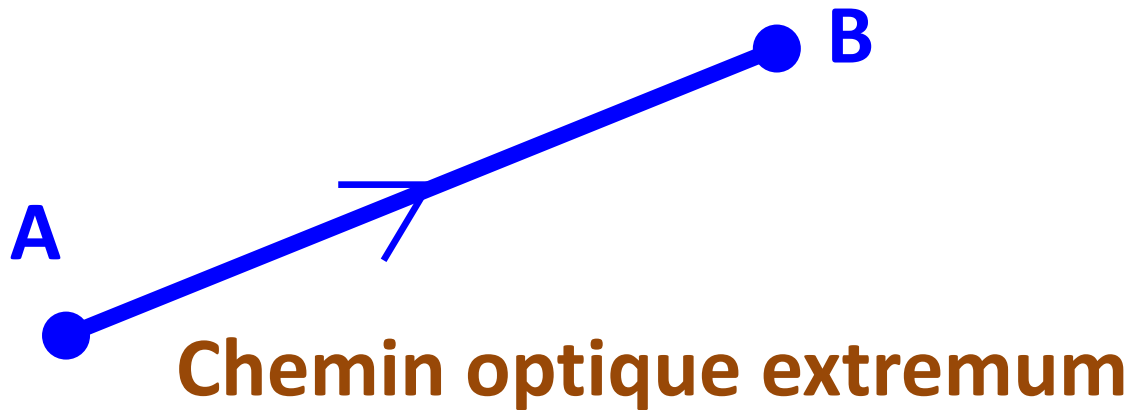


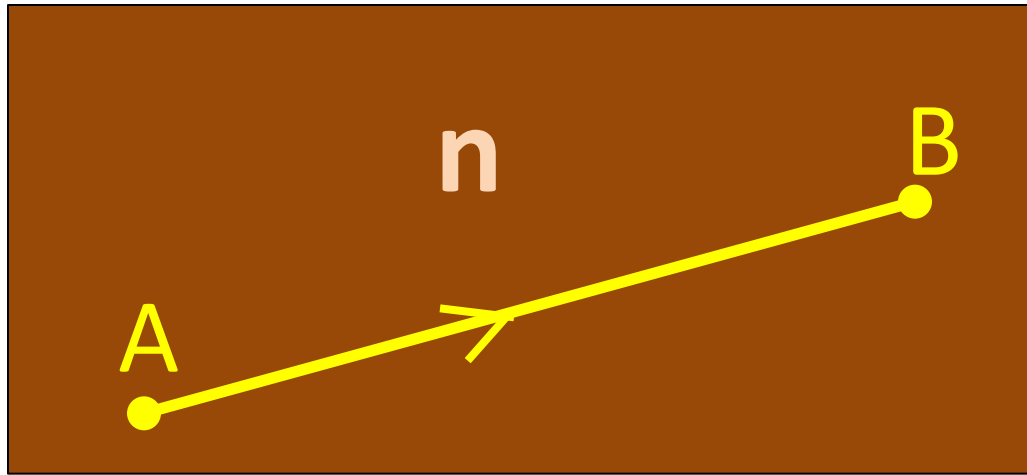
Pierre Fermat a montré que l'on peut fonder l'étude de la propagation de la lumière sur un principe qui porte aujourd'hui son nom :
Le principe de Fermat



1607-1665

Un autre formalisme mathématique pour interpréter la marche de la lumière :
Le principe de Fermat

Fermat a introduit la notion de chemin optique : **longueur (AB)** $\times$ indice n



