

Travaux Dirigés d'optique géométrique. Module Physique 2. S.M.I.A.

Série 2 : Système optique à surface sphérique :

Miroirs et Dioptries sphériques. Lentilles sphériques minces

Chapitre 7 : Les Lentilles minces

Exercice 1 : Méthode de Silbermann

On considère une lentille mince convergente $\mathcal{L}$ qui donne d'un objet AB une image A'B' renversée de même taille que l'objet AB. L'objet AB et son image sont perpendiculaires à l'axe optique Δ de la lentille $\mathcal{L}$. On désigne par f' , la distance focale de $\mathcal{L}$.

1. Quel est le grandissement transversal γ ?
2. Montrer que, dans ce cas, la distance entre le point objet A et son image A', placés tous les deux sur l'axe optique Δ de la lentille $\mathcal{L}$, est telle que $\overline{AA'} = 4.f'$
3. Faire un schéma et proposer un protocole expérimental utilisant cette situation pour mesurer la distance focale f' d'une lentille convergente.

Corrigé de l'exercice 1 :

Soit une lentille mince convergente $\mathcal{L}$ qui donne d'un objet AB une image A'B' réelle renversée de même taille que l'objet AB. L'objet AB et son image sont perpendiculaires à l'axe optique Δ de la lentille $\mathcal{L}$. On désigne par f' , la distance focale de $\mathcal{L}$.

1. Le grandissement transversal γ_t de cette lentille est :
$$\gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1,$$

d'où on a : $\overline{OA'} = -\overline{OA}$.

2. Comme l'objet A et son image A', fournie par cette lentille sont liés par la relation de conjugaison suivante : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$, ce qui implique que : $\overline{OA'} = 2.\overline{OF'}$. Par conséquent l'écart entre l'objet A et son image A' s'exprime comme suit, en appliquant la relation de Chasles :
$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -\overline{OA} + \overline{OA'} = 2.\overline{OA'} = 4.\overline{OF'} = 4f'$$

D'où le résultat demandé :
$$f' = \overline{OF'} = \frac{\overline{AA'}}{4}$$

L'écart de l'objet réel A et son image réelle A' est mesurable au laboratoire, ce qui nous permet alors de déterminer expérimentalement la distance focale f' de cette lentille $\mathcal{L}$.

Autre méthode : Relation de conjugaison de Newton :

Soient F et F' les foyers principaux respectivement objet et image de cette lentille convergente L ; et soient A et A' l'objet et son image fournie par cette lentille. Ces deux points A et A' sont alors conjugués et la relation de conjugaison dite de Newton, fixant l'origine double aux points F et F', telle que :

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2 \Rightarrow (\overline{FO} + \overline{OA}).(\overline{F'O} + \overline{OA'}) = -f'^2$$

$$(-\overline{OF} + \overline{OA}).(-\overline{OF'} + \overline{OA'}) = -f'^2$$

$$\overline{OF}.\overline{OF'} - \overline{OF}.\overline{OA'} - \overline{OA}.\overline{OF'} + \overline{OA}.\overline{OA'} = -f'^2$$

$$\overline{OA} = p, \quad \overline{OA'} = p', \quad \overline{OF} = -f', \quad \overline{OF'} = f'$$

$$-f'.f' + f'.p' - p.f' + p.p' = -f'^2, \quad \gamma_t = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p} = -1$$

D'où on a l'expression suivante, qui s'écrit comme une équation de second ordre en p' :

$$-p'^2 + f' \cdot (p' + p') = 0 \Rightarrow p'[2f' - p'] = 0$$

$$\boxed{p' = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{p' = 2f'}$$

Par la suite, on aura la distance entre l'objet A et son image A', fournie par cette lentille convergente est :

