

ÉTUDE DES SYSTÈMES OPTIQUES SIMPLES

1. Introduction

Pour des raisons techniques évidentes, les miroirs et dioptries plans et sphériques constituent les éléments de base des instruments optiques. Nous allons consacrer ce chapitre à l'étude de ces systèmes optiques simples.

2. Miroir plan

2.1. Définition

Ce sont des surfaces planes capables de réfléchir la quasi totalité de la lumière incidente. De telles surfaces sont obtenues par dépôt d'une couche métallique (aluminium, argent) sur un support en verre ou en plastique.

2.2. Stigmatisme du miroir plan

Soit un point objet A ; son image est le lieu des points A' où se rencontrent les rayons provenant de A, après réflexion sur le miroir plan (*Figure II-1 ci-dessous*).

$$\overline{HA} = -\overline{HA'} \quad (\text{Formule de conjugaison d'un miroir plan})$$

On remarque facilement que le miroir plan donne de tout point objet une image rigoureusement stigmatique, symétrique du point objet par rapport au plan du miroir.

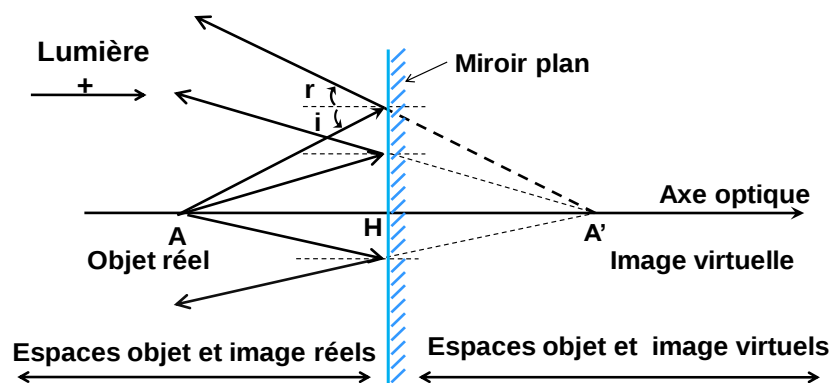


Figure II-1

2.3. Translation d'un miroir plan

Lorsqu'on translate un miroir plan d'une quantité d , l'image d'un objet se déplace dans le même sens d'une quantité $2d$ (**Figure II-2**).

2.4. Rotation d'un miroir plan

Lorsqu'on tourne un miroir plan d'un angle α , l'image d'un objet tourne dans le même sens d'un angle 2α (**Figure II-3**).

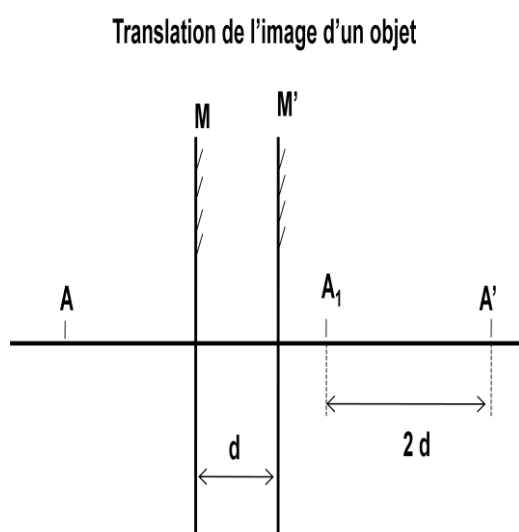


Figure II-2

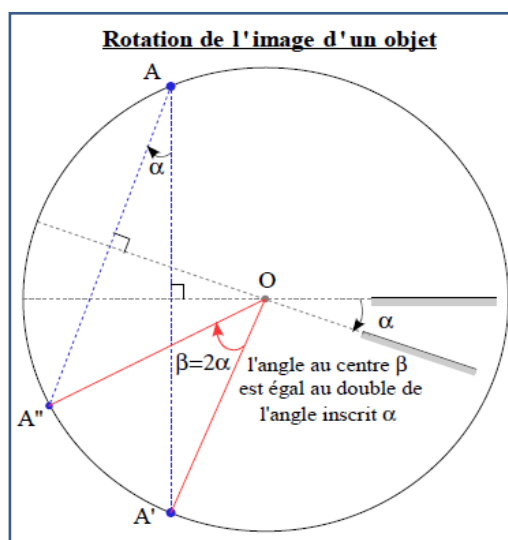


Figure II-3

3. Dioptré plan

3.1. Définition

C'est l'ensemble de deux milieux inégalement réfringents séparés par une surface plane.

3.2. Stigmatisme du dioptré plan

La position de l'image A' d'un objet ponctuel A (**Figure II-4**) est donnée par la relation :

$$\overline{HA'} = \overline{HA} \frac{\tan i}{\tan r}$$

La position de l'image étant fonction de l'angle d'incidence i sur le dioptré plan, il n'y a pas de stigmatisme rigoureux en général (**Figure II-5**).

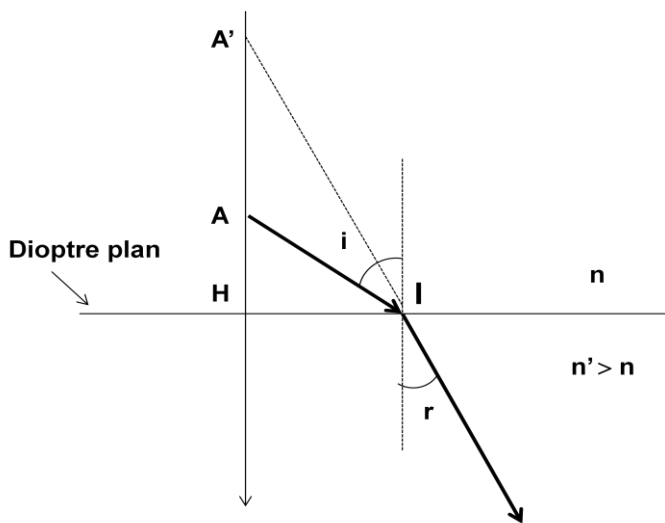


Figure II-4

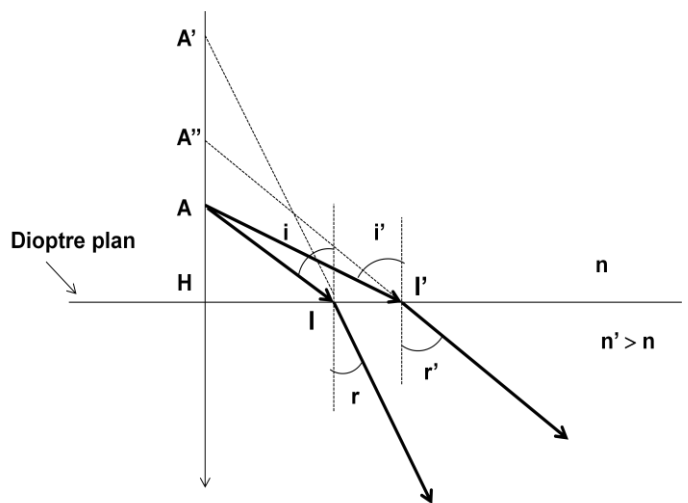


Figure II-5

3.3. Stigmatisme approché du dioptre plan

Dans le cas des rayons par axiaux (rayons faiblement inclinés par rapport à la normale au dioptre) l'angle i est faible ; il en est de même pour i' . La relation précédente s'écrit alors :

$$\frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{HA'}}$$

Cette formule, reliant la position de l'image à celle de l'objet, est appelée *formule de conjugaison* du dioptre plan.

