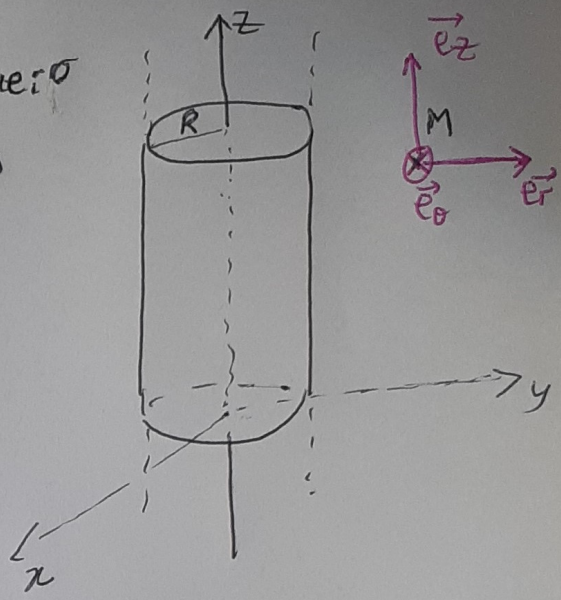
TD - Electromagnétisme dans le vide

Prof.: A. Rachadi

SERIE 2 - EXERCICE 2

EXERCICE 2 :

Cylindre infinie, densité surfacique : σ



1/ On choisit les coordonnées cylindriques pour système de coordonnées

$$\vec{E} = \vec{E}(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} E_r\,\vec{e}_r \\ E_\theta\,\vec{e}_\theta \\ E_z\,\vec{e}_z \end{vmatrix}$$

* **Invariants :**
  - On a une invariance par rotation autour de θ (σ uniforme)
  - On a une invariance par translation selon (Oz) (σ uniforme et cylindre infini)

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r) \quad (1)$$

* **Plans de symétrie :**
  - $PS_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) \rightarrow E_\theta = 0$
  - $PS_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \rightarrow E_z = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} \in (PS_1 \cap PS_2) \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} = E_r\,\vec{e}_r \quad (2)$$

2/ (1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r}$ (3)

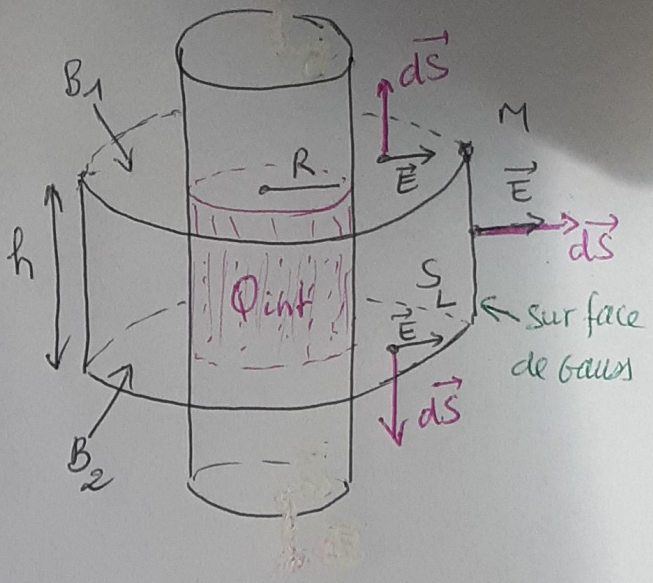
3/ **Théorème de Gauss :**

$$\Phi_{(S)}(\vec{E}) = \oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- Pour exploiter la symétrie $\vec{E} = E_r\,\vec{e}_r$, un bon choix de la surface serait "une surface cylindrique" passant par M c'est la surface de Gauss (on choisit sa hauteur h)

• 1er cas $r > R$ (extérieur du cylindre)

Le flux $\Phi_{(S)}(\vec{E})$ peut être réparti sur 3 surfaces : Bases B_1 et B_2 et surface latérale S_L



$$\Phi_{(S)}(\vec{E}) = \Phi_{B_1} + \Phi_{B_2} + \Phi_{S_L}$$

• sur B_1 : $\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \Phi_{B_1} = 0$

• sur B_2 : $\vec{E} \perp d\vec{S} \rightarrow \Phi_{B_2} = 0$

• sur S_L : $\vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow \Phi_{S_L} = \iint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S}$

$$\Rightarrow \Phi_{S_L} = \iint_{S_L} E.dS$$

En plus $\vec{E} = \vec{E}(r)$, ne dépend que de r qui est constante sur S_L

$$\Rightarrow \Phi_{S_L} = E \iint_{S_L} dS = E.S_L = \underline{E \times 2\pi r h} \quad (1)$$

• D'un autre coté, la charge intérieur à (S) est celle à la surface du cylindre de rayon **R** (et pas r)

