

Travaux Dirigés d'optique géométrique Module Physique II S.M.I.A.

Série 1 : Bases de l'optique géométrique. Système optique à surface plane

Problèmes de synthèse : Chapitres 1, 2, 3 et 4

Problème 1 : L'étude d'une fibre optique [Session de juin 2008 : 12 points]

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur en silice d'indice de réfraction n_1 entouré d'une gaine d'indice de réfraction n_2 . Elle permet de transporter des informations par modulation de l'amplitude d'un faisceau lumineux confiné à l'intérieur de la fibre par réflexion totale.

1. Avec les données du schéma 1 ci-dessous

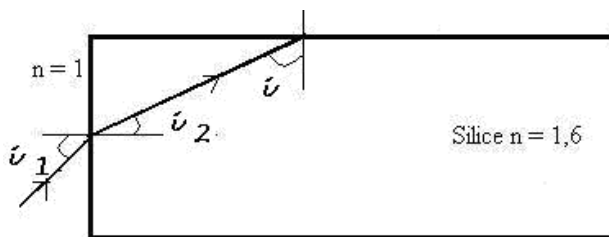


schéma 1

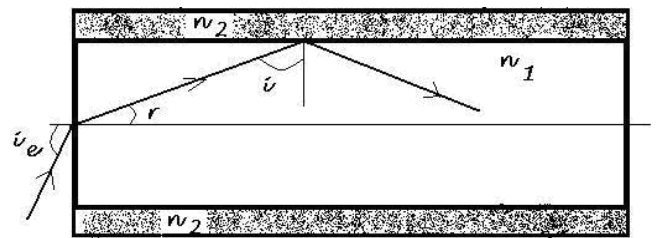


schéma 2

- Calculer i_1 et i_2 sachant que $i = 60^\circ$ [1 point]
- Tracer la marche du rayon lumineux jusqu'à sa sortie du cylindre [1 point]

2. Un rayon lumineux arrive de l'air, d'indice $n_{\text{air}} = 1$, sous une incidence i_e et pénètre dans le cœur d'une fibre optique d'indice n_1 , comme l'illustre le schéma 2.

- Exprimer le sinus de l'angle de réfraction r en fonction de l'indice de réfraction n_1 et de l'angle d'incidence i_e , angle d'entrée de la lumière au cœur de la fibre. [1 point]
- Sur la surface de séparation cœur – gaine, l'angle d'incidence est i . Donner la relation entre i et r et l'expression de $\cos i$. [2 points]
- L'indice de la gaine a pour valeur n_2 ($n_2 < n_1$). Exprimer le sinus de l'angle de la réflexion limite Λ entre les deux milieux d'indice de réfraction n_2 et n_1 . [1 point]

3. Trouver la condition pour qu'un rayon lumineux puisse se propager dans la fibre. [2 points]

4. Montrer que si l'angle d'incidence i_e reste inférieur à un angle limite i_{limite} , un rayon lumineux peut être guidé dans le cœur de la fibre optique. [2 points]

5. On appelle une ouverture numérique, notée O.N., la quantité $\sin i_{\text{limite}}$. Exprimer O.N. en fonction de n_1 et de $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$. Données $\Delta = 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$. [1 point]

6. Atténuation dans la fibre : Les pertes par transmission X sont exprimées en $\frac{\text{db}}{\text{km}}$. On

rappelle que $X_{\text{db}} = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$, avec P_1 puissance optique à l'entrée de la fibre et P_2

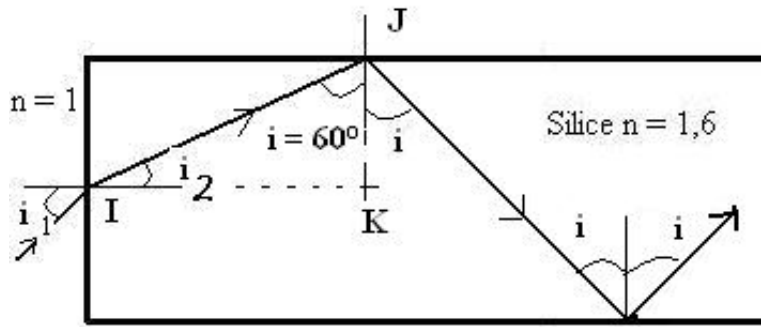
puissance optique au bout d'un kilomètre de parcours. Il est à rappeler que $\log$ désigne le logarithme décimal (logarithme à base de 10).