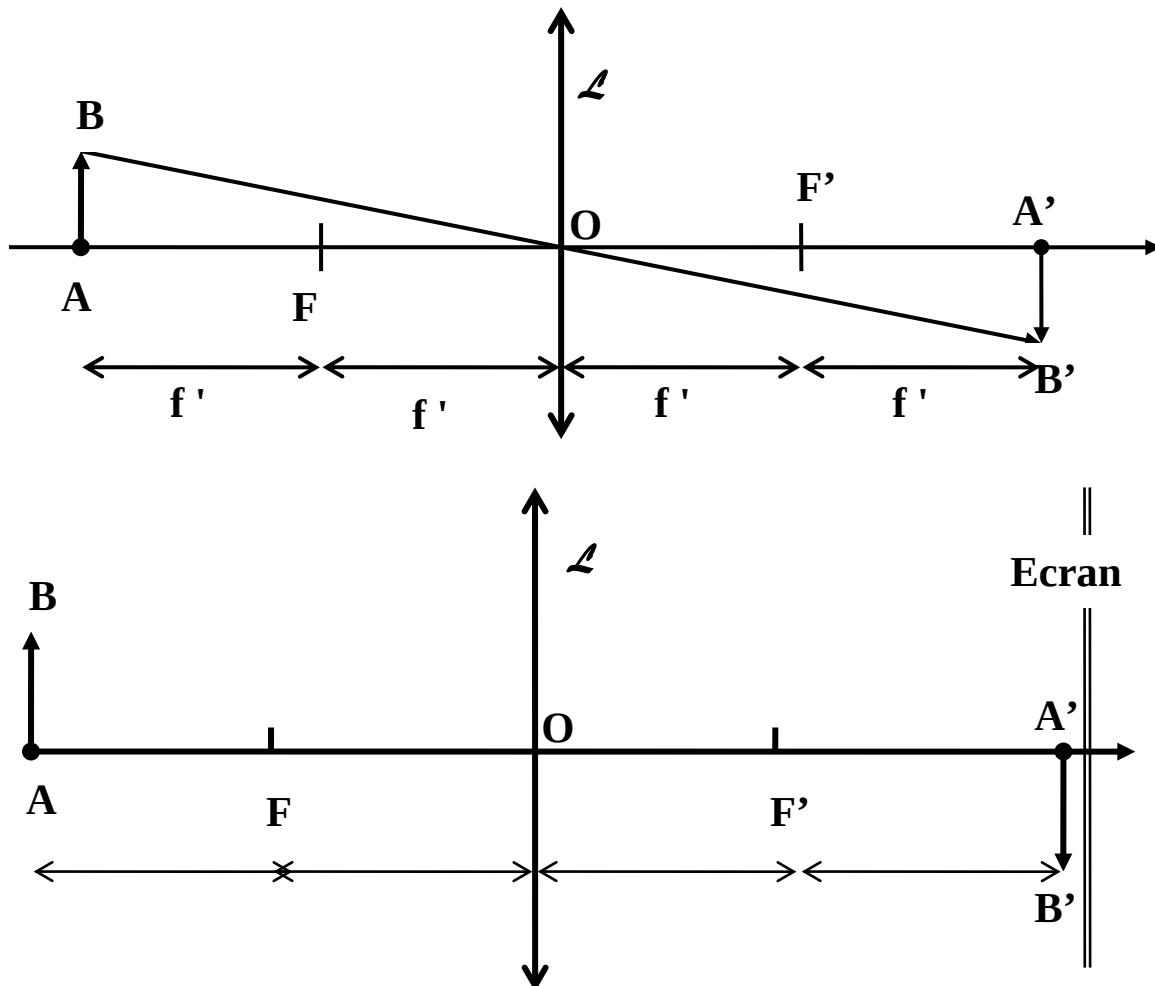
$$p' = 2f' \quad \text{et} \quad \boxed{p = -p' = -2f'}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -p + p' = 4f'}$$

$$\text{D'où le résultat demandé : } \boxed{f' = \overline{OF'} = \frac{\overline{AA'}}{4}}$$

L'écart de l'objet réel A et son image réelle A' est mesurable au laboratoire, ce qui nous permet alors de déterminer expérimentalement la distance focale f' de cette lentille $\mathcal{L}$.

3. Protocole expérimentale pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente $\mathcal{L}$ en vérifiant la méthode de Silbermann :



Exercice 2 : Méthode de Bessel

On dispose d'une lentille convergente $\mathcal{L}$ dont on cherche à mesurer sa distance focale f' . On utilise la **méthode de Bessel** qui consiste à partir d'un objet réel A et d'un écran distant de D, à trouver les deux positions de la lentille $\mathcal{L}$ qui donnent une image réelle A' dans le plan de l'écran :

1. On note : $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$

1.1. Rappeler la relation entre p' , p et f' .

1.2. Quelle est la relation entre D, p' et p ?

1.3. A partir des deux relations précédentes, montrer que : $p^2 - D \cdot p' + D \cdot f' = 0$

1.4. A quelle condition a-t-on deux solutions distinctes ?

1.5. On note p'_1 et p'_2 ces deux solutions. Donner leurs expressions mathématiques.

1.6. On note d la distance entre les deux positions de la lentille permettant d'obtenir l'image

sur l'écran. Montrer que : $f' = \frac{D^2 - d^2}{4.D}$

2. Applications numériques

2.1. On mesure $D=1000\text{mm}$ et $d=500\text{mm}$. En déduire la distance focale f' et la vergence V de cette lentille.