$Q_{int} = \sigma . S_L(R)$ où $S_L(R)$ est la surface du cylindre interne de rayon R

$S_L(R) = 2\pi R h$

$$\Rightarrow \underline{Q_{int} = 2\pi\sigma R h} \quad (2)$$

(1) et (2) dans le théorème de Gauss :

$$E \times 2\pi r h = \frac{2\pi\sigma R h}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon r}} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon r}\vec{e_r}} \quad (3)$$

$r > R$

• 2ème cas $r < R$ (intérieur du cylindre)

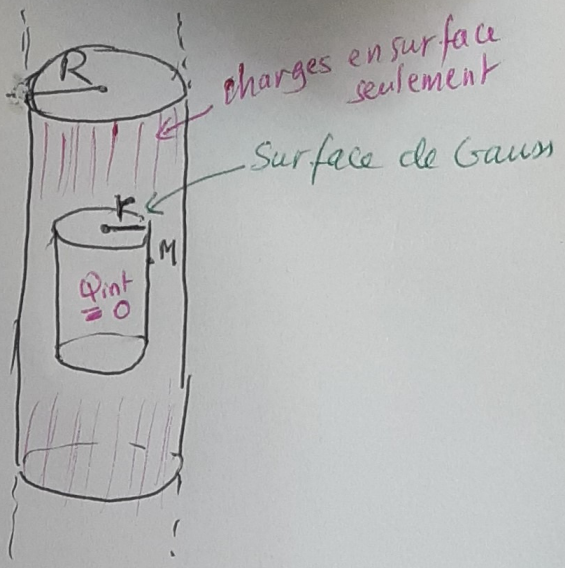
La symétrie est la même → le calcul du flux ne diffère pas du cas $r > R$ → $\Phi_{(S)}(\vec{E}) = E \times 2\pi r h$.

Seulement dans ce cas la surface de Gauss est à l'intérieur

du cylindre chargé.

⇒ Et puisque le cylindre extérieur est chargé seulement en surface

alors $\boxed{Q_{int} = 0}$ (2')



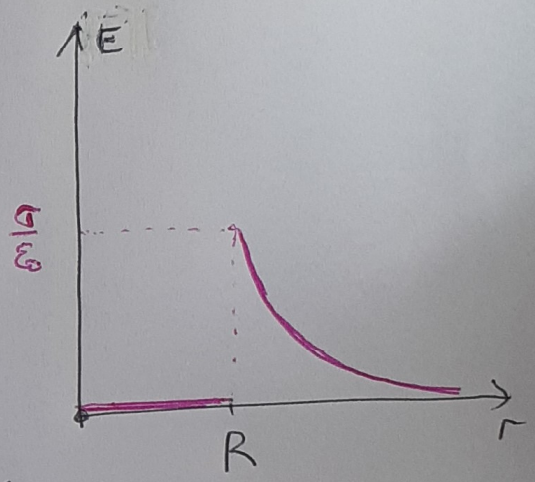
Rq: si le cylindre chargé porte une charge volumique ρ, alors $Q_{int} \neq 0$

D'où (1) et (2') dans le théorème de Gauss → $E \times 2\pi r h = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E = 0} \quad r < R$$

En résumé: $\vec{E}(M) = \begin{cases} 0 \text{ si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \text{ si } r > R \end{cases}$

qui peut être représenté comme suit

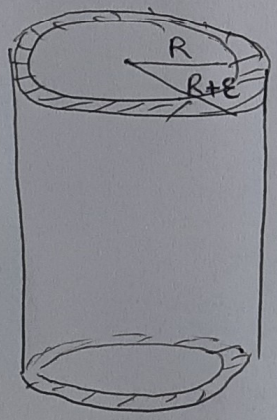


Rq: E est discontinu en r=R. ceci est dû aux charges surfaciques.

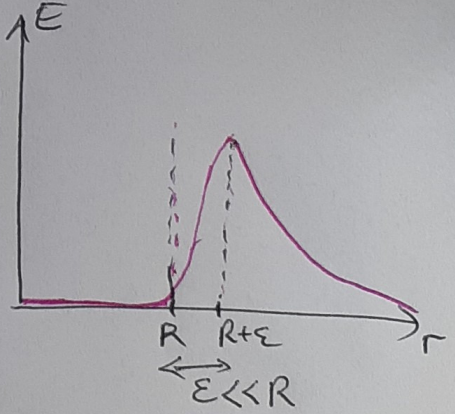
Complément:

Dans la réalité, il n'existe pas de charges surfaciques, ce sont des charges volumiques réparties sur une faible épaisseur qui n'est pas nulle.

→ charges entre r=R et r=R+ε



⇒ La vraie courbe est continue



Il est utile d'étudier un cylindre creux chargé uniformément en volume entre R_1 et R_2 et déduire une courbe comme celle à droite lorsque $R_1 \to R_2$