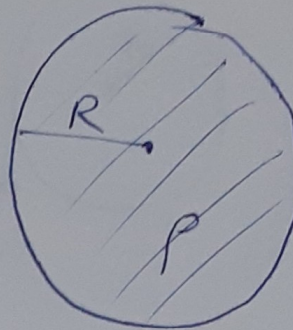


SERIE 2Corriger EXERCICE 3 - Questions 5:

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

Rappel:

$$\text{avec } E_r = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{si } r < R \end{cases}$$



$$\text{Soit } V(M) / V(\infty) = 0$$

Méthode 1: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (composante radiale en coord. sphériques)

Groupe mercure:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

• si $r > R$:

$$\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr$$

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C$$

$$V(\infty) = 0 \rightarrow 0 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \times \frac{1}{\infty} + C \Rightarrow C = 0$$

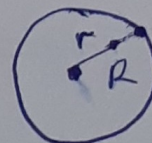
$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}} \quad r > R \quad (1)$$

• si $r < R$:

$$\frac{\rho r}{3\epsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + K$$

$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K} \quad (2)$$

$$V(R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \quad (\text{d'après (1)})$$



$$(2) \quad r=R \Rightarrow V(R) = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow K = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

$$(2) \Rightarrow V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)} \quad r < R$$

Méthode 2: (Groupes mardi)

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

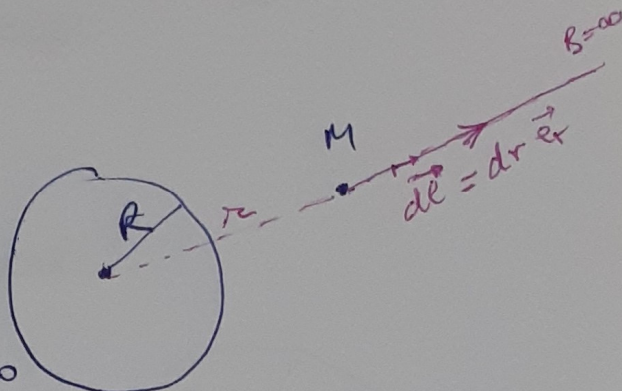
• $r > R$:

$$A=M; B=\infty$$

$$V(M) - \underbrace{V(\infty)}_0 = \int_M^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r)$$

$$V(M) = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty$$

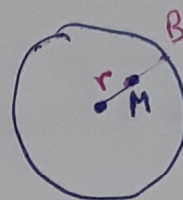
$$V(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad r > R$$



• $r < R$: $V(M) - V(B) = \int_M^B \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r)$

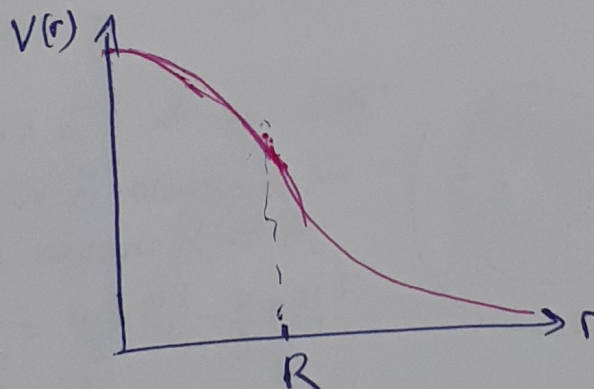
$$= \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_r^R$$

$$= \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$



$$V(B) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

$$V(M) - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) \Rightarrow V(M) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \quad r < R$$

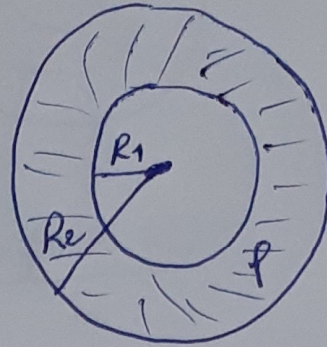


SERIEZ - CorrigéEXERCICE 3 - Question 6

sphère creuse chargée uniformément
entre les rayons R_1 et R_2

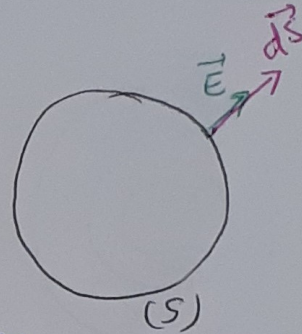
a) Calcul du champ $\vec{E}(M)$ à partir
du Théorème de Gauss.