Remarques

- A et son image A' sont toujours situés sur la même normale au dioptre
- A et son image A' sont toujours situés du même côté du dioptre
- A et son image A' sont toujours de nature différente: si l'un est réel, l'autre est virtuel et réciproquement
- Si $n > n'$, A est toujours plus éloigné de la surface du dioptre que A'; inversement si $n < n'$, A est toujours plus proche de cette surface que A'.

3.4. Image d'un objet étendu

Dans les conditions de l'approximation de Gauss (objet plan, peu étendu, perpendiculaire à l'axe, n'envoyant que des rayons par axiaux), l'image A'B' d'un objet plan AB est plane de même dimension mais de nature opposée.

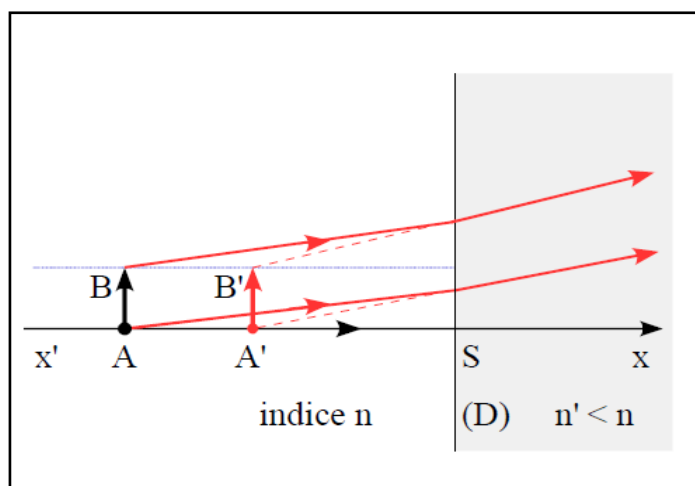


Figure II-6

4. Lame à faces parallèles

C'est un milieu homogène limité par deux surfaces planes parallèles. C'est donc l'association de deux dioptries plans. Le stigmatisme approché est réalisé dans les conditions de Gauss. La position de l'image A'' d'un objet ponctuel est donnée par la relation :

$$AA'' = e \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right), \text{ où } e \text{ est l'épaisseur de la lame.}$$

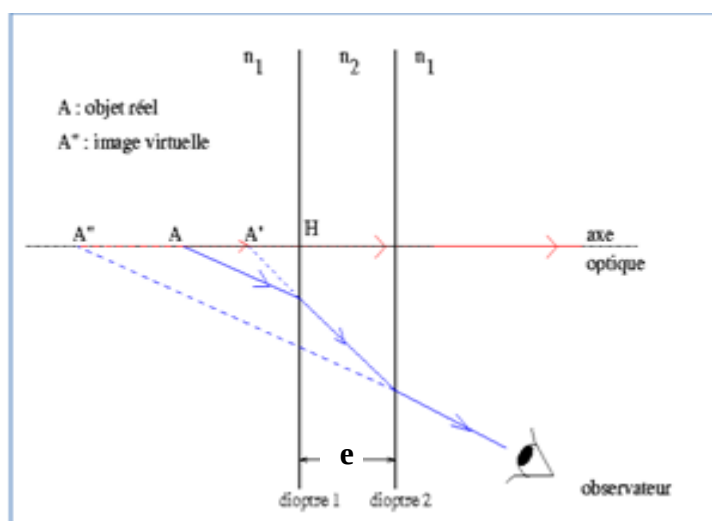


Figure II-7

5. Prisme

5.1. Définition

Le prisme est l'association de deux dioptries plans non parallèles limitant un milieu transparent et homogène d'indice n . L'intersection des dioptries plans constitue l'arrête du prisme et la face opposée à l'arrête est appelée base du prisme.

5.2. Marche d'un rayon lumineux

Considérons un prisme d'indice n plongé dans l'air. La marche d'un rayon lumineux monochromatique à travers le prisme est indiquée sur le schéma de la figure suivante.

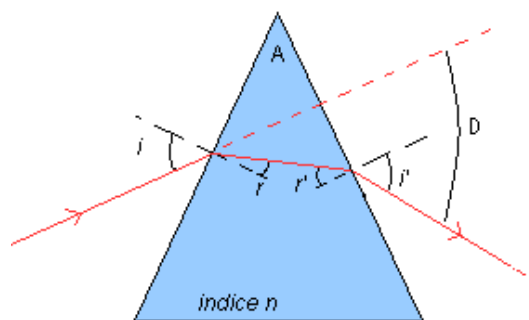


Figure II-8

On appelle *formules du prisme* les quatre relations suivantes :

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (2)$$

$$A = r + r' \quad (3)$$

$$D = i + i' - A \quad (4)$$

5.3. Conditions d'émergence d'un rayon

L'indice du prisme est $n > 1$ donc il existe toujours un rayon réfracté à l'intérieur du prisme quel que soit l'angle d'incidence i : Tout rayon incident pénètre donc dans le prisme.

Par contre sur la deuxième face pour que le rayon émerge du prisme il faut que l'angle r' soit inférieur à l'angle limite l .

$$|r'| \leq \left(l = \arcsin \frac{1}{n} \right)$$

Pour que l'émergence soit possible, deux conditions doivent être satisfaites (**Figure II-9 (a) et (b)**):

- L'une est imposée à l'angle au sommet du prisme : $A \leq 2l$
- L'autre à l'angle d'incidence i : $i_0 < i < 90^\circ$ avec $\sin i_0 = n \sin (A - l)$

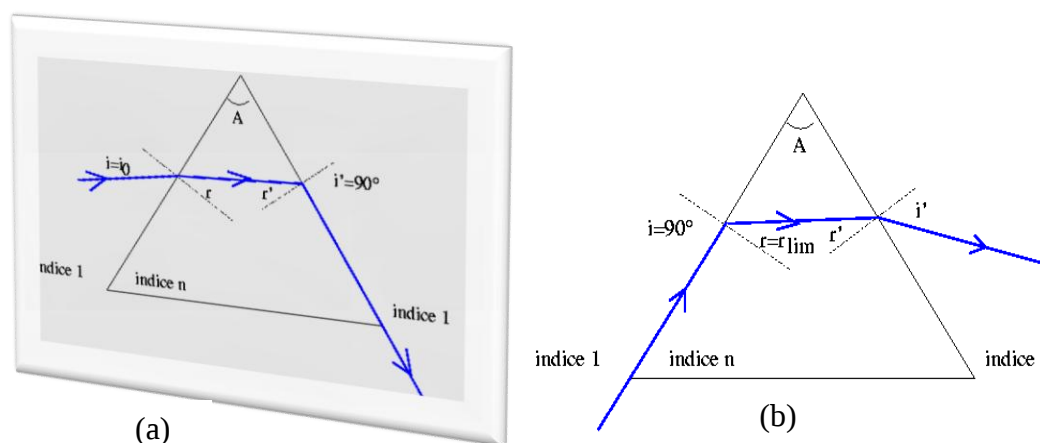


Figure II-9

5.4. Étude de la déviation

5.4.1 Étude de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

L'étude de la variation de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i sur le prisme (**Figure II.10 - a**) montre que celle-ci passe par un minimum D_m correspondant à un angle d'incidence $i = i_m = i'$.