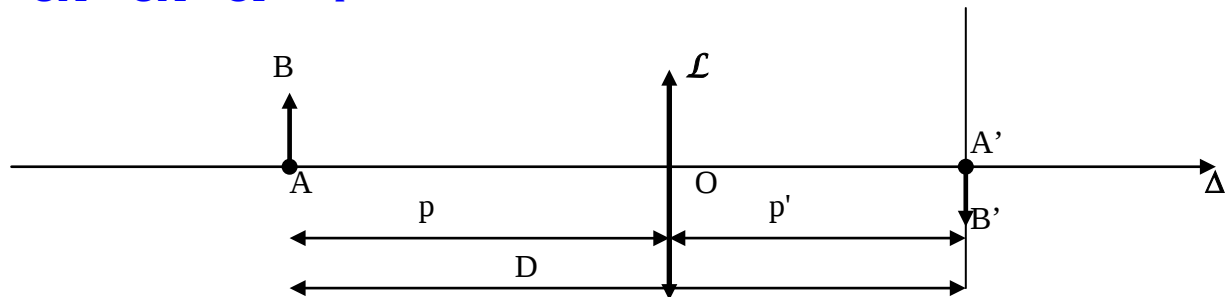
2.2. On accole à la lentille précédente une lentille divergente de distance focale inconnue.

Avec la méthode de Bessel, pour $D = 1000 \text{ mm}$, on trouve $d = 200 \text{ mm}$. En déduire la distance focale de l'association puis la distance focale de la lentille divergente.

Corrigé de l'exercice 2 :

Comme l'objet A et son image A' , fournies par cette lentille sont liés par la relation de conjugaison, avec le centre optique O comme origine de l'axe optique Δ , suivante :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \Rightarrow \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$



La relation entre p , p' et D s'exprime comme suit : $p' - p = D$

En combinant les deux relations des deux questions précédentes, on obtient alors :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \text{avec } p = p' - D \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p' - D} = \frac{1}{f'}, \text{ d'où on a :}$$

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p' - D} = \frac{1}{f'} \Rightarrow [(p' - D) - p'] \cdot f' = (p') \cdot (p' - D) \Rightarrow p'^2 - D \cdot p' + D \cdot f' = 0$$

Pour que cette équation de second degré, $a.x^2 + b.x + c = 0$, ait deux solutions distinctes, il faut que son discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c > 0$, soit supérieur à zéro, c'est-à-dire positif.

Donc on a : $\Delta = D^2 - 4.1.D.f' > 0$ ce qui implique que $D > 4f'$.

Soient p'_1 et p'_2 les deux solutions distinctes de cette équation de second degré, tel que :

$$p'_1 = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4.D.f'}}{2}$$

$$p'_2 = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4.D.f'}}{2}$$

$$d = p'_2 - p'_1 = \sqrt{D^2 - 4.D.f'} \Rightarrow d^2 = D^2 - 4.D.f' \Rightarrow f' = \frac{D^2 - d^2}{4.D}$$

Application numérique : $D = 1000 \text{ mm}$, $d = 500 \text{ mm}$

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4.D} = \frac{1000^2 - 500^2}{4 \times 1000} = 187,5 \text{ mm}$$

$$\text{La vergence } V \text{ de cette lentille est : } V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{187,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{187,5} = 5,33 \text{ D}$$

La distance focale ϕ' de l'association de cette lentille divergente, de distance focale f'_2 , et la première lentille $\mathcal{L}$ de distance focale f' , calculée précédemment s'écrit comme suit, en appliquant la relation de Bessel exprimée ci-dessus :

$$\varphi' = \frac{D^2 - d^2}{4.D} = \frac{1000^2 - 200^2}{4 \times 1000} = 240 \text{ mm}$$

Par conséquent, la distance focale f'_2 de cette lentille divergente est :

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} = \frac{f' \cdot f'_2}{f' + f'_2} \Rightarrow f'_2 = \frac{f' \cdot \varphi'}{f' - \varphi'} = \frac{(187,5) \cdot (240)}{187,5 - 240} = -857,14 \text{ mm}$$

Et, la vergence de cette lentille divergente est V_2 :

$$V_2 = \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{-857,14 \cdot 10^{-3}} = \frac{-1000}{857,14} = -1,17 \delta$$

Exercice 3 : Image d'un objet par une lentille mince convergente/divergente

Un objet AB, placé à 20 cm devant une lentille mince convergente $\mathcal{L}$, a une image A'B' réelle située à 5 cm derrière cette lentille $\mathcal{L}$. Le point objet A et son image A' sont situés sur l'axe optique de la lentille $\mathcal{L}$.

1. Calculer la distance focale f' et la vergence V de la lentille $\mathcal{L}$.
2. Calculer le grandissement linéaire 'transversal' γ_t de cette lentille $\mathcal{L}$.
3. Quelle est la taille de l'objet AB, sachant que son image A'B' formée par la lentille $\mathcal{L}$ mesure 6 mm ?
4. Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'une construction géométrique.
5. Est-ce possible de remplacer la lentille convergente $\mathcal{L}$ par une lentille divergente $\mathcal{L}'$ en gardant le même objet réel AB et son image réelle A'B' respectivement à leur place ?
6. Que devient alors l'image A'B' de cet objet AB si on utilise une lentille divergente de distance focale $\overline{OF'} = -5 \text{ cm}$? (position, nature et dimension)