Vers 1970, l'atténuation était de 10 db.km^{-1} . Actuellement, une atténuation de $0,005 \text{ db.km}^{-1}$ est courante. Dans les deux cas, exprimer en % les pertes au bout d'un km. [1 point]

Corrigé:

Exercice 1- Soit une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur en silice d'indice de réfraction n_1 entouré d'une gaine d'indice de réfraction n_2 . Elle permet de transporter des informations par modulation de l'amplitude d'un faisceau lumineux confiné à l'intérieur de la fibre par réflexion totale.

En effet pour le schéma n°1, un rayon lumineux arrive sur la fibre sous un angle d'incidence i_1 . Sur la face d'entrée, au point I, ce rayon subit une réfraction avec un angle i_2 , puis il continue son chemin pour atteindre la paroi horizontale de la fibre au point J sous un angle $i = 60^\circ$, ce qui va entraîner une réflexion totale de ce rayon, car cet angle d'incidence i est plus grand que l'angle de la réfraction limite relatif à la surface de séparation de la silice et de l'air. Ce que nous allons étudier.



Document 1

a- Dans le triangle IJK, la somme des angles est égale à π , tel que $i + i_2 + \pi/2 = \pi$.

D'où : $i + i_2 = \frac{\pi}{2}$. Sachant que $i = 60^\circ$, on obtient alors l'angle $i_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

En utilisant la loi de Snell-Descartes au point I où il y a réfraction de la lumière on peut écrire :

$$1.\sin i_1 = n.\sin i_2 \quad \text{d'où} \quad \sin i_1 = 1,6.\sin 30^\circ = 0,8 \quad i_1 = 53^\circ 7' 48''$$

b- Comme au point J, la lumière rencontre une surface séparant la silice (milieu plus réfringent que l'air) et l'air, elle passe alors d'un milieu plus réfringent qui est la silice vers un milieu moins réfringent qui est l'air. Pour savoir si la lumière traverse ou non cette surface, il faut d'abord déterminer l'angle de réfraction limite $i_{\text{limite}} = \Lambda$ et le comparer avec l'angle d'incidence au point J. Cet angle de la réfraction limite est donné

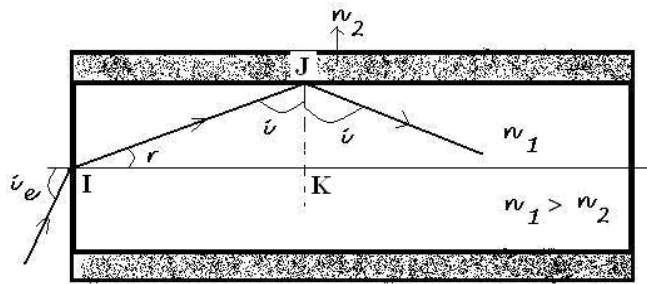
$$\text{par } \Lambda = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{1,6}\right) = 38^\circ 40' 48'' \approx 39^\circ.$$

Comme, au point J, l'angle d'incidence $i = 60^\circ > i_{\text{limite}} = \Lambda \approx 39^\circ$. Donc la lumière va subir une réflexion totale au point J. Il n'y aura pas de réfraction dans ce cas. Par la suite, le rayon lumineux va subir une succession de réflexions à l'intérieur du cylindre de silice jusqu'à sa sortie à l'autre bout de la fibre optique considérée.

2-a- Considérons cette fois-ci le document 2. Soit un rayon lumineux qui tombe sur la fibre optique proposée au point I sous un angle d'incidence i_e . Il subit une réfraction en se rapprochant de la normale, car il passe de l'air, milieu d'indice $n = 1$ dans un autre milieu plus réfringent, d'indice n_1 supérieur à 1. Dans ce second milieu homogène d'indice n_1 , l'angle de réfraction de ce rayon lumineux est alors r . Ce rayon lumineux continue son chemin vers le point J de la paroi latérale de la fibre, où il arrive sous un angle d'incidence i , comme l'illustre la figure ci-dessous.

