	8.5×10^{-6}
Cuivre	-9.7×10^{-6}	Aluminium	2.1×10^{-5}
Eau	-9.0×10^{-6}	Tungsten	7.8×10^{-5}
CO_2	-1.2×10^{-8}	Platine	2.8×10^{-4}
Hydrogène	-2.2×10^{-9}	Oxygène liquide	3.9×10^{-3}

- $\mu_r = 1 + \chi_m \approx 1$
- Oxygène liquide démo (WL, L21, 43m00-46m22)

199

Ferromagnétisme

- μ_r entre 10^2 et 10^6 !
- Orientation de $\vec{m}$ par *domaines* ($\approx 10^{20}$ atomes)
- Orientation permanante : magnétisation
- Dans un champ magnétique $\vec{B}$ non uniforme : force d'attraction vers $\vec{B}$ fort (WL, L21, 20m10-23m00)
- Écouter les domaines magnétiques s'orienter : effet Barkhausen (1919) (WL, L21, 25m50-30m30)
- Phénomène d'hystérésis $\vec{B}/\vec{H}$
- Température de Curie (WL, L21, 37m00-40m10)

Matériau	T_c(°C)
Nickel (Ni)	354
Fer (Fe)	770
Cobalt (Co)	1115

- Équivalent : matériaux ferroélectriques, hystérésis $\vec{P}/\vec{E}$

200

Équations de Maxwell dans la matière 201

Courant de polarisation

- Retour aux phénomènes *variables dans le temps*
- Régime harmonique ($\partial/\partial t \longrightarrow \mathrm{j}\,\omega$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \longrightarrow \vec{\tilde{\boldsymbol{E}}}$ etc.)
- Polarisation/magnétisation dans la matière
- Apparition de charges/courants « liés » :

$$\text{polarisation (147)} : \tilde{\rho}_{\text{liées}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{P}}}$$
$$\text{magnétisation (154)} : \vec{\tilde{\boldsymbol{J}}}_{\text{liés}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{\boldsymbol{M}}}$$

- Variation de $\tilde{\rho}_{\text{liées}}$: courant de polarisation
  (Rappel (42) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{J}}} = -\mathrm{j}\,\omega\tilde{\rho}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{J}}}_{\text{pol}} = -\mathrm{j}\,\omega\tilde{\rho}_{\text{liées}} \overset{(147)}{=} -\mathrm{j}\,\omega(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{P}}}) = \vec{\nabla} \cdot \mathrm{j}\,\omega\vec{\tilde{\boldsymbol{P}}}$$

$$\vec{\tilde{\boldsymbol{J}}}_{\text{pol}} = \mathrm{j}\,\omega\vec{\tilde{\boldsymbol{P}}} \tag{159}$$

- Un nouveau terme de courant à ajouter dans l'équation de Maxwell-Ampère !

202

Équations de la divergence

- Champ électrique (loi de Gauss)

$$(88) : \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{E}}} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\tilde{\rho}_{\text{liées}} + \tilde{\rho}_{\text{libres}}) = \frac{1}{\epsilon_0}(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{P}}} + \tilde{\rho}_{\text{libres}})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0\vec{\tilde{\boldsymbol{E}}} + \vec{\tilde{\boldsymbol{P}}}) = \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{D}}} = \tilde{\rho}_{\text{libres}}} \tag{160}$$

- Champ magnétique

$$(89) : \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\boldsymbol{B}}} = 0} \tag{161}$$

203

Équations du rotationnel

- Champ électrique (loi de Faraday)

$$(90) : \boxed{\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{E}} = -\mathrm{j}\,\omega \tilde{\vec{B}}} \tag{162}$$

- Champ magnétique (loi de Maxwell-Ampère)

$$\begin{aligned}(91) : \vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{B}} &= \mu_0(\tilde{\vec{J}}_{\text{liés}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{libres}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{pol}} + \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0\tilde{\vec{E}}) \\ &\overset{(159)}{=} \mu_0(\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{M}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{libres}} + \mathrm{j}\,\omega\tilde{\vec{P}} + \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0\tilde{\vec{E}}) \\ &= \mu_0(\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{M}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{libres}} + \mathrm{j}\,\omega\tilde{\vec{D}})\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu_0}\tilde{\vec{B}} - \tilde{\vec{M}}\right) = \boxed{\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{H}} = \tilde{\vec{J}}_{\text{libres}} + \mathrm{j}\,\omega\tilde{\vec{D}}} \tag{163}$$