Corrigé de l'exercice 3 :

1. Soit AB un objet réel placé à 20 cm d'une lentille mince convergente $\mathcal{L}$ d'axe optique principal Δ et de centre optique O. Cette lentille fournit une image A'B' de cet objet, située à 5 cm derrière cette lentille $\mathcal{L}$. Le point source objet A et son image A' sont situés sur l'axe optique principal Δ de cette lentille $\mathcal{L}$. La relation de conjugaison liant le point A et son image A', fournit par cette lentille, en fixant l'origine de l'axe optique Δ au centre optique O de cette lentille, s'exprime alors comme suit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}, \text{ d'où la distance focale } f' \text{ de cette lentille est :}$$

$$f' = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}.$$

$$\text{Application numérique : } \overline{OA'} = +5 \text{ cm} \quad \overline{OA} = -20 \text{ cm} \quad \boxed{f' = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}}$$

$$\text{La vergence } V \text{ de cette lentille est : } \boxed{V = \frac{1}{f'}} \text{ } f' \text{ étant exprimée en mètre.}$$

$$\text{Application numérique : } \boxed{V = \frac{1}{4 \text{ cm}} = \frac{1}{0,04 \text{ m}} = 25 \delta (\text{m}^{-1})}$$

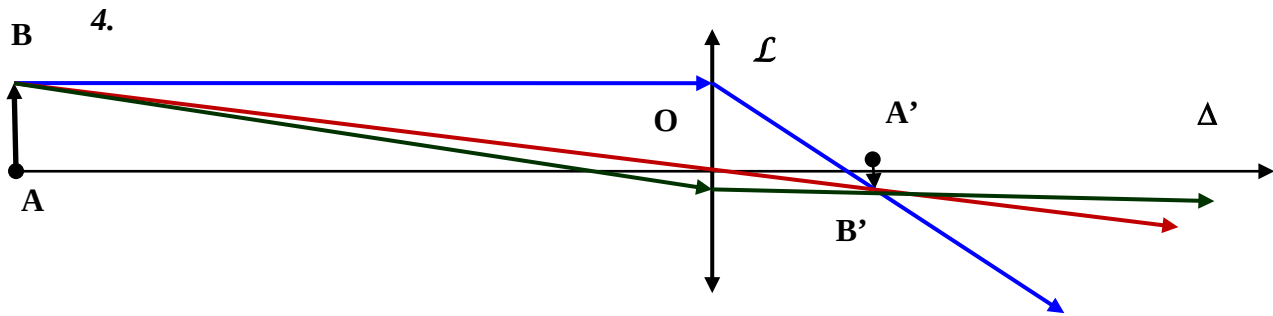
2. Le grandissement linéaire ou transversal γ de cette lentille convergente est comme

$$\text{suit : } \gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}. \text{ Application numérique : } \boxed{\gamma_t = \frac{+5 \text{ cm}}{-20 \text{ cm}} = -0,25}$$

3. Par conséquent, l'image A'B' est réelle, renversée et 4 fois plus petite que l'objet AB.

Si l'image A'B', de l'objet AB fournie par la lentille convergente $\mathcal{L}$, mesure 6 mm, alors la

taille de l'objet réel AB est :
$$\overline{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{\gamma_t} = \frac{6}{-0,25} = -24,0\text{mm}$$



5. En conservant les mêmes données, à savoir que $\overline{OA} = -20\text{cm}$ et $\overline{OA'} = 5\text{cm}$

$$f' = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} \quad f' = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = \frac{(+5) \cdot (-20)}{-20 - 5} = \frac{-100}{-25} = +4\text{cm}$$

Donc le foyer principal image F' sera réel, ce qui implique qu'il est impossible d'utiliser une lentille divergente, dont les foyers principaux objet F et image F' sont virtuels, en conservant les mêmes conditions que la question 1.

En revanche si on prend les données suivantes : $\overline{OA} = -20\text{cm}$ et $\overline{OA'} = -5\text{cm}$, alors nous aurons la distance focale f' de cette lentille divergente qu'on doit utiliser :

$$\overline{OF'} = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = \frac{(-20\text{cm}) \cdot (-5\text{cm})}{(-20) - (-5\text{cm})} = -\frac{20}{3}\text{cm}$$

et de vergence :
$$V = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{3}{20 \cdot 10^{-2}\text{m}} = -15\text{m}^{-1}(\delta)$$

