

Les formules du prisme :

1. $\sin(\acute{i}) = n \cdot \sin(r)$
2. $\sin(\acute{i}') = n \cdot \sin(r')$
3. $A = r + r'$
4. $D = \acute{i} + \acute{i}' - A$

Rapide

*Étude de la déviation : Les formules du prisme constituent quatre relations entre **sept variables**. 3 d'entre elles peuvent donc être choisies comme variables indépendantes : c'est le cas de **A, n, et i**.*

Variation de la
déviation D avec
l'incidence i

$$\textit{Déviation} : D = f(\textit{incidence} : i)$$

La déviation est alors une fonction de ces **trois grandeurs**. Il est commode pour en étudier les variations d'examiner successivement l'influence de chacun des facteurs, **les 2 autres restant constants**.

Les formules du prisme :

1. $\sin(i) = n \cdot \sin(r)$
2. $\sin(i') = n \cdot \sin(r')$
3. $A = r + r'$
4. $D = i + i' - A$

- *Variation de la déviation avec l'incidence.*

Minimum de déviation :

L'indice n et l'angle A du prisme sont supposés constants dans cette étude, en différentiant les formules du prisme, on obtient les quatre relations :

$$\cos(i).di = n.\cos(r).dr \quad (1)$$

$$\cos(i').di' = n.\cos(r').dr' \quad (2)$$

$$dr + dr' = 0 \quad (3)$$

$$dD = di + di' \quad (4)$$

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 1 + \frac{(n.\cos(r').dr')}{(n.\cos(r).dr)} \cdot \frac{\cos(i)}{\cos(i')} = 1 - \frac{\cos(r').\cos(i)}{\cos(r).\cos(i')}$$

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 1 + \frac{(n \cdot \cos(r') \cdot dr')}{(n \cdot \cos(r) \cdot dr)} \cdot \frac{\cos(i)}{\cos(i')} = 1 - \frac{\cos(r') \cdot \cos(i)}{\cos(r) \cdot \cos(i')}$$

Pour $i = i_0$, $i' = \pi/2$, dD/di prend une valeur négative infinie, et pour $i = \pi/2$, $i' = i_0$, nous aurons $dD/di = 1$.

*Donc entre i_0 et $\pi/2$, c'est-à-dire dans le domaine de variation de i , la dérivée s'annule au moins une fois; **la fonction présente un extremum** pour les valeurs de i racines de : $\cos(r) \cdot \cos(i') = \cos(r') \cdot \cos(i)$*

$$1 - \frac{\cos(\mathbf{r}').\cos(\mathbf{i})}{\cos(\mathbf{r}).\cos(\mathbf{i}')} = 0 \Leftrightarrow \cos(\mathbf{r}').\cos(\mathbf{i}) = \cos(\mathbf{r}).\cos(\mathbf{i}')$$

Élevons au carrée les deux membres de l'égalité :

$$\cos^2(\mathbf{r}').\cos^2(\mathbf{i}) = \cos^2(\mathbf{r}).\cos^2(\mathbf{i}')$$

Exprimons les cosinus des angles r , r' , i et i' en fonction de leurs sinus :

$$\underbrace{(1 - \sin^2(\mathbf{r}'))}_{\text{La réfraction}} \cdot (1 - \sin^2(\mathbf{i})) = \underbrace{(1 - \sin^2(\mathbf{r}))}_{\text{La réfraction}} \cdot (1 - \sin^2(\mathbf{i}'))$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2(\mathbf{i}')}{n^2}\right) \cdot (1 - \sin^2(\mathbf{i})) = \left(1 - \frac{\sin^2(\mathbf{i})}{n^2}\right) \cdot (1 - \sin^2(\mathbf{i}'))$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2(i')}{n^2}\right) \cdot (1 - \sin^2(i)) = \left(1 - \frac{\sin^2(i)}{n^2}\right) \cdot (1 - \sin^2(i'))$$

$$\begin{aligned} & \cancel{1} - \sin^2(i) - \frac{\sin^2(i')}{n^2} + \frac{\sin^2(i)}{n^2} \cdot \sin^2(i') \\ &= \cancel{1} - \sin^2(i') - \frac{\sin^2(i)}{n^2} + \frac{\sin^2(i')}{n^2} \cdot \sin^2(i) \end{aligned}$$

$$\sin^2(i) \left[\cancel{1 - \frac{1}{n^2}} \right] = \sin^2(i') \left[\cancel{1 - \frac{1}{n^2}} \right]$$