204

Équations de Maxwell dans la matière (1)

- Forme « inutilisable »

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}} = \tilde{\rho}/\epsilon_0 \tag{164a}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{B}} = 0 \tag{164b}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\tilde{\vec{B}} \tag{164c}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \tilde{\vec{B}} = \mu_0(\tilde{\vec{J}} + \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0\tilde{\vec{E}}) \tag{164d}$$

- Charges et courants : « libres » et « liés »

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \tilde{\rho}_{\text{liées}} + \tilde{\rho}_{\text{libres}} \\ \tilde{\vec{J}} &= \tilde{\vec{J}}_{\text{liés}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{libres}} + \tilde{\vec{J}}_{\text{pol}}\end{aligned}$$

- Équations valables quel que soit le milieu
- Incovénient : calculer les charges/courants que l'on ne contrôle pas

205

Équations de Maxwell dans la matière (2)

- Forme « généralisée »

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{D}} = \tilde{\rho}_{\text{libres}} \tag{165a}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{B}} = 0 \tag{165b}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = -\mathrm{j}\,\omega \vec{\tilde{B}} \tag{165c}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{H}} = \vec{\tilde{J}}_{\text{libres}} + \mathrm{j}\,\omega \vec{\tilde{D}} \tag{165d}$$

- Charges et courants : uniquement « libres » (on ne l'écrira plus !)
- Relations constitutives

$$\vec{\tilde{D}} = \epsilon_0 \vec{\tilde{E}} + \vec{\tilde{P}}$$
$$\vec{\tilde{B}} = \mu_0 (\vec{\tilde{H}} + \vec{\tilde{M}})$$

- Équations valables quel que soit le milieu
- Difficulté : calculer les champs $\vec{\tilde{P}}$ et $\vec{\tilde{M}}$

206

Équations de Maxwell dans la matière (3)

- Forme spéciale : milieux linéaires, homogènes, isotropes (lhi)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} = \tilde{\rho}_{\text{libres}}/\epsilon \tag{166a}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{H}} = 0 \tag{166b}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\mu \vec{\tilde{H}} \tag{166c}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{H}} = \vec{\tilde{J}}_{\text{libres}} + \mathrm{j}\,\omega\epsilon \vec{\tilde{E}} \tag{166d}$$

- Charges et courants : uniquement « libres » (on ne l'écrira plus !)
- Relations constitutives : utilisées dans (165) $\longrightarrow$ (166)

$$\vec{\tilde{D}} = \epsilon_0 \vec{\tilde{E}} + \vec{\tilde{P}} \overset{\text{lhi}}{=} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\tilde{E}} = \epsilon \vec{\tilde{E}}$$
$$\vec{\tilde{B}} = \mu_0 (\vec{\tilde{H}} + \vec{\tilde{M}}) \overset{\text{lhi}}{=} \mu_0 \mu_r \vec{\tilde{H}} = \mu \vec{\tilde{H}}$$

- Équations valables uniquement pour les milieux lhi (y compris le vide !)
- Ressemblent aux équations (164) mais avec ϵ, μ et charges/courants libres

207

Énergie et puissance dans la matière

- On peut reprendre les calculs qui ont conduit à (131) mais à partir des équations de Maxwell généralisées (165)

$$\text{pertes : } \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} \quad (\mathrm{W/m^3})$$

$$\text{énergie é/m : } \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{\mathsf{em}}}{\mathrm{d}\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}} \quad (\mathrm{J\,m^{-3}}) \tag{167}$$

$$\text{Poynting : } \vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}} \quad (\mathrm{W\,m^{-2}}) \tag{168}$$

- Dans le cas spécial du vide, on retrouve (129) et (134)