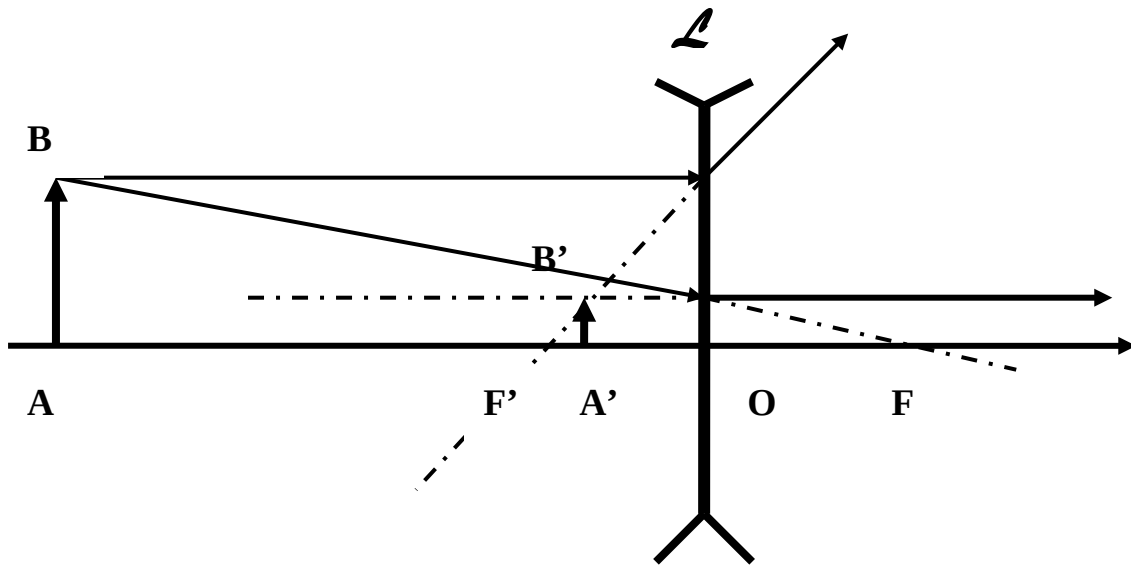
Le grandissement transversal (linéaire) est :
$$(\gamma_t)_D = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-5\text{cm}}{-20\text{cm}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

6. Pour une lentille divergente notée $\mathcal{L}_D$ de distance focale $\overline{OF'} = -5\text{cm}$, l'objet réel AB placé devant cette lentille, en A tel que $\overline{OA} = -20\text{cm}$, aura une image A'B' localisée en A', tel

que : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$, d'où on a
$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$$

Application numérique :
$$\overline{OA'} = \frac{(-20\text{cm}) \cdot (-5\text{cm})}{(-20\text{cm}) + (-5\text{cm})} = -4\text{cm}$$
, et le grandissement transversal

sera :
$$\gamma_{tLD} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 0,2$$



Exercice 4 : Association de deux lentilles minces convergentes

Un objet AB est placé à 40 cm d'une lentille mince convergente $\mathcal{L}_1$ de centre optique O_1 et de distance focale $f'_1 = 8$ cm. Une deuxième lentille mince convergente $\mathcal{L}_2$ de centre optique O_2 et de distance focale $f'_2 = 12$ cm est placée derrière la première lentille à une distance de 30 cm.

1. Calculer la position de l'image de A_1B_1 formée par la première lentille $\mathcal{L}_1$ et A_2B_2 formée par la deuxième lentille $\mathcal{L}_2$.
2. Calculer les grossissements linéaires γ_1 et γ_2 des deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$
3. Décrire l'image finale A_2B_2
4. Quelle est la distance focale f' du système optique $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ si les deux lentilles sont accolées. Quelle est sa vergence V ?

Corrigé de l'exercice 4 :

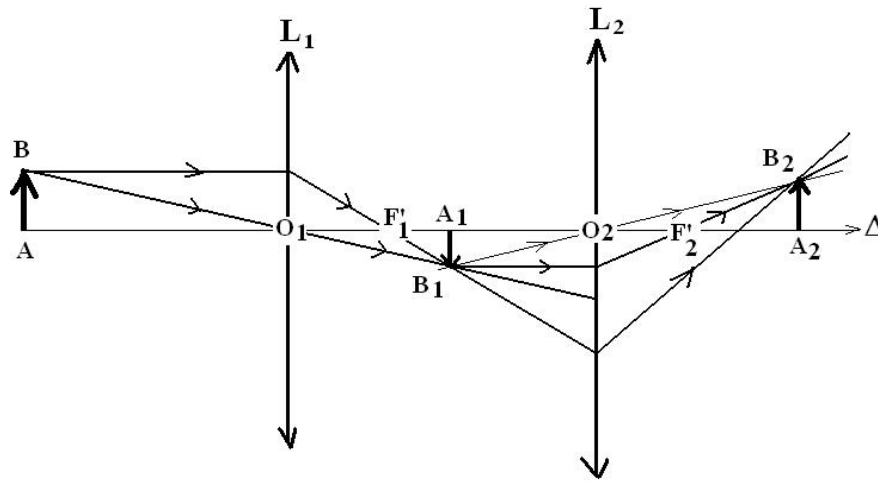
1- Soient deux lentilles convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. La première est de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 8$ cm. La deuxième est de centre optique O_2 et de distance focale $f'_2 = 12$ cm. La deuxième lentille $\mathcal{L}_2$ est située derrière la première lentille $\mathcal{L}_1$ à une distance de 30 cm.