$$\sin^2(i) - \sin^2(i') = 0$$

$$\sin^2(i') = \sin^2(i) \Leftrightarrow \sin(i') = \pm \sin(i)$$

Équation qui se réduit à :

$$\sin^2(i) - \sin^2(i') = 0$$

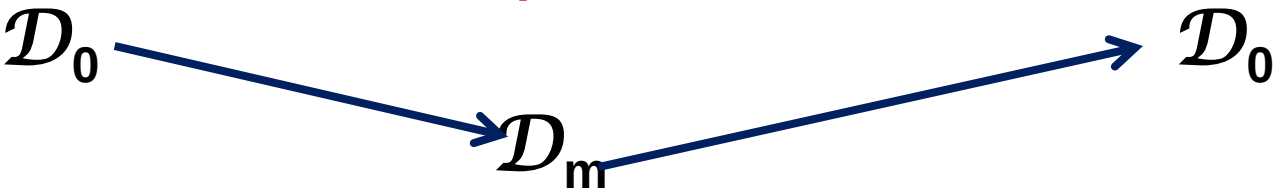
$$i = \pm i'$$

$$i = + i'$$

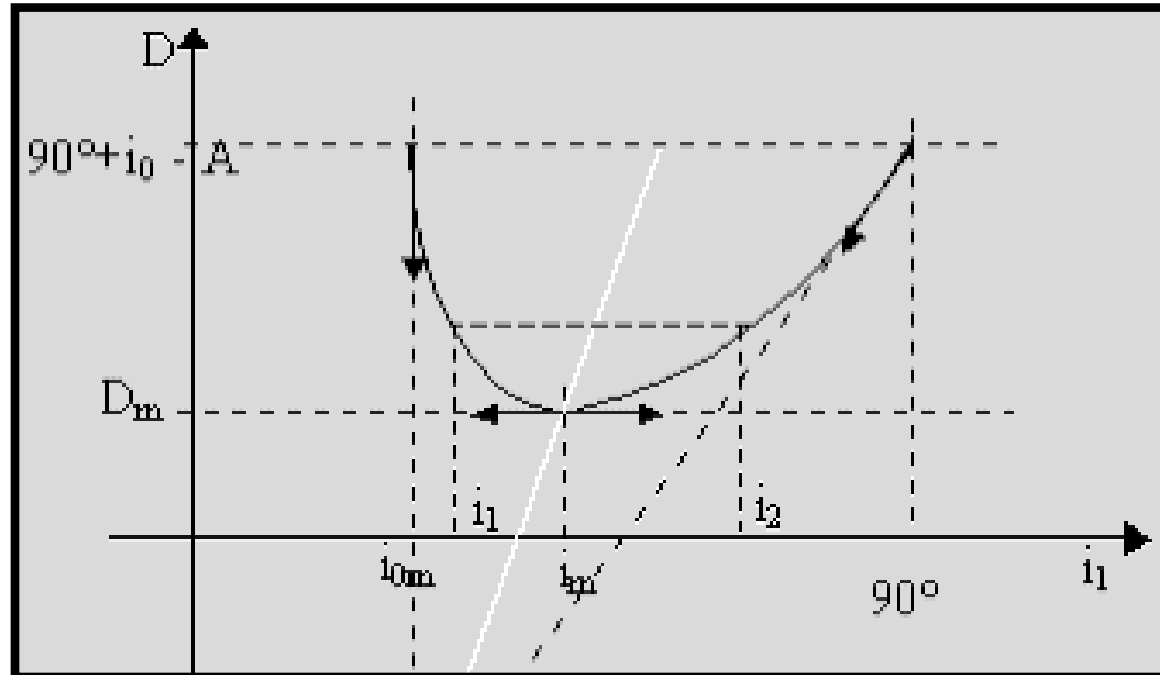
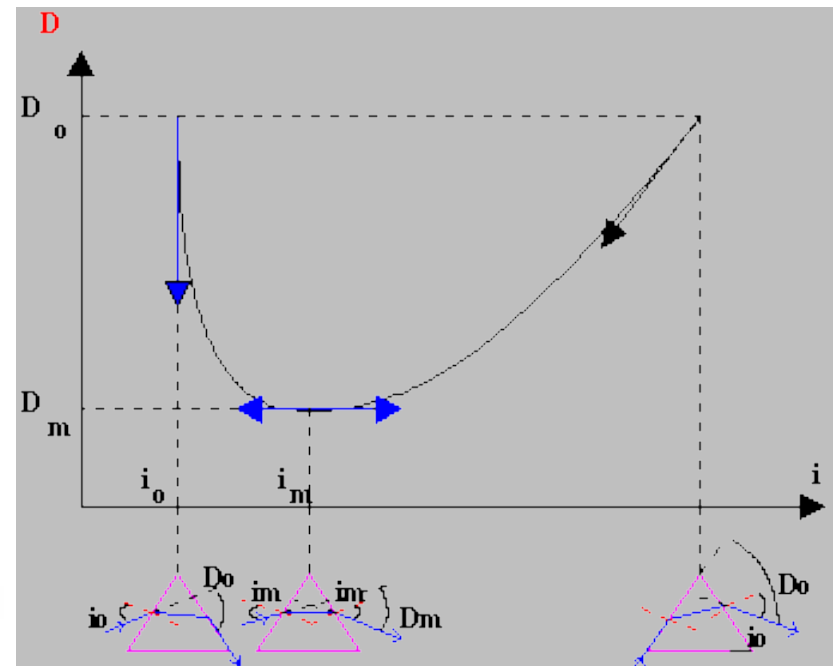
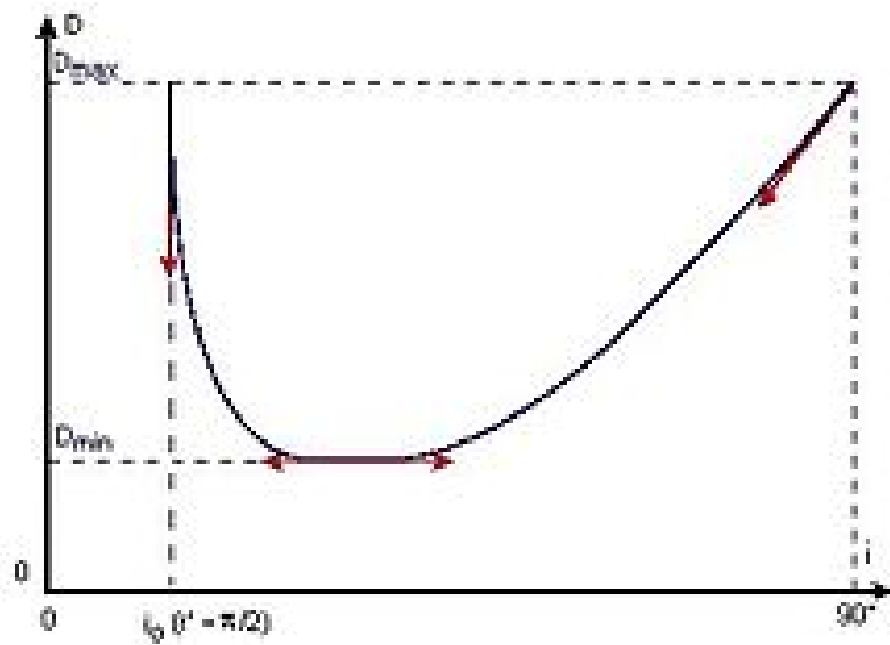
La solution $i = -i'$ est à écarter, car elle entraînerait : $r = -r'$ donc $A = 0$