208

OPPM dans les milieux lhi

OPPM dans un milieu lhi

- On peut reprendre tous les résultats obtenus dans le vide
- Remplacer $\epsilon_0 \longrightarrow \epsilon$ et $\mu_0 \longrightarrow \mu$
- Faire apparaître uniquement les charges et les courants « libres »
- Dans un milieu lhi sans sources ni courants :
  - Une OPPM est une onde TEM
  - Les vecteurs $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{H}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ forment un trièdre direct
  - Le nombre d'onde est donné par :

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r\epsilon_r} = k_0\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (169)$$

  - Le rapport $\|\vec{\boldsymbol{E}}\|/\|\vec{\boldsymbol{H}}\|$ est constant :

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}}{\omega} \xrightarrow{\vec{\boldsymbol{E}}\perp\vec{\boldsymbol{k}}} \|\vec{\boldsymbol{H}}\| = \frac{k}{\omega\mu}\|\vec{\boldsymbol{E}}\| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\|\vec{\boldsymbol{E}}\|$$

$$\boxed{Z \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = \frac{\|\vec{\boldsymbol{E}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{H}}\|} \quad \text{impédance caractéristique } (\Omega) \quad (170)$$

  - Les champs $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{H}}$ sont en phase si ϵ, μ réels

Types de pertes dans la matière

1. Pertes de conductivité (ohmiques)

$$(46) : \vec{\tilde{J}} = \sigma \vec{\tilde{E}} \quad \text{loi d'Ohm}$$

   σ : conductivité en $\mathrm{S\,m^{-1}}$

2. Pertes diélectriques : (150) $\rightarrow \vec{\tilde{P}} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \vec{\tilde{E}}$

$$\tilde{\epsilon} = 1 + \tilde{\chi}_e \triangleq \epsilon' - \mathrm{j}\,\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon'_r - \mathrm{j}\,\epsilon''_r) = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r$$

3. Pertes magnétiques : (157) $\rightarrow \vec{\tilde{M}} = \tilde{\chi}_m \vec{\tilde{H}}$

$$\tilde{\mu} = 1 + \tilde{\chi}_m \triangleq \mu' - \mathrm{j}\,\mu'' = \mu_0(\mu'_r - \mathrm{j}\,\mu''_r) = \mu_0 \tilde{\mu}_r$$

   (on considère toujours ici $\mu_r \approx 1$)

211

Permittivité effective

- Pertes ohmiques et diélectriques dans Maxwell-Ampère :

$$(166) : \ \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{H}} = \underbrace{\sigma \vec{\tilde{E}}}_{\vec{\tilde{J}}} + \mathrm{j}\,\omega \tilde{\epsilon} \vec{\tilde{E}} = \mathrm{j}\,\omega \epsilon_0 \left(\tilde{\epsilon}_r - \mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{\tilde{E}}$$

- Définir une permittivité *effective*

$$\boxed{\tilde{\epsilon}_{r\mathrm{eff}} \triangleq \tilde{\epsilon}_r - \mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \epsilon'_r - \mathrm{j}\left(\epsilon''_r + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) = \epsilon'_{r\mathrm{eff}} - \mathrm{j}\,\epsilon''_{r\mathrm{eff}}} \qquad (171)$$

- L'équation de Maxwell-Ampère (166)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \mathrm{j}\,\omega\epsilon_0 \tilde{\epsilon}_{r\mathrm{eff}} \vec{\tilde{E}}$$

- On peut reprendre tous les résultats précédents (lhi sans pertes) et remplacer $\epsilon_r \longrightarrow \tilde{\epsilon}_{r\mathrm{eff}}$

212

Nombre d'onde complexe

- Le nombre d'onde

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \longrightarrow \tilde{k} = \omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}}$$

- Nombre d'onde complexe !

$$\boxed{\tilde{k} \triangleq \beta - \mathrm{j}\,\alpha}$$

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\tilde{k}z} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(\beta-\mathrm{j}\,\alpha)z} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\beta z}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