On place un objet réel AB devant la première lentille à 40 cm de son centre optique O_1 .

Le système des deux lentilles forme une image A_2B_2 de cet objet AB, sachant que la première lentille $\mathcal{L}_1$ en forme une image intermédiaire A_1B_1 . Le schéma ci-dessous illustre la formation de ces deux images.

$AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2$, d'où les deux relations de conjugaison des deux lentilles convergentes respectivement $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$:

$$\frac{1}{O_1A} - \frac{1}{O_1A_1} = -\frac{1}{OF_1} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{-40} - \frac{1}{O_1A_1} = \frac{1}{-8} \Rightarrow \boxed{O_1A_1 = +10\text{cm}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = -\frac{1}{\overline{O F'_2}} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2 A_2} = \frac{\overline{O F'_2} \cdot \overline{O_2 A_1}}{\overline{O F'_2} + \overline{O_2 A_1}}} \quad \boxed{\overline{O_2 A_2} = +30\text{cm}} \\ \text{avec } \overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = -30\text{cm} + 10\text{cm} = -20\text{cm} \end{array} \right.$$

2- Le grandissement linéaire transversal γ est par définition :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \underbrace{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1 B_1}}}_{\gamma_1} \cdot \underbrace{\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}}}_{\gamma_2} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \Rightarrow \boxed{\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2}$$

Application numérique : $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} \cdot \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A_1}}$ A.N.: $\boxed{\gamma = \frac{10}{-40} \cdot \frac{30}{-20} = +\frac{3}{8}}$

3- $\left\{ \begin{array}{l} \gamma > 0 \text{ et } |\gamma| < 1 \\ \overline{O_2 A_2} > 0 \end{array} \right.$, ce qui signifie que l'image $A_2 B_2$ ainsi obtenue est **réelle droite et plus**

petite que l'objet réel AB : $A_2 B_2 = (3/8)AB$

4- La distance focale f' du système optique des deux lentilles $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ séparées d'une distance e telle que formule de Gullstrand : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 \cdot f'_2} = \frac{f'_1 + f'_2 - e}{f'_1 \cdot f'_2}$, d'où la

distance focale de ce système est : $\boxed{f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}}$.

Dans le cas où les deux lentilles $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ sont accolées, la distance focale f' des deux lentilles

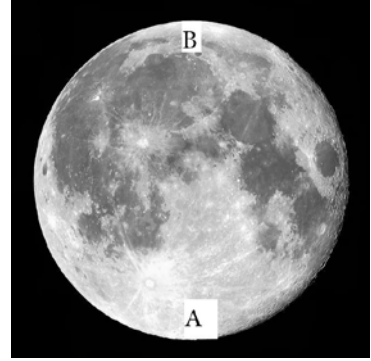
accolées est : $\boxed{f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2}}$ **Application numérique :** $\boxed{f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2} = \frac{8 \times 12}{20} = 4,8\text{cm}}$

La vergence V de ce système des deux lentilles accolées $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ est :

$$\boxed{V(\delta) = \frac{1}{f'(\text{m})} = \frac{1}{4,8 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 20,3\delta}$$

Exercice 5 : Image de la Lune à l'aide d'une lentille convergente :

La Lune est vue depuis la Terre sous un angle α . Cet angle α est appelé diamètre apparent de la Lune. Un élève cherche à former l'image de la lune sur un écran à l'aide d'une lentille de 1,0 m de distance focale. Le diamètre réel de la Lune est de 3450 km ; et la distance moyenne Terre-Lune est de 380 000 km.



1. Exprimer en degré, en radian puis en minutes le diamètre apparent de la Lune vue de la Terre.
2. À quelle distance de la lentille doit-il placer l'écran ?
3. Faire un schéma sans souci d'échelle, puis construire l'image A'B' du diamètre AB de la Lune.
4. Calculer la taille de l'image A'B' de la Lune AB sur l'écran. On utilisera l'approximation pour $\text{tg}(\alpha) = \alpha$ les petits angles.
5. Pour obtenir une image plus grande, l'élève doit-il choisir une lentille de distance focale plus grande ou de plus petite que la première ?