Au minimum de déviation le tracé du rayon lumineux est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle A du prisme (**Figure II.10 - b**).

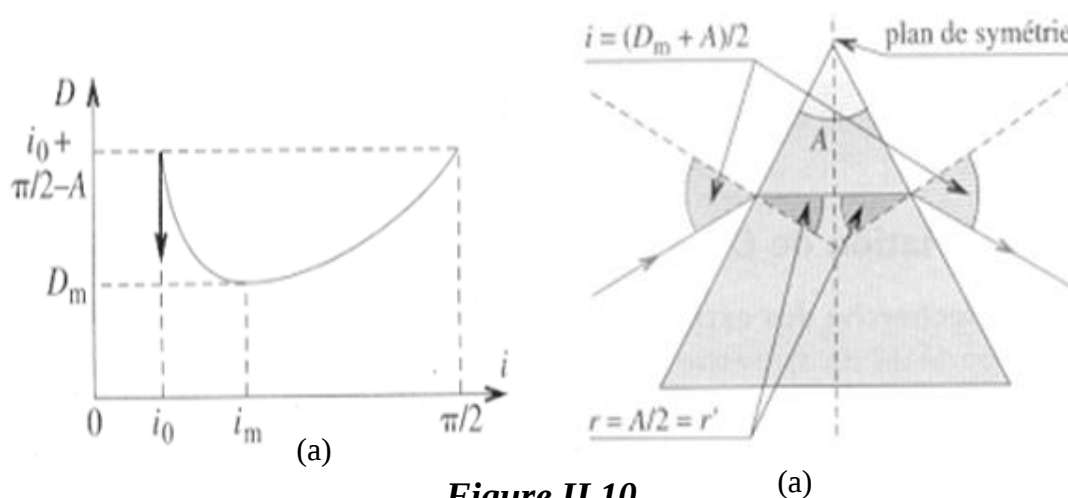


Figure II.10

L'indice du prisme s'écrit alors :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Cette relation montre que l'on peut déterminer expérimentalement n , pour une radiation donnée, par la mesure des angles A et D_m .

5.4.2 Étude de la déviation en fonction de l'indice n

On montre que la déviation est une fonction croissante de l'indice. Pour mettre en évidence expérimentalement ce phénomène, éclairons un prisme par un faisceau parallèle de lumière poly chromatique (lumière blanche par exemple) ; étant donné que l'indice de réfraction du prisme est une fonction de la longueur d'onde λ les différentes radiations ne subissent pas la même déviation. On observe à la sortie plusieurs faisceaux colorés (spectre de l'arc en ciel). On dit qu'il y a dispersion de la lumière par le prisme.

6. Dioptre sphérique

6.1. Définition

C'est l'ensemble de deux milieux inégalement réfringents séparés par une surface sphérique de centre C , de sommet S et de rayon $R = \overline{SC}$, S et C sont situés sur l'axe principal, les autres axes passant par C sont dits secondaires.

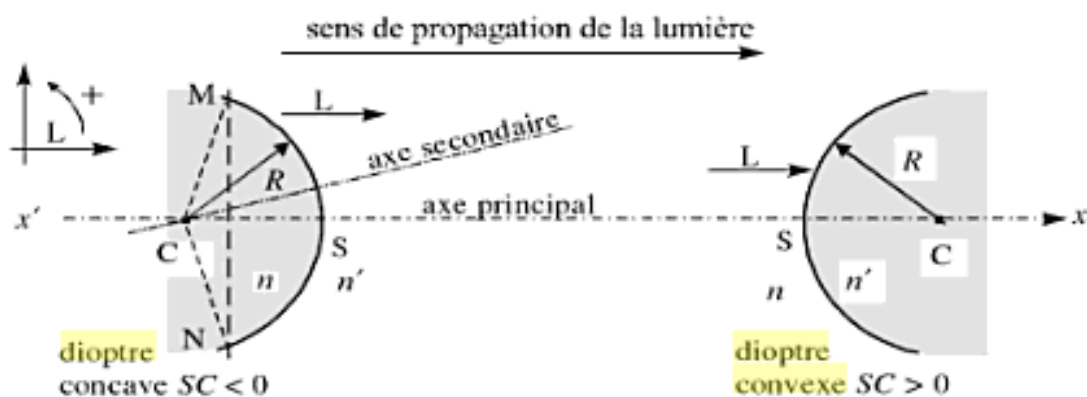


Figure II-11

6.2. Invariant fondamental du dioptre sphérique

Par des considérations géométriques simples, on montre que la relation donnant la position d'un objet ponctuel A et celle de son image A' à travers le dioptre sphérique est donnée par la relation suivante :

$$n \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n' \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}. \quad (5)$$

Cette équation est appelée invariant fondamental du dioptre sphérique.

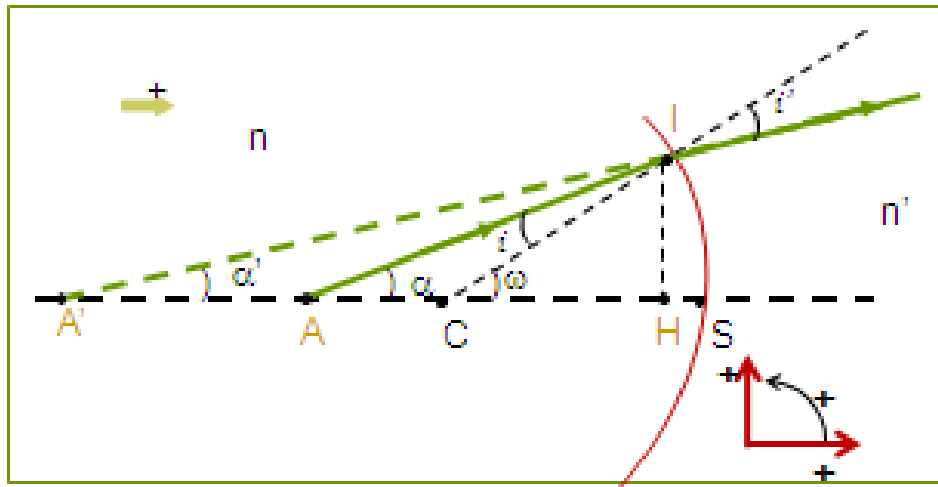


Figure II-12

6.3 Stigmatisme du dioptre sphérique

Le stigmatisme rigoureux n'est réalisé que pour des points particuliers (points de la surface du dioptre, centre du dioptre et pour un couple de points appelés points de Weierstrass ou points de Young). Ainsi, le dioptre sphérique est souvent utilisé dans les conditions du stigmatisme approché qui est réalisé dans les cas suivants :

i. Points voisins du centre C ;

ii. Point courant I voisin de S. Dans ce cas la relation (5) s'écrit : $n \frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n' \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$

iii. Approximation de Gauss (dioptre de faible ouverture, rayons par axiaux, objet plan de faible étendue placé perpendiculairement à l'axe).