La symétrie sphérique est toujours
valable donc $\boxed{\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r}$



Donc on choisit toujours pour surface de Gauss : une sphère
de rayon r , $\forall$ la position du point M
Donc de même que les questions précédentes:

$$\Phi_{(S)}(\vec{E}) = E \cdot S = E \times 4\pi r^2 \quad (1)$$



Pour la charge intérieure, ça dépend des cas

1er cas : $r > R_2$:

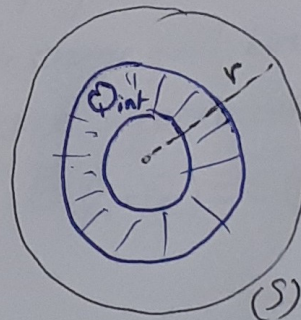
Toute la charge est à l'intérieur de (S)

$Q_{int} = \rho V$ où V est le volume entre
les rayons R_1 et R_2

$$V = V_{R_2} - V_{R_1} = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \quad (2)$$



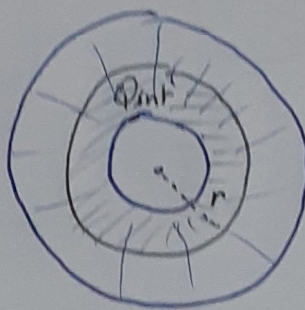
(1) et (2) dans le théorème de Gauss :

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}} \quad r > R_2 \quad (2)$$

2^e cas: $R_1 < r < R_2$:

Une seule partie des charges est à l'intérieur de la surface de Gauss elle se trouve entre les rayons R_1 et r
son volume est $V = \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)$

$$\Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho V = \rho \times \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3) \quad (3)$$



(1) et (3) dans le Th. de Gauss $\rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$

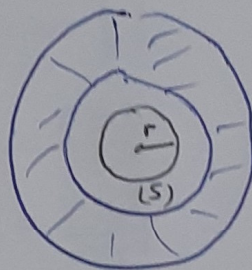
$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}} \quad R_1 < r < R_2$$

3^e cas: $r < R_1$:

Aucune charge n'est à l'intérieur de $\mathcal{S}$

$$Q_{\text{int}} = 0$$

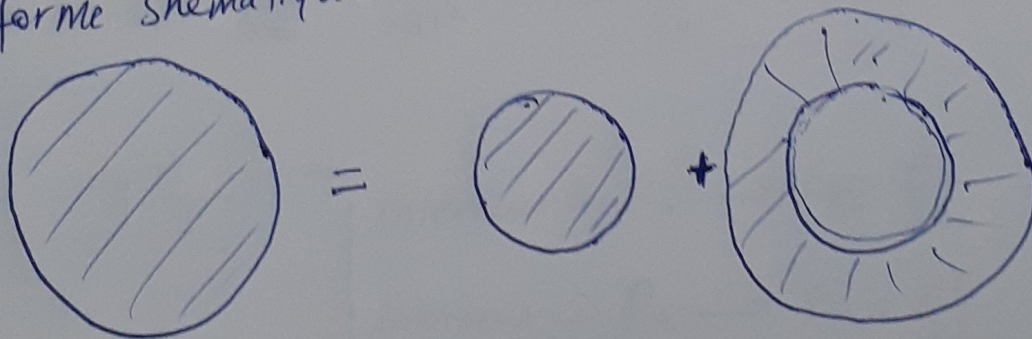
$$E \times 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0} \quad r < R_1$$