- La seule racine acceptable est $i=i'$, qu'on désignera par i_m . L'extremum correspondant de D est un minimum puisque la dérivée, d'abord **négative** pour $i < i_m$, devient **positive** pour $i > i_m$.

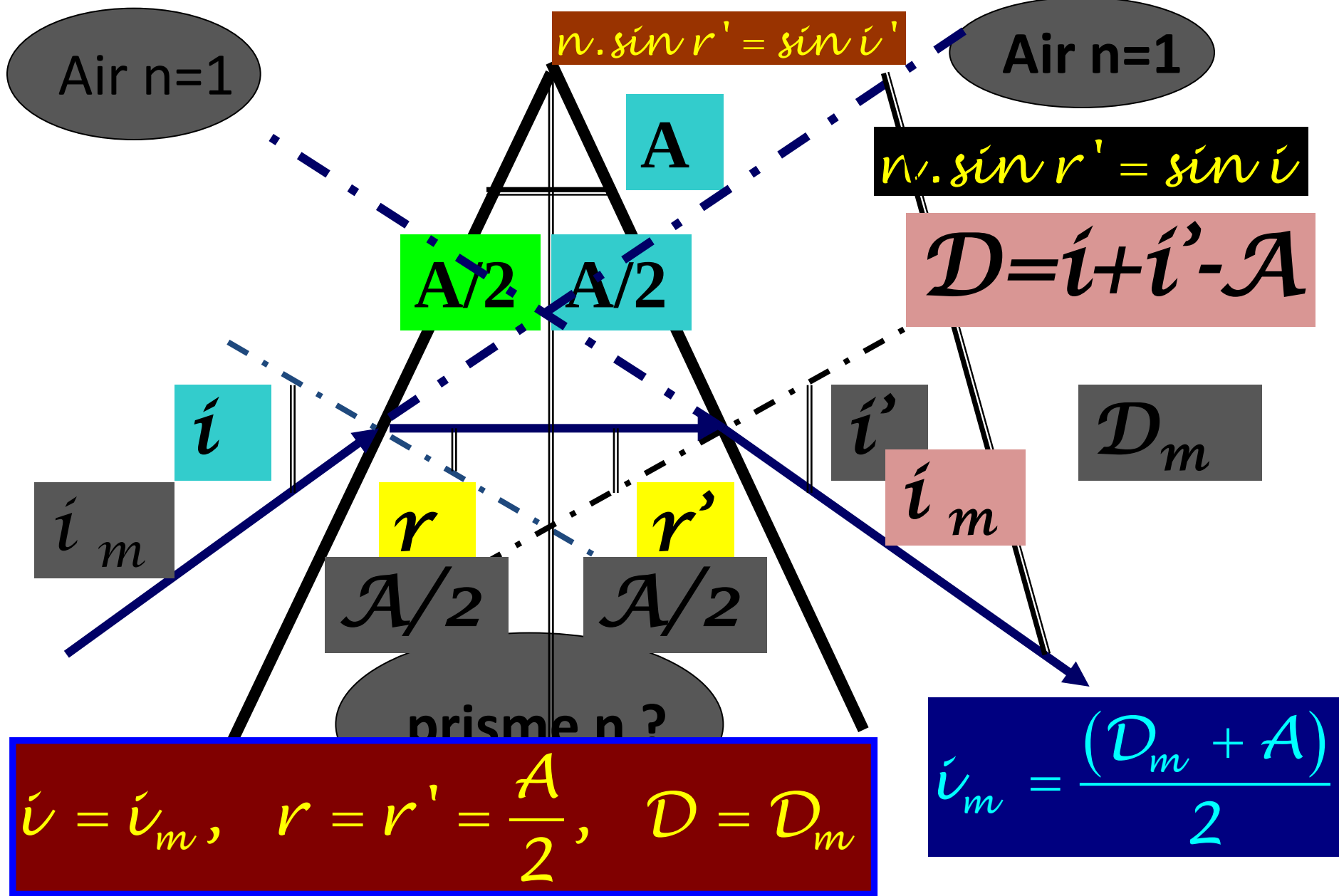
Les variations de D sont données dans le tableau ci-dessous :

<i>Angle $\acute{i}$</i>	$\acute{i}_0$	$\acute{i}_m$			$\pi/2$
$dD/d\acute{i}$	- l'infini	-	0	+	+1
D					

$$D_0 = \acute{i}_0 + \pi/2 - A$$



minimum de déviation



Le trajet du rayon correspondant au minimum de déviation est symétrique par rapport au plan bissecteur du prisme.

Au minimum de déviation on a $i = i' = i_m$, ce qui entraîne que $r = r' = r_m = A/2$, ainsi que :

$$D_m = 2.i_m - A \text{ d'où } i_m = (D_m + A)/2$$

Par conséquent
l'indice n du
prisme s'exprime
comme suit :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

Variation de la
déviation D avec
l'angle A du prisme

$$\text{Déviation : } D = f(\text{angle : } A)$$

- Variation de la **dévi**ation D avec l'angle A du prisme : Cette étude est réalisée en supposant que l'indice n et l'angle d'incidence i , donc l'angle de réfraction r , sont fixes.
- En différentiant les formules (2), (3) et (4) des formules du prisme, on obtient :

$$(2) \quad \cos(i').di' = n.\cos(r').dr'$$

$$(3) \quad dA = dr'$$

$$(4) \quad dD = di' - dA$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$(4) \quad \frac{dD}{dA} = 1 - \frac{di'}{dA} = \frac{n \cdot \cos(r')}{\cos(i')} - 1$$

$$\frac{dD}{dA} \geq 0 \text{ car } \cos(r') \geq \cos(i')$$

Quantité toujours positive, car $|r'| < |i'|$

La **dévi**ation **D** est une fonction croissante de l'angle **A** du prisme.