6.4. Etude du dioptré sphérique dans l'approximation de Gauss

6.4.1. Formules de conjugaison

Le point de départ est toujours l'invariant fondamental. Dans l'approximation de Gauss, le point courant I est assimilable au sommet S du dioptré.

6.4.1.1. Origine au sommet

On montre facilement que :
$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}} \quad (6)$$

Cette formule est appelée formule de conjugaison du dioptré sphérique avec origine au sommet.

Lorsque l'objet est à l'infini, son image est située en un point F' appelé *foyer image* du dioptré. Si l'image est rejetée à l'infini, l'objet est situé en un point F dit *foyer objet* du dioptré.

En faisant tendre respectivement les quantités $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$ vers l'infini, on obtient la position de ces deux points particuliers :

$$\overline{SF} = \frac{n}{n - n'} \overline{SC} = f \text{ (distance focale objet)}$$

$$\overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n} \overline{SC} = f' \text{ (distance focale image)}$$

Remarque :
$$\frac{f}{f'} = - \frac{n}{n'} \quad ; \quad f + f' = \overline{SC}$$

- Les distances focales ont des signes opposés.
- Les foyers sont tous les deux réels ou tous les deux virtuels.
- Le milieu du segment [FF'] coïncide avec celui du segment [SC] ($\frac{f + f'}{2} = \frac{\overline{SC}}{2}$).
- Il n'y a jamais de foyer entre S et C.

On a : $\overline{SF} = \overline{SC} - \overline{SF'} = \overline{F'C} \quad ; \quad \overline{SF'} = \overline{SC} - \overline{SF} = \overline{FC}$

Ces relations permettent de placer un foyer quand on connaît l'autre.

6.4.2. Origine au centre

De la même manière on montre que : $\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$

C'est la formule de conjugaison du dioptré avec origine au centre. On vérifie facilement que : $\overline{CF'} = -\overline{SF}$; $\overline{CF} = -\overline{SF'}$

D'où l'on déduit que les segments [FF'] et [SC] ont le même centre. Cette propriété est très utile pour dépister d'éventuelles erreurs lors de la construction des trajets des rayons lumineux.

6.4.3. Origine aux foyers

En partant de la formule de conjugaison avec origine au sommet [équation (6)], il est aisé de vérifier que :

$$\overline{FA} \overline{F'A'} = \overline{SF} \overline{SF'} = f f'$$

Cette dernière relation est appelée formule de Newton. Elle sera d'une très grande utilité comme on va le voir par la suite.

6.5. Vergence d'un dioptré sphérique

La vergence ou convergence C d'un dioptré sphérique est donnée par la relation :

$$C = \frac{n'}{\overline{SF'}} = - \frac{n}{\overline{SF}}$$

Si $C > 0$, le dioptré est dit convergent. Il est divergent dans le cas contraire.

Remarque : Un dioptré est convergent si les foyers sont réels et son centre est situé dans le milieu le plus réfringent.

6.6. Points conjugués hors de l'axe

Soit B un objet situé hors de l'axe mais assez voisin pour n'envoyer que des rayons paraxiaux. La perpendiculaire à partir de B coupe l'axe en A. On montre que, dans les conditions de Gauss, l'image A'B' de l'objet AB se trouve sur un plan de front. Les plans objet et image sont conjugués (**Figure II-13**).

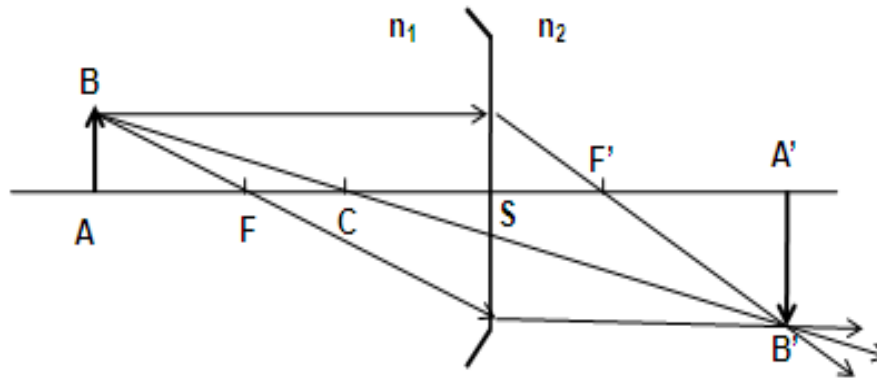


Figure II-13

La quantité $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est appelée *grandissement transversal*.

Toutes les formules de conjugaison et de grandissement d'un dioptre sphérique :

origine au	Formule de conjugaison	Grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
Sommet	$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$	$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$
Centre	$\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$	$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$
Foyers (Relation de Newton)	$\overline{FA} \overline{F'A'} = \overline{SF} \overline{SF'}$	$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$

6.7. Formule de Lagrange--Helmholtz

On montre que :

$$n \overline{AB} \alpha = n' \overline{A'B'} \alpha'$$

Cette relation est appelée formule de Lagrange--Helmholtz.

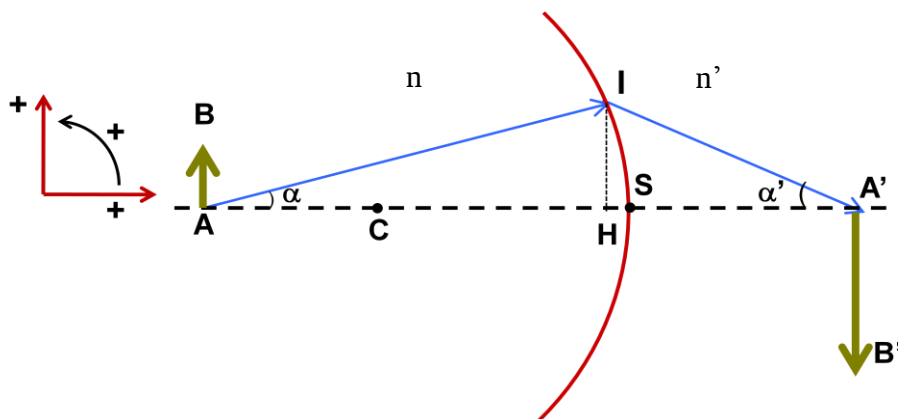


Figure II-14

En introduisant le grandissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ la dernière relation s'écrit :

$$\gamma G = \frac{n}{n'} . \quad (7)$$

6.8. Construction de l'émergent d'un incident quelconque

On appelle *plan focal objet* (respectivement *image*) le plan de front perpendiculaire à l'axe et passant par le foyer objet F (respectivement par le foyer image F').

Les points appartenant à de tels plans sont appelés *foyers secondaires*. Ils sont d'une grande utilité dans la construction géométrique des images (voir Annexe).