b) Calcul de $\vec{E}$ à partir du théorème de superposition

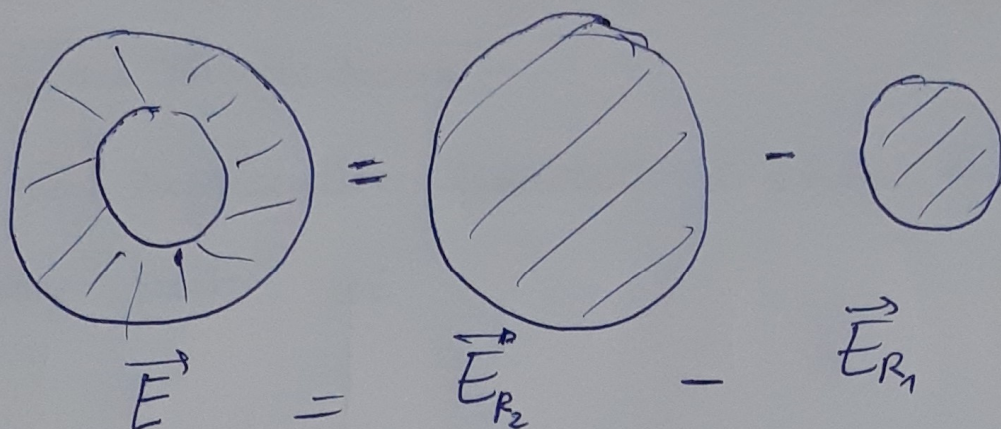
- Le champ créé par une distribution de charge peut être vu comme étant la superposition de 2 champs créés séparément par 2 parties de cette distribution. Formellement $\vec{E}(Q_1 + Q_2) = \vec{E}(Q_1) + \vec{E}(Q_2)$

Sous forme schématique:



ou encore :

(3)



Les champs $\vec{E}_{R_2}$ et $\vec{E}_{R_1}$ sont simplement les champs créés par des sphères chargées en volume où on peut appliquer les résultats de la question 4.

Pour une sphère de rayon r :
$$E = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{si } r < R \end{cases}$$

Il faut faire attention à l'intérieur et l'extérieur !

1er cas : $r > R_2$: $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{extérieur de } R_1 \rightarrow E_{R_1} = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} \\ \text{extérieur de } R_2 \rightarrow E_{R_2} = \frac{\rho R_2^3}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$

$$E = E_{R_2} - E_{R_1} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3)} \quad r > R_2$$

2ème cas : $R_1 < r < R_2$: $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{Extérieur de } R_1 \rightarrow E_{R_1} = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} \\ \text{Intérieur à } R_2 \rightarrow E_{R_2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \end{cases}$

$$E = E_{R_2} - E_{R_1} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (r^3 - R_1^3)} \quad R_1 < r < R_2$$

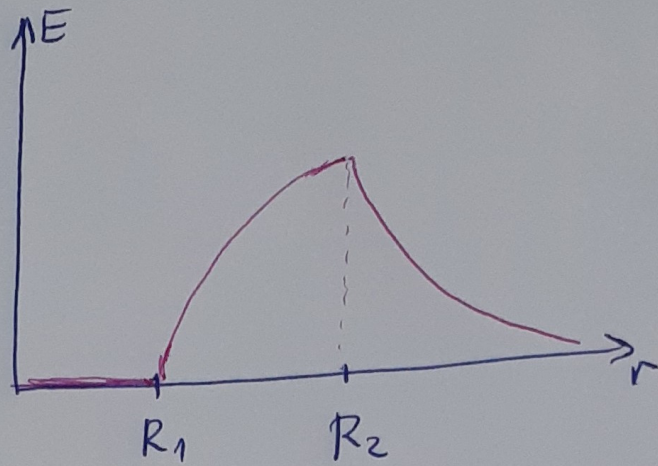
3ème cas : $r < R_1$:

$$\begin{cases} \text{Intérieur à } R_1 \rightarrow E_{R_1} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \\ \text{Intérieur à } R_2 \rightarrow E_{R_2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = E_{R_2} - E_{R_1} \Rightarrow \boxed{E = 0} \quad r < R_1$$

On trouve donc les mêmes résultats que par application directe du Th. de Gauss. (4)

On peut représenter la variation du champ E avec r comme suit



Remarque :

Une sphère chargée en surface peut être vue comme un cas particulier si $R_1 \simeq R_2$. Dans ce cas, il y a une discontinuité en R