D ↗ quand **A** ↗

Variation de la
déviatiôn D avec
l'indice n du prisme

$$\textit{Deviation} : D = f(\textit{indice} : n)$$

La différentiation des formules du prisme, sachant que **A** et **i** sont fixes, donne :

$$\begin{aligned}(1) \quad 0 &= n \cdot \cos(r) \cdot dr + dn \cdot \sin(r) \\(2) \quad \cos(i') \cdot di' &= n \cdot \cos(r') \cdot dr' + dn \cdot \sin(r') \\(3) \quad 0 &= dr + dr' \\(4) \quad dD &= di'\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant dans (2) $d\mathcal{I}'$ par $d\mathcal{D}$ et $d\mathcal{R}'$ par $-d\mathcal{R}$, on aura :

$$(5) \quad \cos(i') \cdot dD = -n \cdot \cos(r') \cdot dr + dn \cdot \sin(r')$$

$$(1) \quad 0 = n \cdot \cos(r) \cdot dr + dn \cdot \sin(r)$$

$$(2) \quad \cos i' \cdot di' = n \cdot \cos(r') \cdot dr' + dn \cdot \sin(r')$$

$$(3) \quad 0 = dr + dr'$$

$$(4) \quad dD = di'$$

On multipliant (1) par $\cos(r')$, et (5) par $\cos(r)$ et ajoutant les deux résultats obtenus, il vient :

$$\cos(i') \cdot \cos(r) \cdot dD = dn \cdot (\sin(r) \cdot \cos(r') + \cos(r) \cdot \sin(r'))$$

$$\cos(i') \cdot \cos(r) \cdot dD = dn \cdot (\sin(r + r')) = dn \cdot (\sin(A))$$

$$d'où \quad \frac{dD}{dn} = \frac{\sin(A)}{\cos(r) \cdot \cos(i')}$$

dD/dn est une quantité toujours positive : La déviation D est une fonction croissante de l'indice de réfraction n quelle que soit l'angle d'incidence i .

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} = n + \Delta n$$

$D \nearrow$ quand $n \nearrow$

$\lambda \nearrow \Rightarrow n \searrow \Rightarrow D \searrow$

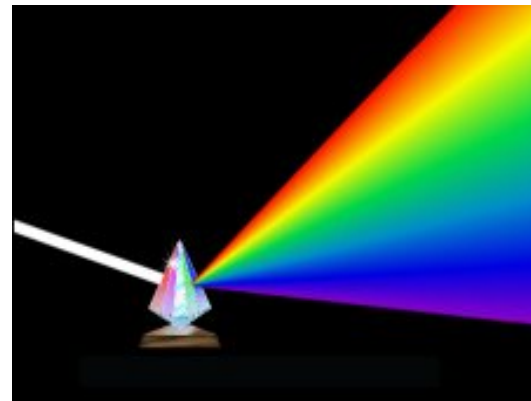
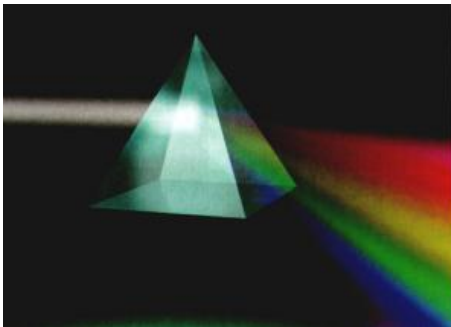
$$\cos(i').\cos(r).dD = dn.(\sin(r).\cos(r') + \cos(r).\sin(r'))$$