- β : « constante de phase » $(\mathrm{rad\,m^{-1}})$
- α : « coefficient d'atténuation » $(\mathrm{Np\,m^{-1}})$
- $\delta = 1/\alpha$: « profondeur de peau »

213

Coefficients α et β

- Milieu lhi sans pertes magnétiques, avec permittivité complexe

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r\tilde{\epsilon}_{r\text{eff}}} = k_0\sqrt{\mu_r(\epsilon'_{r\text{eff}} - \mathrm{j}\,\epsilon''_{r\text{eff}})} = k_0\sqrt{\mu_r\epsilon'_{r\text{eff}}}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\epsilon''_{r\text{eff}}}{\epsilon'_{r\text{eff}}}}$$

- Tangente de pertes $\triangleq \epsilon''_{r\text{eff}}/\epsilon'_{r\text{eff}}$
- Coefficient d'atténuation / constante de phase :

$$\alpha = k_0\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon'_{r\text{eff}}}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''_{r\text{eff}}}{\epsilon'_{r\text{eff}}}\right)^2} - 1\right)^{1/2} \quad (172)$$

$$\beta = k_0\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon'_{r\text{eff}}}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''_{r\text{eff}}}{\epsilon'_{r\text{eff}}}\right)^2} + 1\right)^{1/2} \quad (173)$$

214

Milieu lhi sans pertes

- Milieu sans pertes : $\epsilon'' = 0$

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}$$

- La vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} = \frac{c}{n} \leq c \tag{174}$$

- Indice de réfraction :

$$n \triangleq \sqrt{\mu_r\epsilon'_r} \tag{175}$$

- La longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} = \frac{\lambda_0}{n} \leq \lambda_0$$

215

Milieu lhi avec pertes

- Milieu avec pertes : $\epsilon'' \neq 0$

$$\alpha \neq 0$$
$$\beta \neq \omega\sqrt{\mu\epsilon'}$$

- La vitesse de phase (réelle) :

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{\beta}} = \frac{\omega}{\text{Re}\left\{\tilde{k}\right\}} = \frac{\omega}{\text{Re}\left\{\omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}}\right\}} = \frac{c}{\text{Re}\left\{\sqrt{\mu_r\tilde{\epsilon}_r}\right\}} = \frac{c}{\text{Re}\left\{\tilde{n}\right\}} \leq c \tag{176}$$

- Indice de réfraction (complexe) :

$$\boxed{\tilde{n} \triangleq \sqrt{\mu_r\tilde{\epsilon}_r}} \tag{177}$$

- La longueur d'onde (réelle) :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}} = \frac{2\pi}{\text{Re}\left\{\tilde{k}\right\}} = \frac{\lambda_0}{\text{Re}\left\{\sqrt{\mu_r\tilde{\epsilon}_r}\right\}} = \frac{\lambda_0}{\text{Re}\left\{\tilde{n}\right\}} \leq \lambda_0$$

216

Refléxion / transmission entre deux milieux lhi

217

Conditions aux limites entre deux milieux lhi

- Les équations de Maxwell dans la matière (165)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{D}} = \tilde{\rho} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\tilde{E}} = -\,\mathrm{j}\,\omega\vec{\tilde{B}} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{\tilde{H}} = \vec{\tilde{J}} + \mathrm{j}\,\omega\vec{\tilde{D}}$$

- Interface entre deux milieux lhi, $\hat{\boldsymbol{n}}$ de 2 vers 1
- Même procédure que celle du tr.#174

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\tilde{D}}_1 - \vec{\tilde{D}}_2) = \tilde{\rho}_s \qquad \epsilon_1\tilde{E}_{\mathsf{nor1}} - \epsilon_2\tilde{E}_{\mathsf{nor2}} = \tilde{\rho}_s \tag{178a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\tilde{B}}_1 - \vec{\tilde{B}}_2) = 0 \qquad \mu_1\tilde{H}_{\mathsf{nor1}} - \mu_2\tilde{H}_{\mathsf{nor2}} = 0 \tag{178b}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\wedge(\vec{\tilde{E}}_1 - \vec{\tilde{E}}_2) = \vec{0} \qquad \tilde{E}_{\mathsf{tan1}} - \tilde{E}_{\mathsf{tan2}} = 0 \tag{178c}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\wedge(\vec{\tilde{H}}_1 - \vec{\tilde{H}}_2) = \vec{\tilde{J}}_s \qquad \tilde{H}_{\mathsf{tan1}} - \tilde{H}_{\mathsf{tan2}} = \tilde{J}_s \tag{178d}$$