Corrigé de l'exercice 5 :

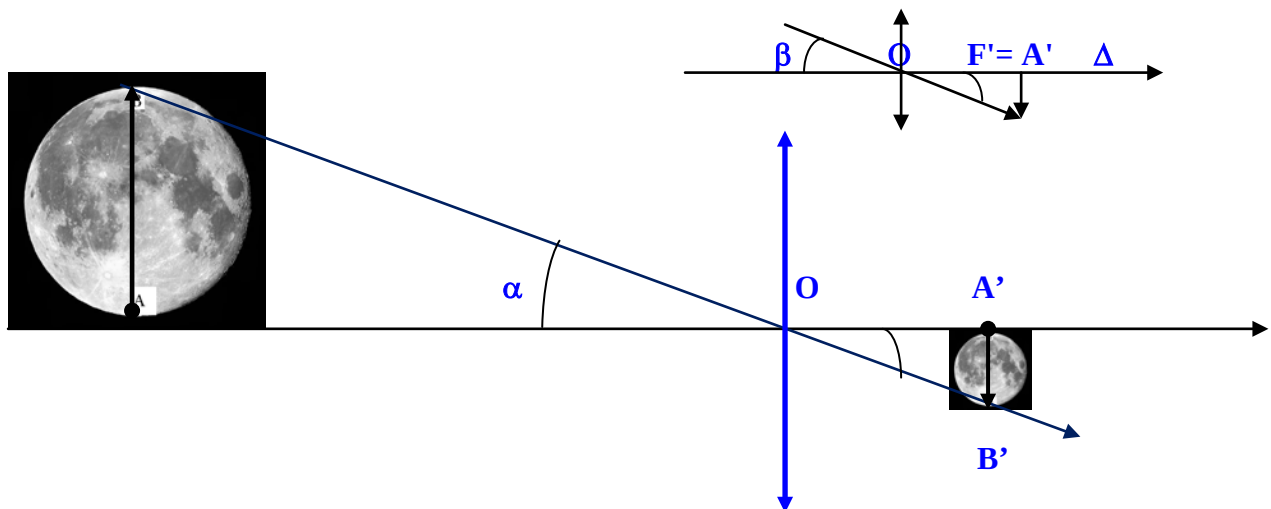
1. Par définition, le diamètre apparent d'un objet est l'angle α sous lequel il est vu. Il est à noter que le diamètre réel de la Lune est de 3450 km ; et la distance moyenne Terre-Lune est de 380 000 km. Exprimer en degré, en radian puis en minutes le diamètre apparent de la Lune vue de la Terre.

Le diamètre apparent α de la Lune de diamètre d et située à une distance D par rapport à la Terre.

$$\text{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{d}{D} = \frac{3450 \text{ km}}{380000 \text{ km}} \approx 0,009 \text{ rd}$$
$$1^\circ \rightarrow 60' \Rightarrow 0,52^\circ \rightarrow 31',21 \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow 90^\circ \Rightarrow 9 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{2.90.9 \cdot 10^{-3}}{\pi} \approx 0,52^\circ$$

$$\boxed{\alpha \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \approx 0,52^\circ \approx 31',21} \quad \alpha = 0,5^\circ = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

2. La lunette astronomique est pointée sur le point A le plus bas de la Lune. Il est à noter que le diamètre apparent de la Lune, observé à l'œil nu, est de 32'.



3. Pour voir l'image $A'B'$ de la lune AB , il faut placer un écran derrière la lentille convergente $\mathcal{L}_1$, jouant le rôle de l'objectif, sur le foyer principal image F' tel que $OA' = OF' = 1\text{m} = 100\text{ cm}$.
4. Calculer le diamètre $A'B'$ de l'image réelle formée par l'objectif $\mathcal{L}_1$.

$$\text{tg}\alpha \approx \alpha_{\text{rd}} = \frac{\overline{A'B'}}{f'_1} \Rightarrow \overline{A'B'} = \alpha_{\text{rd}} \cdot f'_1 = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \cdot 100\text{cm} \approx 9\text{mm}$$

5. Pour obtenir une image plus grande, l'élève doit choisir une lentille de distance focale plus grande que la première ; c'est-à-dire :

$$\overline{A_1'B_1'} = \alpha_{\text{rd}} \cdot f'_1 \approx 9\text{mm} < \overline{A_2'B_2'} = \alpha_{\text{rd}} \cdot f'_2 \Rightarrow f'_1 < f'_2$$

L'élève doit choisir une lentille de distance focale plus grande que la première.

Exercice 6 : Etude d'un téléobjectif

L'exercice sera traité dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Un objectif photographique peut être assimilé à une lentille mince convergente, $\mathcal{L}_1$, de centre optique, O_1 , et de distance focale image $\overline{O_1F'_1} = 50\text{ mm}$. Cet objectif fournit une image A_1B_1 d'un objet AB , $\overline{AB} = 1,80\text{ m}$, perpendiculaire à l'axe optique Δ de la lentille, $\mathcal{L}_1$, et situé à une distance de 10 m devant $\mathcal{L}_1$.