La relation de Snell-Descartes traduisant la réfraction au point I nous permet d'écrire :

$$n_0.\sin i_e = n_1.\sin r, \quad \text{d'où} \quad \sin r = \frac{n_0}{n_1}.\sin i_e = \frac{1}{n_1}.\sin i_e$$



document 2

b- Dans le triangle IJK, la somme des angles est égale à π , donc nous pouvons écrire la

relation suivante : $i + r + \frac{\pi}{2} = \pi$, d'où l'angle i : $\frac{\pi}{2} - r = i$, et $\boxed{\cos i = \cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = \sin r}$

c) Par hypothèse nous admettons que la gaine d'indice de réfraction n_2 est moins réfringente que le cœur de la fibre, d'indice n_1 . Par conséquent nous pouvons déduire que $n_2 < n_1$, et par la suite nous déduisons que l'angle $\Lambda_{\text{cœur-gaine}}$ de la réfraction limite se trouve dans le milieu d'indice n_1 , c'est-à-dire le cœur de la fibre. Nous pouvons écrire alors l'égalité

suivante : $n_1 \cdot \sin \Lambda_{\text{cœur-gaine}} = n_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \Lambda_{\text{cœur-gaine}} = \frac{n_2}{n_1}}$

c. Pour qu'un rayon lumineux IJ puisse se propager le long du cœur de la fibre optique, sachant que l'indice de réfraction n_1 du cœur de la fibre est supérieur à l'indice n_2 de la gaine de la fibre optique, il faut qu'au point J de la paroi latérale, l'angle d'incidence i soit supérieur à l'angle $\Lambda_{\text{cœur-gaine}}$ de réfraction limite. D'où l'inégalité suivante :

$$i > \Lambda_{\text{cœur-gaine}} \Rightarrow \sin i > \sin \Lambda_{\text{cœur-gaine}} \text{ soit } \sin i > \frac{n_2}{n_1}$$

Or on a : $\sin^2 i = 1 - \cos^2 i \stackrel{i+r=\frac{\pi}{2}}{=} 1 - \sin^2 r = \cos^2 r$, donc on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} i+r &= \frac{\pi}{2} \\ \cos i &= \sin r \end{aligned}$$

$\sin^2 i = \cos^2 r > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 r > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$. Par conséquent, nous pouvons écrire

l'inégalité suivante : $1 - \sin^2 r > \frac{n_2^2}{n_1^2} \stackrel{\sin i_e = n_1 \cdot \sin r}{\Rightarrow} 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} > \sin^2 r = \frac{\sin^2 i_e}{n_1^2}$, d'où l'expression

finale qui traduit la condition de propagation d'un rayon lumineux le long du cœur de la fibre optique : $\boxed{n_1^2 - n_2^2 > \sin^2 i_e}$. Comme l'angle d'incidence i_e est un angle compris entre zéro et

$\pi/2$ alors son sinus est toujours positif, ce qui nous permet d'écrire l'inégalité précédente sous

la forme suivante : $\boxed{\sqrt{n_1^2 - n_2^2} > \sin i_e}$. Cette inégalité est la condition pour qu'un rayon lumineux puisse se propager dans le cœur de la fibre optique, sachant qu'il arrive sur cette fibre sous un angle d'incidence i_e et que le cœur est plus réfringent que la gaine de la fibre optique considérée. Autrement dit l'indice de réfraction n_1 du cœur est plus grand que l'indice de réfraction n_2 de la gaine de la fibre optique.