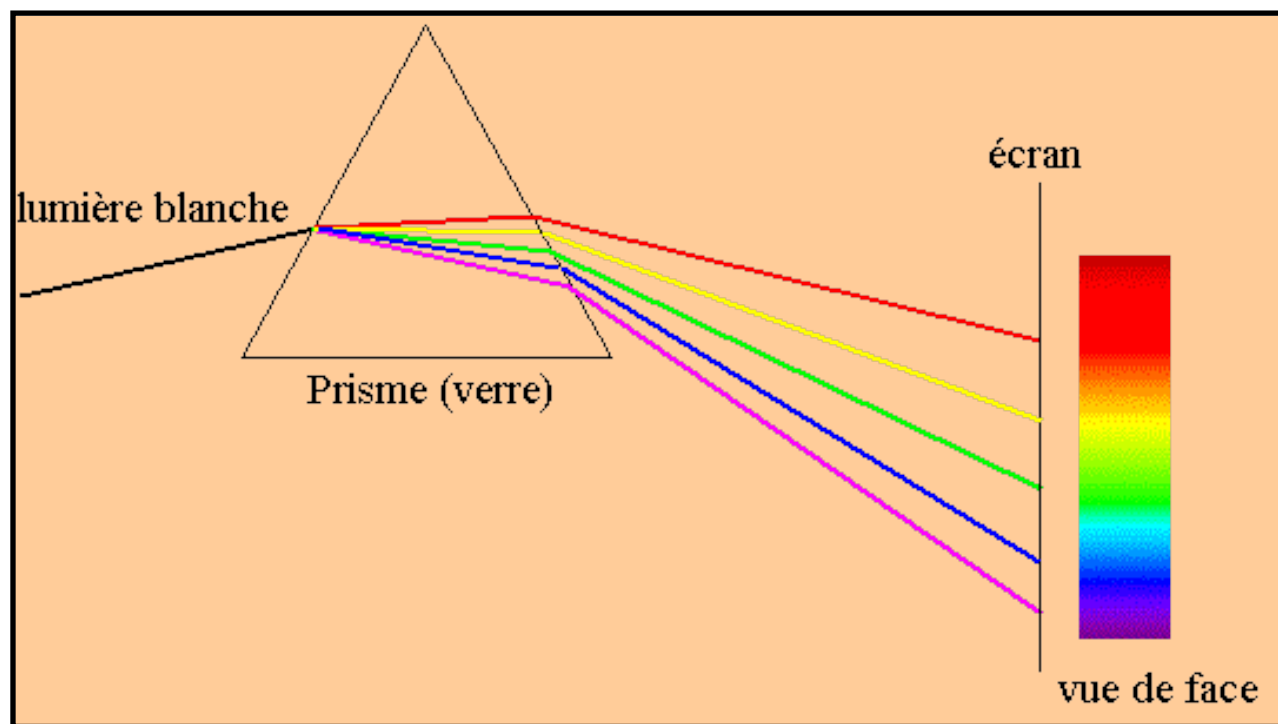
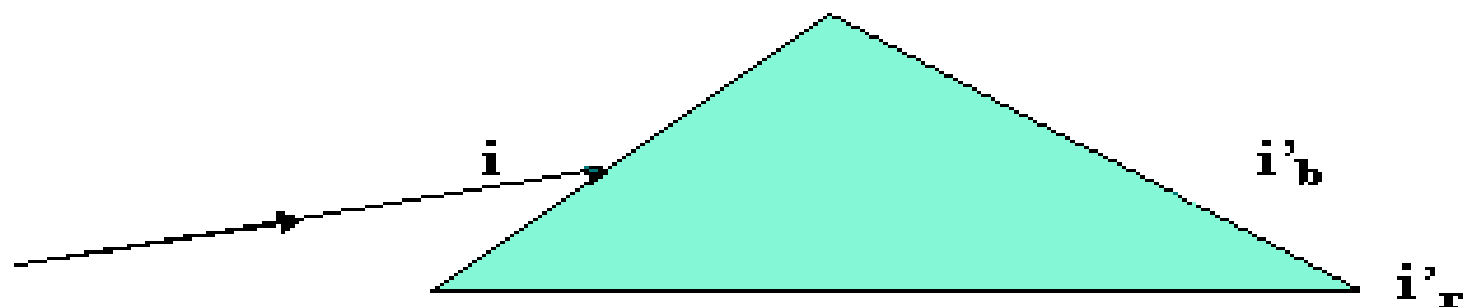
$$d'où \quad \frac{dD}{dn} = \frac{\sin(A)}{\cos(r).\cos(i')}$$

$D \nearrow$ quand $n \nearrow$

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} = n + \Delta n$$

- La **dévi**ation D varie donc en **sens inverse** de la longueur d'onde λ , car quand $\lambda \searrow$, $n \nearrow$ $D \nearrow$





Prismes à réflexion totale :

Les verres ont des indices en général supérieurs à 1,50, les angles des **réfractions limites** Λ par rapport à l'air sont inférieurs à 42° .

Des rayons se propagent dans le verre peuvent donc subir la **réflexion totale** sur les faces de certains prismes, si l'incidence est convenable. Ces faces se comportent alors comme des **miroirs plans**.

Voici :