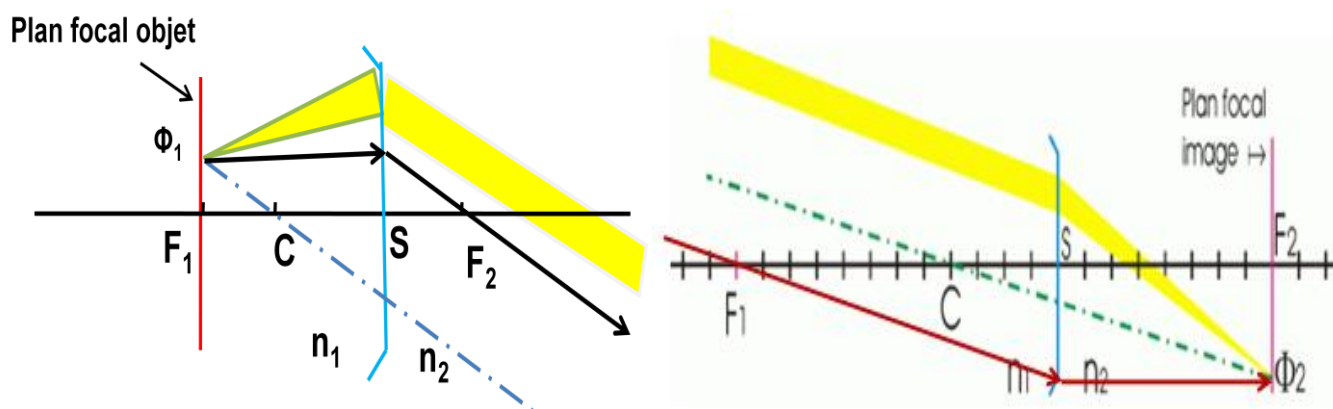


Figure II-15

7. Miroirs sphériques

7.1. Définition

Un miroir sphérique est une portion d'une sphère réfléchissante. L'axe principal CS rencontre le miroir au sommet S , C étant le centre de la sphère.

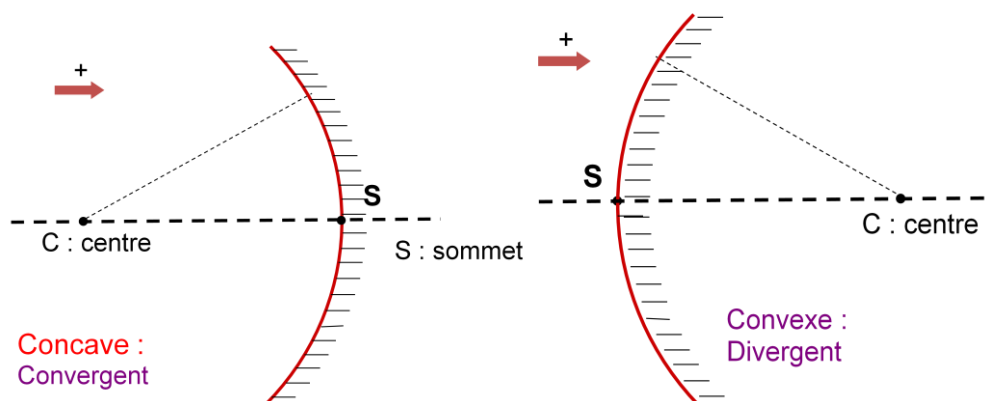


Figure II-16

7.2. Stigmatisme du miroir sphérique

Il y a stigmatisme rigoureux uniquement pour le centre et les points de la surface du miroir. Le stigmatisme approché est réalisé au voisinage du centre et pour tout couple de points dans les conditions de l'approximation de Gauss.

7.3. Plans conjugués

Dans les conditions de l'approximation de Gauss, l'image d'un élément de droite AB est une portion de droite A'B' (*Figure II-17*).

7.4. Formules du miroir sphérique dans les conditions du stigmatisme approché

7.4.1. Origine au sommet S

Par des considérations géométriques simples, on montre que (*Figure II.18*) :

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

Cette relation constitue la formule de conjugaison du miroir sphérique. Elle peut être retrouvée à partir de la formule de conjugaison du dioptre sphérique en posant $n_1 = -n_2$.

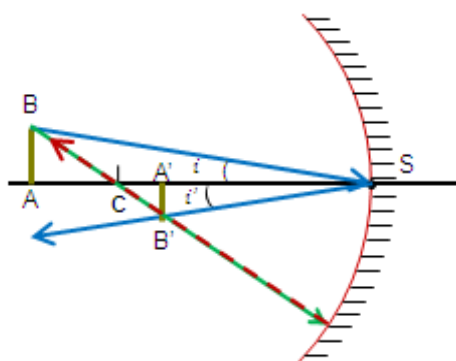


Figure II-17

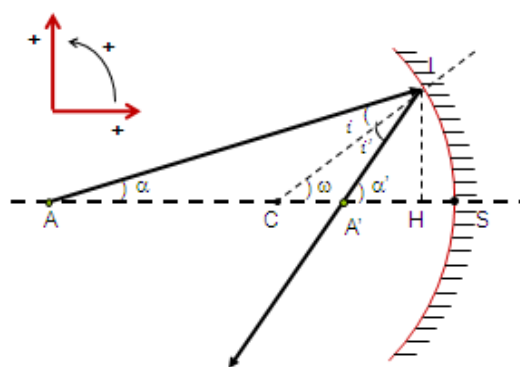


Figure II-18

Le grandissement transversal est donné par la relation : $\gamma = - \frac{SA'}{SA}$

Les foyers principaux F et F' sont confondus au milieu du segment $[SC]$. Ils sont donc de même nature : réels pour un miroir convergent et virtuels pour un miroir divergent.

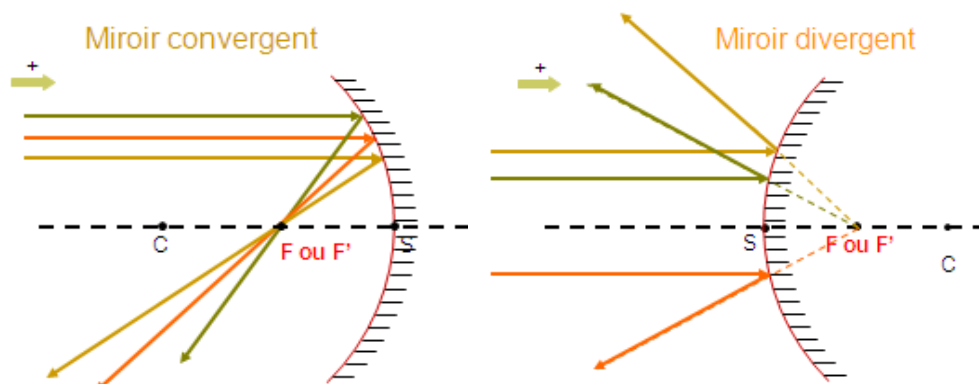


Figure II-19

Les foyers secondaires F_s' sont des points du plan focal (objet ou image) intersections des rayons réfléchis correspondants à un faisceau incident de rayons parallèles entre eux (non parallèles à l'axe optique).