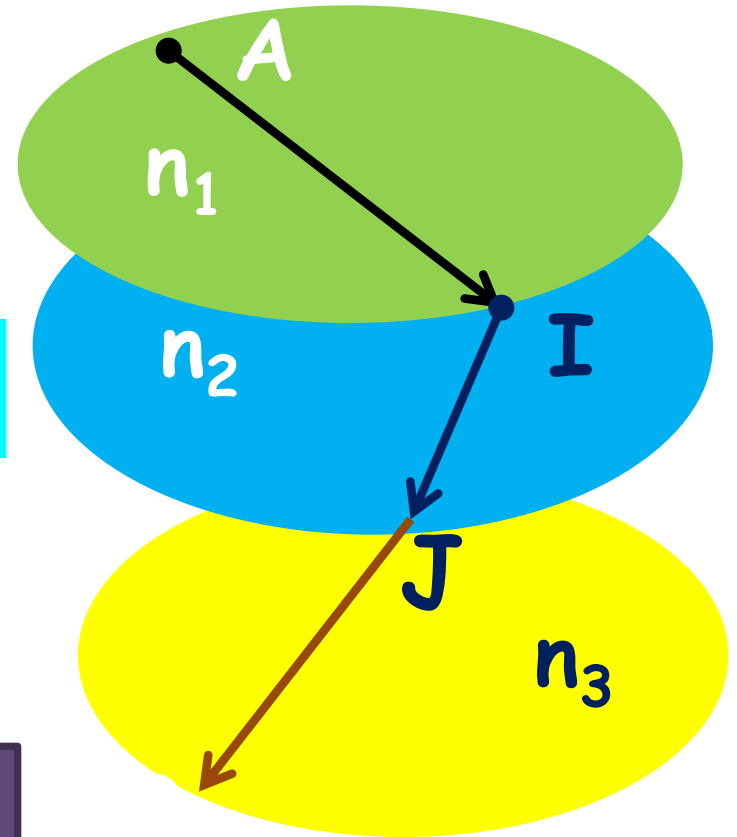
$$(AB) = L_{AB} = AB \times n$$

$$L_{AB} = (AB) = n_1 \cdot AI + n_2 \cdot IJ + n_3 \cdot JB$$

Soit un milieu d'indice

$$n = \frac{c}{v}$$

$$(AB) = L_{AB} = AB \times n = v \cdot t_{AB}$$



le temps mis par la lumière pour parcourir une distance ℓ dans ce milieu est :

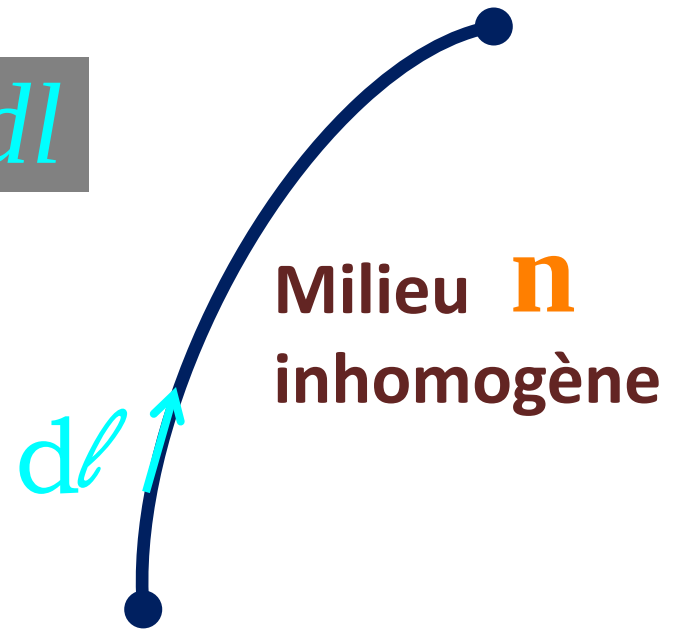
$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{n \cdot \ell}{c} = \frac{L_{AB}}{c}$$

Avec L_{AB} chemin optique, égale au produit du chemin géométrique ℓ par l'indice de réfraction n du milieu considéré.
La durée du parcours de la lumière est :

$$t_{AB} = \sum_{i=1}^3 \frac{L_i}{v_i} = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} + \frac{L_3}{v_3}$$

cas général :

$$dL = n \cdot dl$$



On définit le chemin
optique de **A à B**
par l'intégrale :