4- Si l'angle d'incidence i_e est plus petit qu'une valeur maximale $(i_e)_{\text{Maximum}}$, alors on aura :

$$i_e < (i_e)_{\text{Maximum}} \text{ alors } \sin i_e \stackrel{\text{sinus fct croissante}}{\leq} \sin (i_e)_{\text{Maximum}}$$

Comme nous avons démontré en (3) que pour qu'un rayon lumineux incident, arrivant sous un angle d'incidence i_e sur la fibre, puisse se propager à l'intérieur de cette fibre il faut que

$\sqrt{n_1^2 - n_2^2} > \sin i_e$, donc nous pouvons écrire que la valeur maximale de l'angle d'incidence $\dot{\nu}_e$

est $(\dot{\nu}_e)_{\max}$ telle que : $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sin(i_e)_{\max}$, d'où le résultat :

$$\sin \dot{\nu}_e < \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sin(\dot{\nu}_e)_{\max} \Leftrightarrow \dot{\nu}_e < \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}) = (\dot{\nu}_e)_{\max}$$

5- Par définition, on appelle l'Ouverture Numérique ON, la quantité $\sin(i_e)_{\max}$ tel que :

$ON = \sin(\dot{\nu}_e)_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. Par conséquent, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\sin^2(\dot{\nu}_e)_{\max} = n_1^2 - n_2^2 = 2.n_1^2 \underbrace{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2.n_1^2} \right)}_{\Delta} = 2.n_1^2 . \Delta ; \text{ d'où } \boxed{ON^2 = 2.n_1^2 . \Delta}$$

Application numérique : $ON^2 = 2.(1,5)^2 . 10^{-2} = 0,045$ donc $\boxed{ON = 0,2121}$

6- Les pertes par transmission X sont exprimées en dB.km⁻¹. On définit que :

$\chi_{dB} = 10.\log \frac{P_2}{P_1}$, avec P₁ est la puissance optique à l'entrée de la fibre et P₂ est la puissance

optique à la sortie de la fibre, c'est-à-dire au bout de un kilomètre de parcours. Il est à rappeler que log est le logarithme décimal, c'est-à-dire à base 10.

Vers 1970, l'atténuation était de 10 dB.km⁻¹. Par contre, actuellement, une atténuation de 0,005dB.km⁻¹ est courante. Dans les deux cas les pertes au bout d'un kilomètre sont comme suit :

$$\chi_{dB} = 10.\log \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow \frac{\chi_{dB}}{10} = \log \frac{P_2}{P_1}, \text{ d'où les pertes en \% au bout d'un kilomètre sont}$$

exprimées comme suit : $\exp_{10} \left(\frac{\chi_{dB}}{10} \right) = \frac{P_2}{P_1}$. Ce rapport nous renseigne sur la valeur de P₂ par

rapport à celle de P₁, d'où la perte en pourcentage du signal à la sortie de la fibre, au bout d'un kilomètre de parcours.

Application numérique :

$$\chi_{dB} = -10dB.km^{-1}, \frac{P_2}{P_1} = 10^{-1} \text{ et } \chi_{dB} = -0,005dB.km^{-1}, \frac{P_2}{P_1} = 10^{-0,0005} = 0,9984$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{dB} = -10dB.km^{-1}, \frac{P_2}{P_1} = 10^{-1} \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{100}{100} . 10^{-1} . P_1 = 10\% P_1} \\ \text{et} \\ \chi_{dB} = -0,005dB.km^{-1}, \frac{P_2}{P_1} = 10^{-0,0005} = 0,9984 \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{100}{100} . 0,9984 . P_1 = 99,9\% P_1} \end{array} \right.$$

Nous pouvons écrire alors que dans le premier cas la puissance P₂ est égale à 10% de la puissance P₁. C'est-à-dire en 1970 il y avait une perte de 90% au bout d'un kilomètre de fibre ; en revanche dans le second cas la puissance P₂ est égale à 99,9 de la puissance P₁. De nos jours, les pertes sont alors uniquement de l'ordre de 0,1% au bout d'un kilomètre de fibre.

Problème 2 : Minimum de déviation d'un prisme [12 points]

Un prisme est un milieu transparent d'indice n limité par deux dioptries plans faisant un angle $\mathcal{A}$. Un rayon lumineux issu d'une source de lumière située dans l'air, arrive sur le prisme sous un angle d'incidence i , au point I de la première face. Il subit alors deux réfractions successives aux points I et J, et il émerge du prisme sous un angle d'émergence i' . Il est alors dévié d'un angle $\mathcal{D}$ par rapport à la direction incidente, comme l'illustre la figure ci-dessous.