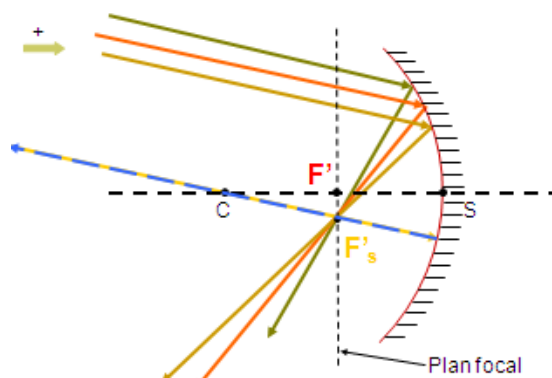


Figure II-20

7.4.2. Origine au centre

Les formules de conjugaison de position et de grandissement s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad , \quad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} .$$

7.4.3. Origine aux foyers

On a dans ce cas :

$$\overline{FA} \overline{F'A'} = f^2 = f'^2 \quad ; \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$

Ces dernières relations constituent les formules de Newton pour le miroir sphérique.

Toutes les formules de conjugaison et de grandissement d'un miroir sphérique :

origine au	Formule de conjugaison	Grandissement $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$
Sommet	$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$	$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$
Centre	$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS}$	$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$
Foyers (Relation de Newton)	$\overline{FA} \overline{F'A'} = f^2 = f'^2$	$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$

7.4.4. Formule de Lagrange--Helmholtz

En écrivant $n_1 = -n_2$ dans la formule (7), relative au dioptré sphérique, on a :

$$\gamma G = -1.$$

Exercices

Exercice 1 : Déplacement et rotation d'un miroir plan

On considère un miroir plan M qui donne d'un objet ponctuel A une image ponctuelle A'. De combien se déplace l'image et dans quel sens lorsque l'on translate le miroir d'une quantité a ? De combien tourne l'image et dans quel sens lorsque l'on tourne le miroir d'un angle α ?

Solution :

Translation du miroir plan

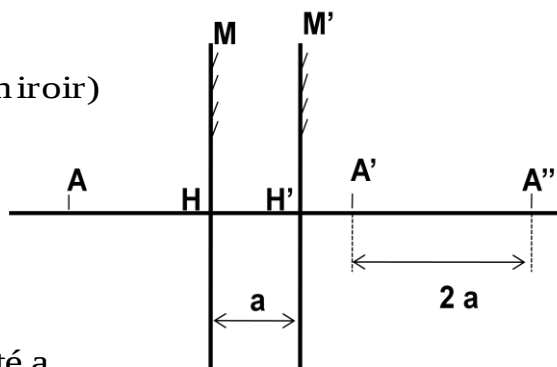
A $\xrightarrow{\text{miroir plan}}$ A' (position HM du miroir)

$$\overline{HA} = -\overline{HA'}$$

A $\xrightarrow{\text{miroir plan}}$ A'' (position H'M' du miroir)

$$\overline{H'A} = -\overline{H'A''}$$

$$\begin{aligned}\overline{A'A''} &= \overline{A'H} + \overline{HH'} + \overline{H'A''} \\ &= (\overline{HH'} + \overline{H'A}) + \overline{HH'} + \overline{H'A''} \\ &= 2\overline{HH'} = 2a\end{aligned}$$



Lorsque le miroir plan se déplacé d'une quantité a l'image A' se déplace dans le même sens de 2 a.

Rotation du miroir plan

A et A' sont conjugués pour la position (M) du miroir,

$\overline{HA} = -\overline{HA'}$, et (OAA') est un triangle isocèle.

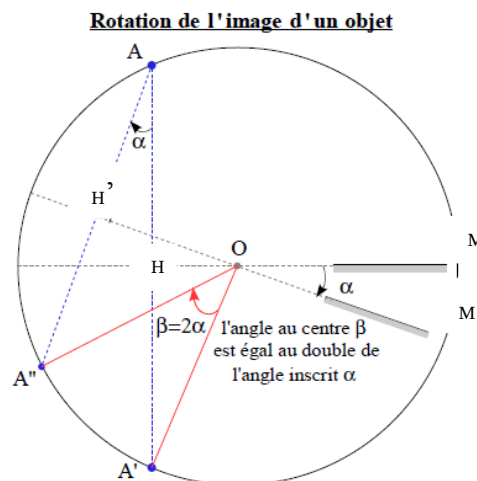
Alors : $OA = OA'$

A et A'' sont conjugués pour la position (M') du miroir,

$\overline{H'A} = -\overline{H'A''}$, et (OAA'') est un triangle isocèle.

Alors : $OA = OA''$

D'où $OA = OA' = OA''$ et A, A' et A'' sont sur un même cercle de centre O et de rayon OA. Or dans un cercle, l'angle au centre (β) vaut le double de l'angle au sommet (ou l'angle inscrit α) : $\beta = 2\alpha$



Lorsque le miroir tourne d'un angle α , l'image A' tourne dans le même sens d'un angle 2α

Exercice 2 : Vitre (lame à faces parallèles)

Soit une vitre en verre, d'indice n et d'épaisseur e , placée dans l'air considérée comme une lame à faces parallèles.

- 1- Montrer que la lumière n'est pas déviée par un passage à travers cette vitre.
- 2- Montrer qu'un rayon d'incidence i a subi à sa sortie un simple déplacement d'une distance d telle que : $d = \frac{\sin(i-r)}{\cos r} e$
- 3- Pour une vitre d'épaisseur $e = 1$ cm, que vaut le déplacement maximal entre le rayon incident et le rayon émergent final ?
- 4- Dans le cas des faibles angles (approximation de Gauss) que devient d ?
- 5- Y'a-t-il stigmatisme rigoureux pour un point A pris d'une distance finie en dehors de la lame ?
- 6- Dans les conditions du stigmatisme approché, montrer que la position de l'image A' d'un objet A à travers cette lame à faces parallèles est telle que $\overline{AA'} = e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Solution :

- 1- La loi de la réfraction sur les faces d'entrée et de sortie de la vitre donne :

$$\sin i = n \sin r \text{ et } n \sin r' = \sin i'$$

Les faces de la vitre sont parallèles : $r' = r$, donc $i' = i$ et la lumière n'est pas déviée (le rayon incident et le rayon émergent sont parallèles).

$$2- \text{ D'après le schéma : } IJ = \frac{e}{\cos r} \quad \text{et} \quad d = IJ \sin(i - r) = \frac{\sin(i-r)}{\cos r} e$$

- 3- Il se produit un déplacement d qui est maximal quand $i=90^\circ$ (incidence rasante) : $d_{\max} = e = 1$ cm.