- $\vec{\tilde{E}}_{\mathsf{tan}}$ continu ; $\vec{\tilde{H}}_{\mathsf{nor}}$ continu (si milieux non magnétiques)
- $\vec{\tilde{J}}_s$: courant surfacique $(\mathrm{A\,m^{-1}})$, uniquement sur un conducteur parfait

218

Incidence normale sur une interface

- Interface entre deux milieux lhi à $z = 0$
- Incidence normale : $\hat{\boldsymbol{k}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_z$ (TD 14.1)
- Ondes incidente, réflechie et transmise :

$$\vec{\tilde{E}}_i = E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\hat{\boldsymbol{e}}_x = E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_i z}\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

$$\vec{\tilde{E}}_r = \tilde{E}_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\hat{\boldsymbol{e}}_x = \tilde{E}_{r0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,k_i z}\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

$$\vec{\tilde{E}}_t = \tilde{E}_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\vec{k}_t\cdot\vec{r}}\hat{\boldsymbol{e}}_x = \tilde{E}_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_t z}\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

- Champs magnétiques $\vec{\tilde{H}} = (\hat{\boldsymbol{k}}\wedge\vec{\tilde{E}})/\tilde{Z}$:

$$\vec{\tilde{H}}_i = +\frac{1}{\tilde{Z}_1}E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_i z}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\tilde{H}}_r = -\frac{1}{\tilde{Z}_1}\tilde{E}_{r0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,k_i z}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\tilde{H}}_t = +\frac{1}{\tilde{Z}_2}\tilde{E}_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_t z}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

219

Incidence normale : conditions aux limites

- Appliquer les conditions aux limites (178) à $z = 0$
- (178a) : pas de composantes normales de $\vec{\tilde{E}}$
- (178b) : pas de composantes normales de $\vec{\tilde{B}}$
- (178c) : composantes tangentielles de $\vec{\tilde{E}}$ (selon $\hat{e}_x$)

$$E_{i0} + \tilde{E}_{r0} = \tilde{E}_{t0}$$

- (178d) : composantes tangentielles de $\vec{\tilde{H}}$ (selon $\hat{e}_y$)

$$\frac{E_{i0}}{\tilde{Z}_1} - \frac{\tilde{E}_{r0}}{\tilde{Z}_1} = \frac{\tilde{E}_{t0}}{\tilde{Z}_2}$$

220

Incidence normale : coefficients amplitude

- Coefficients de réflexion/transmission en amplitude :

$$\boxed{\tilde{r} \triangleq \frac{\tilde{E}_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1}} \quad (179)$$

$$\boxed{\tilde{t} \triangleq \frac{\tilde{E}_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1}} \quad (180)$$

- Quelques propriétés
  1. $1 + \tilde{r} = \tilde{t}$
  2. r, t réels si milieux sans pertes : pas de déphasage
     - $r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} < 0$ si $Z_2 < Z_1$
     - Milieux non magnétiques : $Z_2 < Z_1 \Longrightarrow \epsilon_1 > \epsilon_2$
     - $\epsilon_1 > \epsilon_2 \Longrightarrow v_1 < v_2$ (milieu « lent » vers « rapide »)
  3. Si milieu 2 conducteur parfait : $\tilde{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon' - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}} \to 0,\ r = -1,\ t = 0$

221

Incidence normale : coefficients puissance

- Puissance transportée :

$$I_i = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_1}\right\} E_{i0}^2$$
$$I_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_1}\right\} |\tilde{E}_{r0}|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_1}\right\} |\tilde{r}|^2 E_{i0}^2$$
$$I_t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_2}\right\} |\tilde{E}_{t0}|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_2}\right\} |\tilde{t}|^2 E_{i0}^2$$