1. Etablir les équations du prisme quand le rayon lumineux se propage dans une section principale de ce prisme. [1 point]

2. L'étude expérimentale simple montre que lorsque l'on fait varier l'angle d'incidence i , la déviation $\mathcal{D}$ passe par un minimum pour une valeur particulière i_m de l'angle d'incidence i .

a. En différentiant les équations du prisme de la question n°1, démontrer que pour ce minimum de déviation, on a les relations suivantes :

$i_m = i = i'$, la déviation minimale $\mathcal{D}_m = 2.i_m - \mathcal{A}$, et $\sin i_m = n \cdot \sin \frac{\mathcal{A}}{2}$ [4 points]

b. En déduire l'expression de l'indice de réfraction n de ce prisme. [1 point]

d. Calculer, à 10^{-3} près, la valeur de l'indice de réfraction n pour un prisme d'angle $\mathcal{A} = 60^\circ$ et $\mathcal{D}_m = 38^\circ$ [1 point]

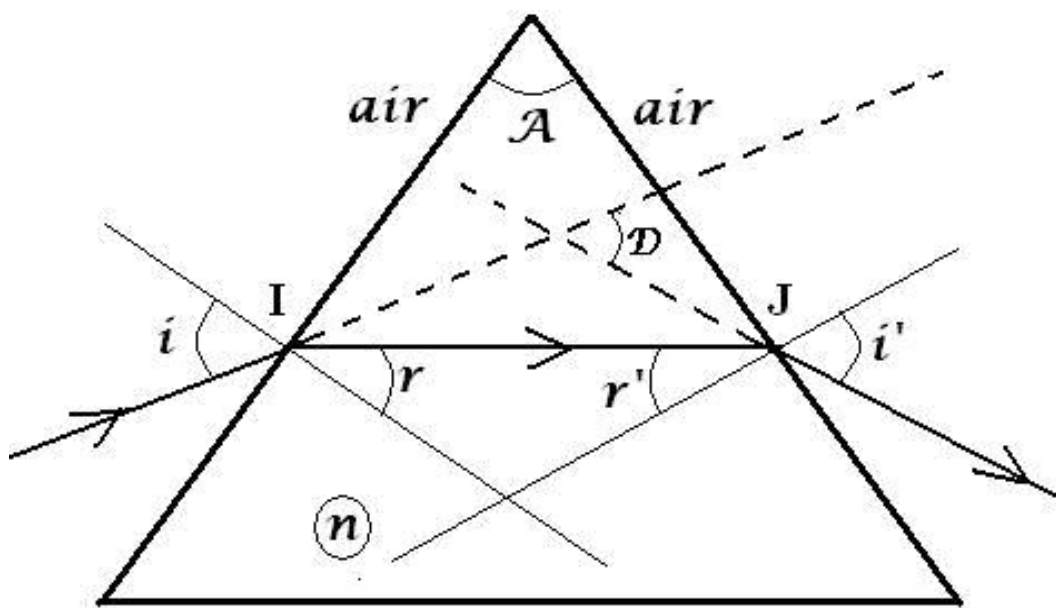
3. Le verre est un matériau dispersif. Son indice de réfraction n est donc fonction de la longueur d'onde λ de la lumière considérée. En utilisant les équations du prisme de la question n°1, avec les deux angles d'incidence i et du sommet $\mathcal{A}$ du prisme supposés constants, démontrer que la relation de la variation de la déviation $\mathcal{D}$ en fonction de

l'indice de réfraction n est donnée par l'expression suivante: $d\mathcal{D} = \frac{\sin \mathcal{A}}{\sin i' \cdot \cos r} \cdot dn$ [2 points]