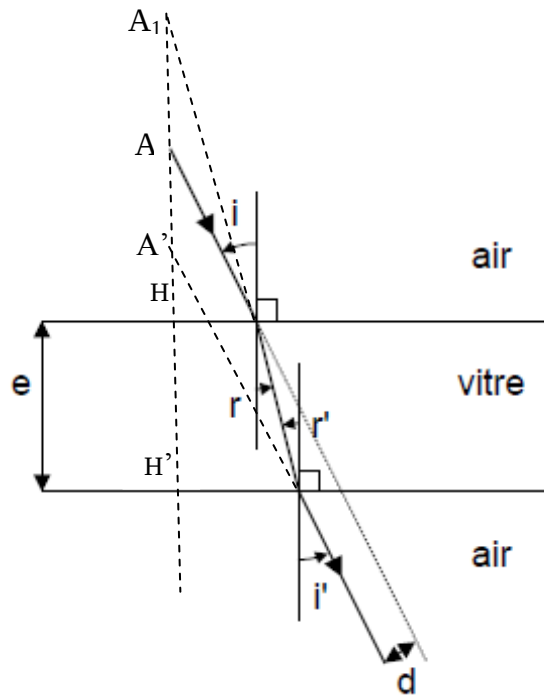
$$4- \text{ Quand les angles sont faibles : } i \approx nr, IJ \approx e \text{ et } d = (i - r)e = i \left(1 - \frac{1}{n}\right) e$$

- 5- Pour un dioptré plan le stigmatisme rigoureux n'est réalisé que pour les points de la surface du dioptré et les points à l'infini. La lame à faces parallèles étant l'association de deux dioptrés plans, n'est donc pas stigmatique pour un point A pris d'une distance finie en dehors de la lame. Le stigmatisme, s'il existe, sera seulement approché.

- 6- Dans les conditions du stigmatisme approché les relations de conjugaison des deux dioptrés plans formant cette lame sont :

$$\frac{1}{\overline{HA}} = \frac{n}{\overline{HA_1}} \text{ et } \frac{n}{\overline{H'A_1}} = \frac{1}{\overline{H'A'}}$$

$$\begin{aligned} \overline{AA'} &= \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = -\frac{\overline{HA_1}}{n} + \overline{HH'} + \frac{\overline{H'H}}{n} + \frac{\overline{HA_1}}{n} = \overline{HH'} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$



Exercice 3 : Dioptre sphérique

Un dioptre sphérique concave de centre C, de sommet S_2 et de rayon R sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2 . On donne $n_1=1.5$ et $n_2=1$

1. Ce dioptre est-il convergent ou divergent ? justifier votre réponse.
2. Déterminer les positions des foyers F et F' et déduire leur nature.
3. Construire géométriquement l'image d'un objet réel perpendiculaire à l'axe du dioptre dans les deux cas suivants : $\overline{S_2A} = -4R$ et $\overline{S_2A} = -2R$.
4. Calculer le grandissement linéaire pour chacun de ces cas.

Solution :

- 1- Ce dioptre sphérique est convergent son centre C se trouve dans le milieu le plus réfringent.
- 2- Equation de conjugaison du dioptre sphérique :

$$\frac{n_1}{S_2A} - \frac{n_2}{S_2A'} = \frac{n_1 - n_2}{S_2C}$$

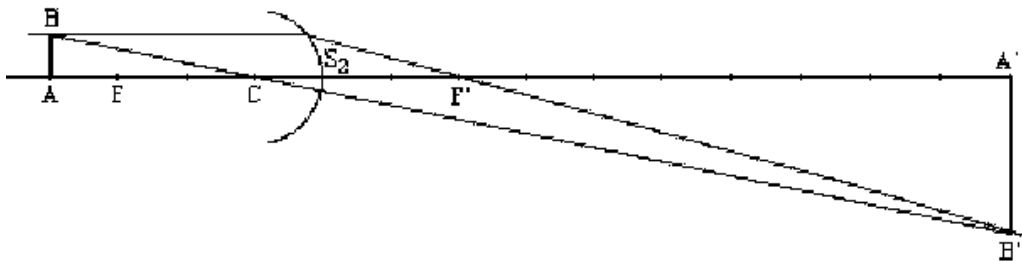
$$\overline{S_2F} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \cdot \overline{S_2C} = f = -3R$$

$$\overline{S_2F'} = \frac{-n_2}{n_1 - n_2} \cdot \overline{S_2C} = f' = 2R$$

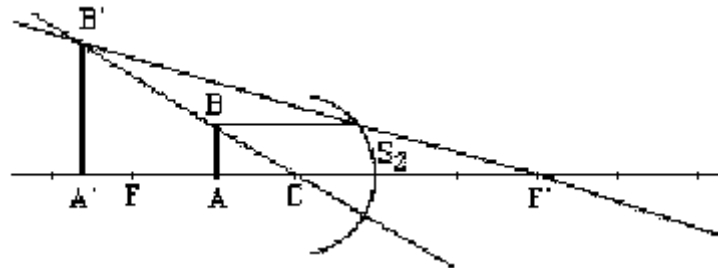
Les foyers F et F' sont réels.

3-

$$* \overline{S_2A} = -4R$$



$$* \overline{S_2A} = -2R$$



4- On a : $\frac{n_2}{S_2A'} - \frac{n_1}{S_2A} = \frac{n_2 - n_1}{S_2C} = \frac{n_2}{f'}$; donc $\overline{S_2A'} = \frac{n_2 f' \overline{S_2A}}{n_1 f' + n_2 \overline{S_2A}}$

Or :

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A}} = \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\overline{S_2A}}{f'}}$$

$$\overline{S_2A} = -4R \Rightarrow \gamma = -3$$

$$\overline{S_2A} = -2R \Rightarrow \gamma = 3$$

Exercice 4 : Miroir sphérique

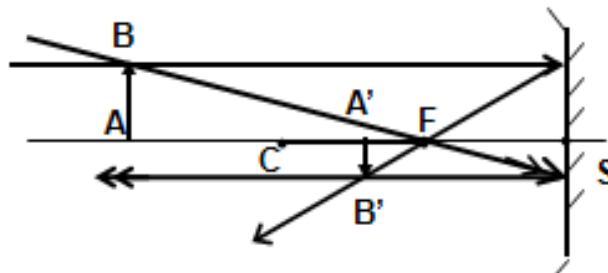
Soit un miroir concave de centre C et de rayon $R=6$ cm.

- 1- On place un objet réel à 9 cm de son sommet S. Construire son image et calculer sa position dans l'approximation de Gauss, en déduire sa nature (réelle ou virtuelle). Calculer le grandissement linéaire. S'agit-il d'une image droite ou renversée ?
- 2- On désire obtenir à l'aide du même miroir une image droite, deux fois plus grande que l'objet. Où faut-il placer l'objet ? En déduire la position et la nature de l'image. Peut-on atteindre ce résultat avec un miroir sphérique convexe ?