- Coefficients de réflexion/transmission en intensité :

$$\boxed{R \triangleq \frac{I_r}{I_i} = |\tilde{r}|^2} \quad (181)$$

$$\boxed{T \triangleq \frac{I_t}{I_i}} = \frac{\mathrm{Re}\left\{1/\tilde{Z}_2\right\}}{\mathrm{Re}\left\{1/\tilde{Z}_1\right\}}|\tilde{t}|^2 = \boxed{1 - R} \quad (182)$$

222

Incidence oblique sur une interface : définitions

- Interface entre deux milieux lhi à $z = 0$
- « Plan d'incidence » : défini par $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{i}}$
- « Angle d'incidence » θ_i : entre $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{i}}$ $(0 \leq \theta_i \leq 90°)$
- « Angle de réflexion » θ_r : entre $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{r}}$ $(0 \leq \theta_r \leq 90°)$
- « Angle de réfraction » θ_t : entre $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}$ $(0 \leq \theta_t \leq 90°)$
- Incidence *oblique* :

$$\vec{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{i}} = k_i \sin\theta_i \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + k_i \cos\theta_i \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$
$$\vec{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{r}} = k_i \sin\theta_r \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} - k_i \cos\theta_r \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \quad (k_r = k_i)$$
$$\vec{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}} = k_t \sin\theta_t \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + k_t \cos\theta_t \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

- Polarisation *perpendiculaire* ($\perp$, s, TE) : $\vec{\boldsymbol{E}} \perp$ plan d'incidence (TD 14.2)
- Polarisation *parallèle* ($\parallel$, p, TM) : $\vec{\boldsymbol{E}} \parallel$ plan d'incidence (TD 14.3)
- Cas général : perpendiculaire + parallèle
- Milieux non magnétiques ($\mu_{1,2} = \mu_0$) sans pertes ($\epsilon_{1,2}$ réels)
- $k = k_0\sqrt{\epsilon_r} = nk_0$
- $Z = Z_0/\sqrt{\epsilon_r} = Z_0/n$

223

Incidence oblique $\perp$: champs

- Polarisation *perpendiculaire* ($\perp$, s, TE) : $\vec{E} \perp$ plan d'incidence (TD 14.2)
- Champs électriques :

$$\vec{\underline{E}}_i = E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\hat{e}_y \qquad \vec{\underline{E}}_r = E_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\hat{e}_y \qquad \vec{\underline{E}}_t = E_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_t\cdot\vec{r}}\hat{e}_y$$

- Champs magnétiques $\vec{\underline{H}} = (\hat{k} \wedge \vec{\underline{E}})/Z$:

$$\begin{aligned}
\vec{\underline{H}}_i &= \frac{1}{Z_1}E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_i\cdot\vec{r}}(-\cos\theta_i\hat{e}_x + \sin\theta_i\hat{e}_z)\\
\vec{\underline{H}}_r &= \frac{1}{Z_1}E_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_r\cdot\vec{r}}(+\cos\theta_r\hat{e}_x + \sin\theta_r\hat{e}_z)\\
\vec{\underline{H}}_t &= \frac{1}{Z_2}E_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_t\cdot\vec{r}}(-\cos\theta_t\hat{e}_x + \sin\theta_t\hat{e}_z)
\end{aligned}$$

224

Incidence oblique $\perp$: Snel – Descartes

- Appliquer les conditions aux limites (178) à $z = 0$
- (178c) : composantes tangentielles de $\vec{E}$ (selon $\hat{e}_y$)

$$E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + E_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_r\cdot\vec{r}} = E_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_t\cdot\vec{r}} \qquad \forall\vec{r} = (x, y, 0)$$

- Égalité possible à condition que :

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r} \qquad \forall\vec{r} = (x, y, 0)$$

  « Continuité de la phase sur l'interface »
- Conséquences :

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} \Rightarrow \sin\theta_i = \sin\theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r} \tag{183}$$

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r} \Rightarrow \boxed{n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t} \tag{184}$$