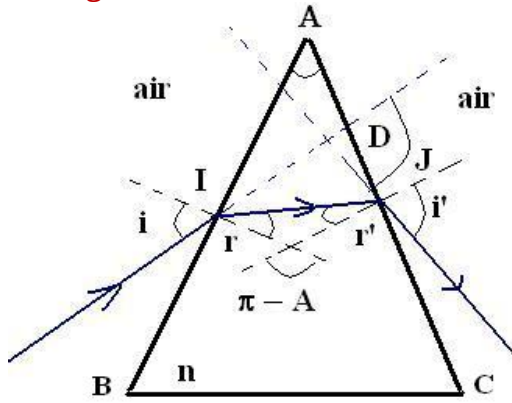
4. La dispersion est caractérisée par le facteur $\delta = \frac{d\mathcal{D}}{d\lambda} = \frac{d\mathcal{D}}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$.

a) Calculer la dispersion d'un prisme qui satisfait à la formule de Cauchy : $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, où A et B sont deux constantes. [2 points]

b) En déduire la radiation du spectre visible la plus déviée par ce prisme. Justifier [1 point]



Corrigé :



Soit un rayon lumineux SI qui tombe sur un prisme ABC, d'angle A et d'indice de réfraction n , sous un angle d'incidence $\hat{i}$ pour subir une réfraction au point I, avec un angle de réfraction r plus petit que $\hat{i}$, le rayon réfracté se rapproche de la normale car la lumière passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent. Comme le rayon lumineux SI passe d'un milieu moins réfringent, air, à un milieu plus réfringent d'indice $n > 1$, alors SI se réfracte en se rapprochant de la normale. Le rayon réfracté fait

un angle de réfraction r avec la normale au point I tel que :

$$\underbrace{n_{\text{air}}}_1 \cdot \sin i = \underbrace{n_{\text{prisme}}}_n \cdot \sin r \quad (1)$$

Ce rayon réfracté rencontre l'autre face du prisme au point J en faisant un angle r' avec la normale de la face AC du prisme. Au point J, cette réfraction est décrite par la relation suivante : $\underbrace{n_{\text{prisme}}}_n \cdot \sin r' = \underbrace{n_{\text{air}}}_1 \cdot \sin i' \quad (2)$.

Par ailleurs, il est à remarquer que dans le triangle IJA on peut traduire la relation suivante : $A = r + r' \quad (3)$.

Il est à remarquer que le rayon lumineux incident SI a subi une déviation globale D après la traversée du prisme. Cette déviation s'exprime comme suit :

$$D = \underbrace{D_1}_I + \underbrace{D_2}_J = (\hat{i} - r) + (\hat{i}' - r') = \hat{i} + \hat{i}' - A, \text{ d'où } D = \hat{i} + \hat{i}' - A \quad (4)$$

Par conséquent les équations du prisme se présentent comme suit :

$$\sin \hat{i} = n \cdot \sin r \quad (1)$$

$$n \cdot \sin r' = \sin \hat{i}' \quad (2)$$

$$A = r + r' \quad (3)$$

$$D = \hat{i} + \hat{i}' - A \quad (4)$$

Où $\hat{i}$ est l'angle d'incidence du rayon incident qui arrive sur le prisme d'indice de réfraction n et d'angle au sommet est égale à A , r est l'angle de réfraction au premier contact de ce rayon incident avec le prisme, r' est l'angle d'incidence du rayon lumineux au second point de contact avec le prisme, et $\hat{i}'$ est l'angle d'émergence du rayon lumineux du prisme. Cette émergence suppose que l'angle r' est inférieur à l'angle de la réfraction limite Λ du couple air et prisme.

2- Nous cherchons à étudier la variation de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i . Une différenciation des 4 formules du prisme ci-dessus, en supposant que l'angle A du prisme est constant ainsi que l'indice de réfraction n , nous donne les relations

$$\cos i \, di = n \cdot \cos r \, dr \quad (1)$$

$$\cos i' \, di' = n \cdot \cos r' \, dr' \quad (2)$$

suivantes :

$$dr + dr' = 0 \quad (3)$$

$$dD = di + di' \quad (4)$$

Le rapport des équations n° 3 et 4 nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$(3) \cdot \frac{d\dot{u}'}{d\dot{u}} \cdot \frac{\cos \dot{u}'}{\cos \dot{u}} = \frac{\cos r'}{\cos r} \cdot \frac{dr'}{dr}, \text{ d'où l'équation n° 1 s'écrit comme suit :}$$

$$(4) \frac{dD}{d\dot{u}} = 1 + \frac{d\dot{u}'}{d\dot{u}} = 1 + \frac{\cos \dot{u}}{\cos \dot{u}'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r} \cdot \frac{dr'}{dr}, \text{ or d'après l'équation n° 3 on a } dr = -dr'$$