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} n(M) \, dl = \int_{\widehat{AB}} dL = (AB)$$

$$L = \int_{(\Gamma)} n \cdot dl$$

Intégrale curviligne

Où dl est l'élément d'arc de (C)

Au point M de la trajectoire d'un rayon lumineux allant d'un point A à un autre point B , la vitesse de la lumière est $\vec{v}(M)$

$$d\vec{\ell}(M) = \vec{v}(M) dt$$

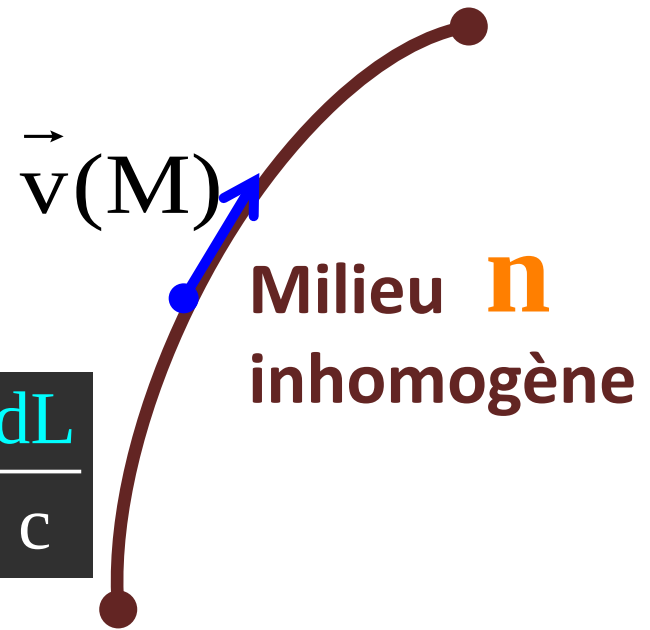
La durée de parcours d'un élément de longueur $d\vec{\ell}(M) = \vec{v}(M) dt$ est :

$$dt = \frac{d\ell}{v(M)}$$

$$d\vec{\ell} // \vec{v} \Rightarrow dt = \frac{d\ell}{v(M)} = \frac{n(M) \cdot d\ell}{c} = \frac{dL}{c}$$

$$d\vec{\ell}(M) = \vec{v}(M) dt$$

$$d\vec{\ell} // \vec{v} \Rightarrow dt = \frac{d\ell}{v(M)} = \frac{n(M) \cdot d\ell}{c} = \frac{dL}{c}$$



Soit

$$t_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} dt = \frac{1}{c} \int_{\widehat{AB}} n(M) d\ell = \frac{1}{c} \int_{\widehat{AB}} dL$$

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} n(M) d\ell = \int_{\widehat{AB}} dL = (AB)$$

$$d\mathbf{t} = \frac{d\ell}{\mathbf{v}(\mathbf{M})} \Rightarrow \mathbf{t} = \int_{AB} \frac{d\ell}{\mathbf{v}(\mathbf{M})}$$

soit $\boxed{\delta\mathbf{t} = \delta \int_{AB} \frac{d\ell}{\mathbf{v}(\mathbf{M})} = 0}$

$$\delta\mathbf{t} = \delta \int_{AB} \frac{d\ell}{\mathbf{v}(\mathbf{M})} = \frac{1}{c} \delta \int_{AB} \mathbf{n}(\mathbf{M}) d\ell$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{M}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{c}{\mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}$$

soit $\boxed{\delta\mathbf{L} = \delta \int_{AB} \mathbf{n}(\mathbf{M}) d\ell = 0}$

*Conclusion : Le rayon lumineux se distingue des autres, pour un trajet entre **A** et **B** donné, par le chemin optique qui lui correspond et qui a une valeur stationnaire.*



Principe de Fermat :