  Loi de (Willebrord) Snel – Descartes
- Simplifier la notation : $\theta_1 \triangleq \theta_i = \theta_r$ et $\theta_2 \triangleq \theta_r$

225

Incidence oblique $\perp$: conditions aux limites

- Appliquer les conditions aux limites (178) à $z = 0$
- (178a) : pas de composantes normales de $\vec{\tilde{E}}$
- (178b) : composantes normales de $\vec{\tilde{B}}$ (selon $\hat{e}_z$)

$$\mu_0 \frac{1}{Z_1} E_{i0} \sin\theta_1 + \mu_0 \frac{1}{Z_1} E_{r0} \sin\theta_1 = -\mu_0 \frac{1}{Z_2} E_{t0} \sin\theta_2$$

- (178c) : composantes tangentielles de $\vec{\tilde{E}}$ (selon $\hat{e}_y$)

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

(178b) + $Z = Z_0/n$ + Snell-Descartes = (178c)

- (178d) : composantes tangentielles de $\vec{\tilde{H}}$ (selon $\hat{e}_x$)

$$-\frac{1}{Z_1} E_{i0} \cos\theta_1 + \frac{1}{Z_1} E_{r0} \cos\theta_1 = \frac{1}{Z_2} E_{t0} \cos\theta_2$$

- Mêmes relations en incidence normale (cf. tr.#220) si on définit $Z_\perp \triangleq Z/\cos\theta$

226

Incidence oblique $\perp$: coefficients amplitude

- Coefficients de réflexion/transmission en amplitude :

$$\boxed{r_\perp \triangleq \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{Z_{2\perp} - Z_{1\perp}}{Z_{2\perp} + Z_{1\perp}}} \tag{185}$$

$$\boxed{t_\perp \triangleq \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2Z_{2\perp}}{Z_{2\perp} + Z_{1\perp}}} \tag{186}$$

$$Z_{1\perp} \triangleq \frac{Z_1}{\cos\theta_1}$$
$$Z_{2\perp} \triangleq \frac{Z_2}{\cos\theta_2}$$

- $r_\perp$, $t_\perp$ dépendent de θ_1
- $r_\perp \neq 0$ (TD 14.2g)
- Si milieu 2 conducteur parfait : $Z_2 = 0$, $r_\perp = -1$, $t_\perp = 0$
- $Z_\perp = |E_{\text{tan}}|/|H_{\text{tan}}|$ (comp. tangentielles à l'interface, ici $|E_y|/|H_x|$)

227

Incidence oblique $\perp$: coefficients puissance

- Puissance transportée de façon *normale à l'interface* :

$$
\begin{aligned}
I_i &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}E_{i0}^2\cos\theta_1 \\
I_r &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}E_{r0}^2\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}r_\perp^2 E_{i0}^2\cos\theta_1 \\
I_t &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_2}E_{t0}^2\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_2}t_\perp^2 E_{i0}^2\cos\theta_2
\end{aligned}
$$

- Coefficients de réflexion/transmission en intensité :

$$\boxed{R_\perp \triangleq \frac{I_r}{I_i} = r_\perp^2} \tag{187}$$

$$\boxed{T_\perp \triangleq \frac{I_t}{I_i}} = \frac{1/Z_2}{1/Z_1}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}t_\perp^2 = \boxed{1 - R_\perp} \tag{188}$$

Incidence oblique $\parallel$: champs

- Polarisation *parrallèle* ($\parallel$, s, TM) : $\vec{\tilde{E}} \parallel$ plan d'incidence (TD 14.3)
- Champs magnétiques :

$$\vec{\tilde{H}}_i = \frac{1}{Z_1}E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\hat{e}_y \quad \vec{\tilde{H}}_r = \frac{1}{Z_1}E_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\hat{e}_y \quad \vec{\tilde{H}}_t = \frac{1}{Z_2}E_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_t\cdot\vec{r}}\hat{e}_y$$