Par la suite l'équation précédente prend la forme suivante : $\frac{dD}{d\dot{u}} = 1 - \frac{\cos \dot{u}}{\cos \dot{u}'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r}$

Pour déterminer les extremums de la déviation D en fonction de $\dot{u}$ on doit chercher les zéros de la dérivée de D par rapport à l'angle d'incidence $\dot{u}$ d'où :

$$\frac{dD}{d\dot{u}} = 1 - \frac{\cos \dot{u}}{\cos \dot{u}'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r} = 0. \text{ Ce qui permet d'écrire l'égalité suivante :}$$

$\cos \dot{u}' \cdot \cos r = \cos \dot{u} \cdot \cos r'$. Élevons au carré les deux membres de cette égalité, on aura alors l'égalité suivante : $\cos^2 \dot{u}' \cdot \cos^2 r = \cos^2 \dot{u} \cdot \cos^2 r'$, en remplaçant les cosinus par des sinus, on aura :

$$\left(1 - \underbrace{\sin^2 r}_{\frac{\sin^2 \dot{u}}{n^2}}\right) \cdot (1 - \sin^2 \dot{u}') = (1 - \sin^2 \dot{u}) \cdot \left(1 - \underbrace{\sin^2 r'}_{\frac{\sin^2 \dot{u}'}{n^2}}\right)$$

Après multiplication membre à membre, on obtient :

$$1 - \sin^2 \dot{u}' - \frac{\sin^2 \dot{u}}{n^2} + \frac{\sin^2 \dot{u} \cdot \sin^2 \dot{u}'}{n^2} = 1 - \sin^2 \dot{u} - \frac{\sin^2 \dot{u}'}{n^2} + \frac{\sin^2 \dot{u} \cdot \sin^2 \dot{u}'}{n^2}$$

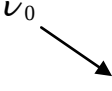
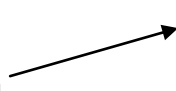
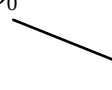
Après simplification, on obtient la relation suivante :

$$(\sin^2 \dot{u} - \sin^2 \dot{u}') \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

Le second terme ne peut pas être nul car n est supérieur à 1, donc le premier terme est nul :

$$\boxed{(\sin^2 \dot{u} - \sin^2 \dot{u}') = 0}. \text{ Cette équation présente deux solutions : } \boxed{\dot{u} = \pm \dot{u}'}$$

Il est à remarquer que $\dot{u} = -\dot{u}'$ n'a aucun sens physique, elle va entraîner que $r = -r'$ ce qui donne une valeur nulle de l'angle A du prisme : $A = 0$. Donc, cette solution est à écarter. Par conséquent la seule racine valable est $\dot{u} = \dot{u}' = \dot{u}_m$. L'extremum correspondant de la déviation D est un minimum car la dérivée, d'abord négative pour $\dot{u} < \dot{u}_m$, devient positive pour $\dot{u} > \dot{u}_m$.

$\dot{u}$	//////	$\dot{u}_0$  $\dot{u}_m$  $\pi/2$
$\frac{dD}{d\dot{u}}$	////// //////	-infini - 0 + 1
D	////// //////	D_0  D_m  D_0

Avec $\boxed{D_m = 2 \cdot \dot{u}_m - A}$

3- Il est à rappeler qu'au minimum de déviation, on a les deux angles r et r' sont égaux tel que :

$r = r' = r_m = \frac{A}{2}$ et $i = i' = i_m = \frac{A + D_m}{2}$, et l'indice de réfraction n du prisme

s'exprime comme suit :

$$n = \frac{\sin\left[\frac{A + D_m}{2}\right]}{\sin\left[\frac{A}{2}\right]}$$

4- Application numérique : $A = 60^\circ$, $D_m = 25^\circ$, $n = \frac{\sin\left(\frac{85}{2}\right)}{\sin 30} = 2 \cdot \sin 42,5^\circ = 1,35$

Alors le prisme doit être fabriqué du matériau d'indice de réfraction $n = 1,35$.