1. Calculer la position, $\overline{O_1A_1}$, et la grandeur de cette image, A_1B_1 , et En déduire le grandissement transversal γ_t et la nature de l'image A_1B_1 .
2. On transforme cet objectif en téléobjectif, en ajoutant à la lentille $\mathcal{L}_1$ une lentille mince divergente $\mathcal{L}_2$ de centre optique, O_2 , et de distance focale image $\overline{O_2F'_2} = -20\text{ mm}$. On pose $\overline{O_1O_2} = e$
3. Comment faut-il disposer la lentille, $\mathcal{L}_2$, par rapport à la lentille, $\mathcal{L}_1$, pour que le système $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ donne d'un objet situé à l'infini une image réelle ?
4. En utilisant la formule de Gullstrand, exprimer la distance focale image, f' , du système $(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ en fonction de l'épaisseur e .
5. Comment peut-on augmenter la vergence, V , du système ?
6. Calculer la distance focale image du système pour $e = 35\text{ mm}$.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $e = 35\text{ mm}$

Corrigé de l'exercice 5 :

1. Un objet AB , situé à 10 m devant l'objectif d'un appareil photographique, assimilé à une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ de centre O_1 et de distance focale image $\overline{O_1F'_1} = 50\text{ mm}$. Cet objectif fournit une image A_1B_1 de cet objet AB , $\overline{AB} = 1,80\text{ m}$, perpendiculaire à l'axe optique Δ de la lentille, $\mathcal{L}_1$.

Le schéma ci-dessous illustre la formation de cette image : $AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1$

, d'où la relation de conjugaison de cette lentille convergente $\mathcal{L}_1$:

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = -\frac{1}{\overline{OF'_1}} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \cdot \overline{O_1F'_1}}{\overline{O_1F'_1} + \overline{O_1A}} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F'_1} = +50\text{mm}}$$

Le grandissement linéaire transversal γ_t est par définition :

$$\gamma_t = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \quad \text{A.N.:} \quad \boxed{\gamma_t = \frac{50}{-10000} = -5 \cdot 10^{-3}}$$

2. Soient deux lentilles, $\mathcal{L}_1$ convergente et $\mathcal{L}_2$ divergente. La première lentille est de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 50 \text{ mm}$. La deuxième lentille $\mathcal{L}_2$ est de centre optique O_2 et de distance focale $f'_2 = -20 \text{ mm}$. La deuxième lentille $\mathcal{L}_2$ est située derrière la première lentille $\mathcal{L}_1$ à une distance de e .

Le système des deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ forme une image A_2B_2 d'un objet AB , situé à l'infini. Sachant que la première lentille $\mathcal{L}_1$ en forme une image intermédiaire A_1B_1 sur son foyer principal image. Le schéma ci-dessous illustre la formation de ces deux images.

$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A_2B_2$, d'où les deux relations de conjugaison des deux lentilles convergentes respectivement $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$:

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = -\frac{1}{\overline{OF'_1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{50} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1A_1} = +50 \text{ mm}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{OF'_2}} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2A_2} = \frac{\overline{OF'_2} \cdot \overline{O_2A_1}}{\overline{OF'_2} + \overline{O_2A_1}}} \quad \boxed{\overline{O_2A_2} = \frac{20 \cdot e - 1000}{30 - e} > 0} \\ \text{avec} \quad \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + 50 \text{ mm} \end{array} \right.$$

Pour que l'image finale A_2B_2 soit réelle, il faut que la mesure algébrique $\overline{O_2A_2}$ soit

positive : $\overline{O_2A_2} = \frac{20 \cdot e - 1000}{30 - e} > 0$

Donc
$$\begin{array}{l} 20 \cdot e - 1000 > 0 \quad \text{et} \quad 30 - e > 0 \\ \text{ou} \quad \Rightarrow 30 \text{ mm} < e < 50 \text{ mm} \\ 20 \cdot e - 1000 < 0 \quad \text{et} \quad 30 - e < 0 \end{array}$$

3. D'après la **formule de Gullstrand**, la vergence V des deux lentilles $\mathcal{L}_1$, de vergence V_1 et $\mathcal{L}_2$, de vergence V_2 , associées, et non accolées, distantes l'une de l'autre de la quantité e s'exprime comme suit :

$$V = V_1 + V_2 - e \cdot V_1 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 \cdot f'_2} = \frac{f'_1 + f'_2 - e}{f'_1 \cdot f'_2}, \quad \text{D'où la distance focale}$$

f' de l'ensemble des deux lentilles non accolées est :
$$f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

$$f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{-20 \times 50}{50 - 20 - e} = \frac{-1000}{30 - e} = \frac{1000}{e - 30} \text{ mm}$$

4.

Pour augmenter la vergence V , il faut diminuer la distance focale f' , donc il faut augmenter le dénominateur, c'est à dire le terme $(e - 30)$. Autrement dit que e soit supérieure à 30 mm.

5. Application numérique : $e = 35 \text{ mm}$, $f'_1 = +50 \text{ mm}$ et $f'_2 = -20 \text{ mm}$

$$f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{-20 \times 50}{50 - 20 - e} = \frac{-1000}{30 - e} = \frac{1000}{35 - 30} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ mm}$$

Et de vergence

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{200} = 5 \delta$$

..../....