Solution :

Miroir concave donc $\overline{SC} = -R = -6$ cm

1- Objet réel $\Rightarrow \overline{SA} < 0, \overline{SA} = -9$ cm



$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \overline{SA'} = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}} = -4,5 \text{ cm}$$

$\overline{SA'} < 0 \Rightarrow$ l'image A'B' est réelle

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -0,5$$

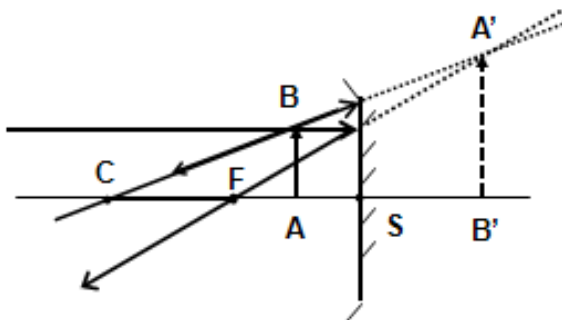
$\gamma < 0 \Rightarrow$ l'image est renversée

$|\gamma| < 1 \Rightarrow$ l'image est plus petite que l'objet

2- $\gamma = 2 \Rightarrow \overline{SA'} = -2 \overline{SA}$

En remplaçant cette expression dans (1) on trouve : $\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{4} = -1,5$ cm

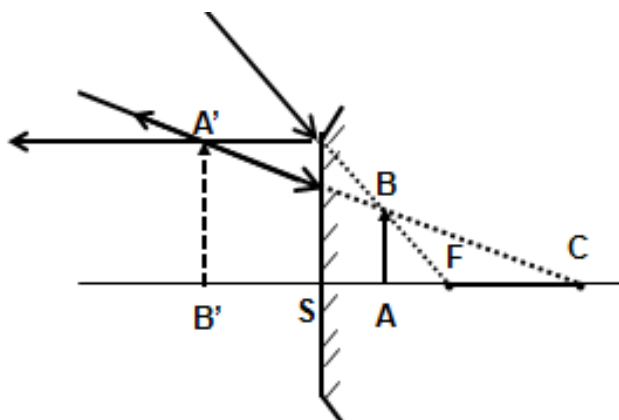
$\overline{SA'} = 3 \text{ cm} > 0 \Rightarrow$ l'image est virtuelle



Si le miroir est convexe $\overline{SC} > 0$

On aura $\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{4} = 1,5 \text{ cm} > 0$ et $\overline{SA'} = -2 \overline{SA} = -3 \text{ cm} < 0$

Donc l'objet est virtuel et l'image est réelle, on peut avoir une image droite deux fois plus grande que l'objet à condition d'avoir un objet virtuel et une image réelle.



Exercice 5 : Prisme

Un prisme est formé de deux dioptries plans, formant un dièdre d'angle A , qui séparent un milieu d'indice n d'un milieu extérieur d'indice n_0 . On supposera ici que le milieu extérieur est de l'air, d'indice $n_0 = 1$.

- 1) Un rayon incident situé dans un plan perpendiculaire à l'arête du prisme (plan de la feuille), est réfracté par le prisme. Dans quel plan se situe le rayon émergent ?
- 2) On note $\mathbf{D}$ l'angle de déviation du rayon ; $\mathbf{D}$ est l'angle entre le rayon transmis par le prisme et le rayon incident.

Déterminer l'angle au sommet $\mathbf{A}$ du prisme et l'angle de déviation $\mathbf{D}$ en fonction des angles orientés $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ (figure 1). On fera attention à bien respecter l'orientation des angles.

En déduire $\mathbf{D}$ en fonction de $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$ et $\mathbf{A}$.

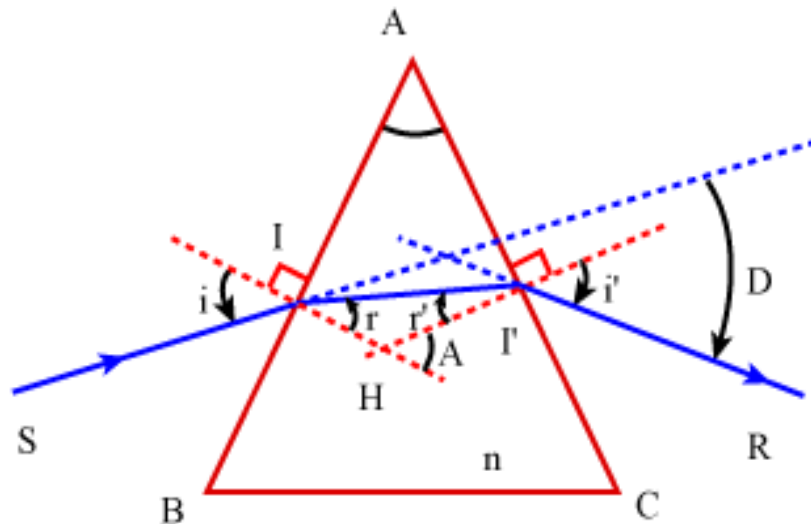


Figure 1

3) Dispersion du prisme

3.1- Montrer que, lorsque i varie, l'angle de déviation D présente un minimum. Quelle relation existe-t-il entre r et r' d'une part et i et i' d'autre part au minimum de déviation ?

En déduire qu'au minimum de déviation, le rayon transmis et le rayon incident sont symétriques par rapport à un plan que l'on précisera.

3.2- Déterminer l'indice du prisme en fonction de A et de la valeur D_m de D au minimum de déviation.

Solution :

1) Le plan d'incidence est perpendiculaire à l'arête du prisme. D'après la loi de Snell-Descartes le rayon émergent est dans le même plan perpendiculaire à l'arête.

2) Détermination de A et D .

- Détermination de A :

La somme des angles dans le triangle $(HI I')$ est π : $r + r' + (\pi - A) = \pi \Rightarrow \boxed{A = r + r'}$

- Détermination de D :

Le rayon est dévié d'un angle $(i - r)$ après la traversée du premier dioptre puis d'un angle $(i' - r')$ après la traversée du deuxième dioptre. Nous en déduisons :

$$D = (i - r) + (i' - r') = i + i' - (r + r') = i + i' - A \Rightarrow \boxed{D = i + i' - A}$$

3) Dispersion du prisme :

3.1) Les quatre formules d'un prisme sont :

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (2)$$

$$A = r + r' \quad (3)$$

$$D = i + i' - A \quad (4)$$

Différencions les formules du prisme en prenant soin de laisser constants A et n; il vient alors:

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$$

$$0 = dr + dr'$$

$$dD = di + di'$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

La déviation passe donc par un extremum lorsque :

$$\frac{dD}{di} = 0 \Rightarrow \cos i \cdot \cos r' = \cos r \cdot \cos i'$$

Elevons l'expression au carré et introduisons les sinus :

$$(1 - n^2 \sin^2 r)(1 - \sin^2 r') = (1 - n^2 \sin^2 r')(1 - \sin^2 r)$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 r' - n^2 \sin^2 r + n^2 \sin^2 r \cdot \sin^2 r' - 1 + \sin^2 r + n^2 \sin^2 r' - n^2 \sin^2 r' \cdot \sin^2 r = 0$$

$$\Rightarrow (1 - n^2)(\sin^2 r - \sin^2 r') = 0.$$

Avec $n > 1$ L'extremum est atteint lorsque $r = r'$ ou $r = -r'$.

La solution $r = -r'$ n'est pas acceptable car $A = r + r'$ (A serait alors nul !!).

On retient donc la solution : $\boxed{r = r'} \Rightarrow \boxed{i = i'}$ d'après les relations (1) et (2))

De cette relation nous déduisons que les rayons incidents et transmis sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre d'angle A.

3.2) De $A = r + r'$ nous déduisons qu'au minimum de déviation :

$$r = r_m = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \sin i_m = n \sin r_m \Rightarrow n = \frac{\sin i_m}{\sin \frac{A}{2}}$$

Avec l'expression de l'angle de déviation obtenue à la question 2, nous obtenons :

$$i_m = i'_m = \frac{D_m + A}{2} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}$$