- Champs électriques $\vec{\tilde{E}} = (\vec{\tilde{H}} \wedge \hat{k})Z$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\tilde{E}}_i &= E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_i\cdot\vec{r}}(+\cos\theta_i\hat{e}_x - \sin\theta_i\hat{e}_z) \\
\vec{\tilde{E}}_r &= E_{r0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_r\cdot\vec{r}}(-\cos\theta_r\hat{e}_x - \sin\theta_r\hat{e}_z) \\
\vec{\tilde{E}}_t &= E_{t0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_t\cdot\vec{r}}(+\cos\theta_t\hat{e}_x - \sin\theta_t\hat{e}_z)
\end{aligned}
$$

- Même procédure que celle du cas $\perp$ (cf. tr.#225) :
  1. Continuité de phase sur l'interface : $\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r}$
  2. Snel – Descartes : $\theta_i = \theta_r$ et $n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t$
  3. $\theta_1 \triangleq \theta_i = \theta_r$ et $\theta_2 \triangleq \theta_t$

Incidence oblique $\parallel$: conditions aux limites

- Appliquer les conditions aux limites (178) à $z = 0$
- (178a) : composantes normales de $\vec{\boldsymbol{D}}$ (selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$)

$$-\epsilon_1 E_{i0} \sin\theta_1 - \epsilon_1 E_{r0} \sin\theta_1 = -\epsilon_2 E_{t0} \sin\theta_2$$

- (178b) : pas de composantes normales de $\vec{\boldsymbol{B}}$
- (178c) : composantes tangentielles de $\vec{\boldsymbol{E}}$ (selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$)

$$E_{i0} \cos\theta_1 - E_{r0} \cos\theta_1 = E_{t0} \cos\theta_2$$

- (178d) : composantes tangentielles de $\vec{\boldsymbol{H}}$ (selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$)

$$\frac{E_{i0}}{Z_1} + \frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{E_{t0}}{Z_2}$$

(178a) + $Z = Z_0/n$ + Snell-Descartes = (178d)

- On définit $Z_{\parallel} \triangleq Z \cos\theta$

Incidence oblique $\parallel$: coefficients amplitude

- Coefficients de réflexion/transmission en amplitude :

$$\boxed{r_{\parallel} \triangleq -\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{Z_{2\parallel} - Z_{1\parallel}}{Z_{2\parallel} + Z_{1\parallel}}} \tag{189}$$

$$\boxed{t_{\parallel} \triangleq \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2Z_{2\parallel}}{Z_{2\parallel} + Z_{1\parallel}} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}} \tag{190}$$

$$Z_{1\parallel} \triangleq Z_1 \cos\theta_1$$
$$Z_{2\parallel} \triangleq Z_2 \cos\theta_2$$

- $r_{\parallel} \triangleq -E_{r0}/E_{i0}$ parce que si $\theta_1 \approx 0$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}}$ et $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{r}}$ sont opposés
- $r_{\parallel}$, $t_{\parallel}$ dépendent de θ_1
- $r_{\parallel} = 0$ si $\theta_1 = \theta_B$: angle de Brewster, $\tan\theta_B = Z_1/Z_2$ (TD 14.3d)
- Si milieu 2 conducteur parfait : $Z_2 = 0$, $r_{\parallel} = -1$, $t_{\parallel} = 0$
- $Z_{\parallel} = |E_{\text{tan}}|/|H_{\text{tan}}|$ (comp. tangentielles à l'interface, ici $|E_x|/|H_y|$)

Incidence oblique $\parallel$: coefficients puissance

- Puissance transportée de façon *normale à l'interface* :

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}E_{i0}^2\cos\theta_1 \\ I_r &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}E_{r0}^2\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_1}r_\parallel^2 E_{i0}^2\cos\theta_1 \\ I_t &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_2}E_{t0}^2\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_2}t_\parallel^2 E_{i0}^2\cos\theta_2 \end{aligned}$$

- Coefficients de réflexion/transmission en intensité :

$$\boxed{R_\parallel \triangleq \frac{I_r}{I_i} = r_\parallel^2} \tag{191}$$

$$\boxed{T_\parallel \triangleq \frac{I_t}{I_i}} = \frac{1/Z_2}{1/Z_1}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}t_\parallel^2 = \boxed{1 - R_\parallel} \tag{192}$$

232