5- Cette fois ci, on fixe l'angle d'incidence i et l'angle du prisme A , et on fait varier les paramètres l'indice de réfraction n du prisme, les angles r , r' et l'angle d'émergence i' , d'où les relations du prisme après une différenciation :

$$0 = n \cdot \cos r \cdot dr + dn \cdot \sin r \quad (1)$$

$$\cos i' \cdot di' = n \cdot \cos r' \cdot dr' + dn \cdot \sin r' \quad (2)$$

$$dr + dr' = 0 \quad (3)$$

$$dD = di' \quad (4)$$

$$n \cdot \cos r \cdot dr = -dn \cdot \sin r \quad (1)$$

$$di' = n \cdot \frac{\cos r'}{\cos i'} \cdot dr' + \frac{\sin r'}{\cos i'} \cdot dn \quad (2)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$dr = -dr' \quad (3)$$

$$dD = di' = -\frac{n \cdot \cos r'}{\cos i'} \cdot \underbrace{dr}_{\frac{dn \cdot \sin r}{n \cdot \cos r}} + \frac{\sin r'}{\cos i'} \cdot dn \quad (4)$$

A partir de l'équation n°4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} dD &= dn \cdot \left[\frac{\sin r'}{\cos i'} + \frac{n \cdot \cos r' \cdot \sin r}{\cos i' \cdot n \cdot \cos r} \right] \\ &= \frac{dn}{\cos i'} \cdot \left[\sin r' + \frac{\cos r'}{\cos r} \cdot \sin r \right] \\ &= \frac{dn}{\cos i' \cdot \cos r} \cdot \underbrace{\left[\sin r' \cdot \cos r + \cos r' \cdot \sin r \right]}_{\sin(r+r') = \sin A} \end{aligned}$$

D'où :

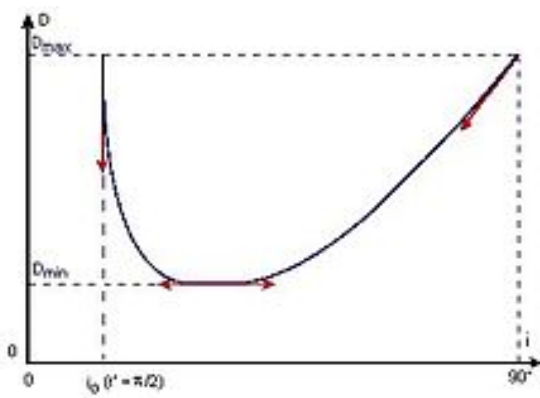
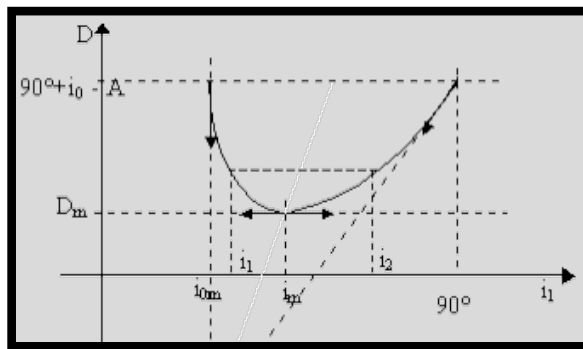
$$dD = \frac{dn}{\cos i' \cdot \cos r} \cdot \sin A$$

6- Par définition on a : $\delta = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$, avec l'indice n de réfraction du prisme vérifie

la formule de Cauchy pour un milieu dispersif : $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, d'où la dérivée de n par

rapport à la longueur d'onde λ est : $\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2 \cdot B}{\lambda^3}$, et $\delta = \frac{\sin A}{\cos i' \cdot \cos r} \cdot \frac{-2 \cdot B}{\lambda^3}$

Conclusion : si λ augmente alors δ diminue. Donc le rouge est moins dévié que le violet.



.../...