• A

• B

Enoncé 1 :

le **trajet réel** suivi par **la lumière** pour aller d'un point **A** à un point **B** est celui pour lequel le **chemin optique** $L_{AB} = (AB)$ est **stationnaire** (extrémal par rapport aux chemins voisins) (en général minimal) .

$$dL_{AB} = 0$$

le trajet réel suivi par la **lumière** pour aller d'un point **A** à un point **B** est celui pour lequel la durée du parcours $t_{AB} = (AB)$ est **stationnaire** (en général minimal) .

$$dt_{AB} = 0$$

Conséquences du principe de Fermat :

Principe de Fermat et fondements de l'optique géométrique :

Propagation rectiligne

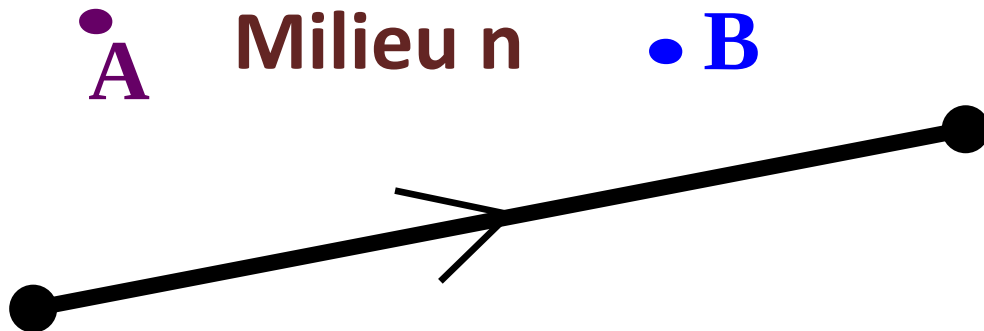
Principe du retour inverse de la lumière

Lois de Snell-Descartes

Propagation rectiligne

Le principe de Fermat contient la loi de propagation rectiligne dans un milieu homogène d'indice de réfraction n .

Soit en effet deux points A et B dans un milieu homogène d'indice de réfraction n : (AB) est le chemin optique entre A et B.



$$(AB) = \int_A^B n \cdot dl$$

$$(AB) = \int_A^B n \cdot dl = n \cdot \int_A^B dl$$

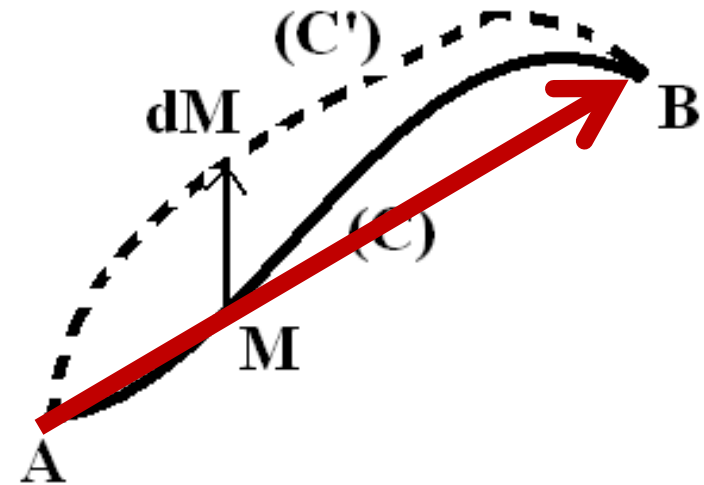
Milieu
homogène
 $n = \text{cste}$

Pour que (AB) soit stationnaire, il faut que

$$\int_A^B dl$$

le soit.

Cette intégrale n'est autre que la **longueur du trajet AB**, qui est minimale quand ce trajet **AB est une droite**



Deux chemins voisins allant de A à B

Dans un milieu homogène et isotrope la lumière se propage en ligne droite

De même, le principe de Fermat contient la loi du retour inverse de la lumière. En effet :

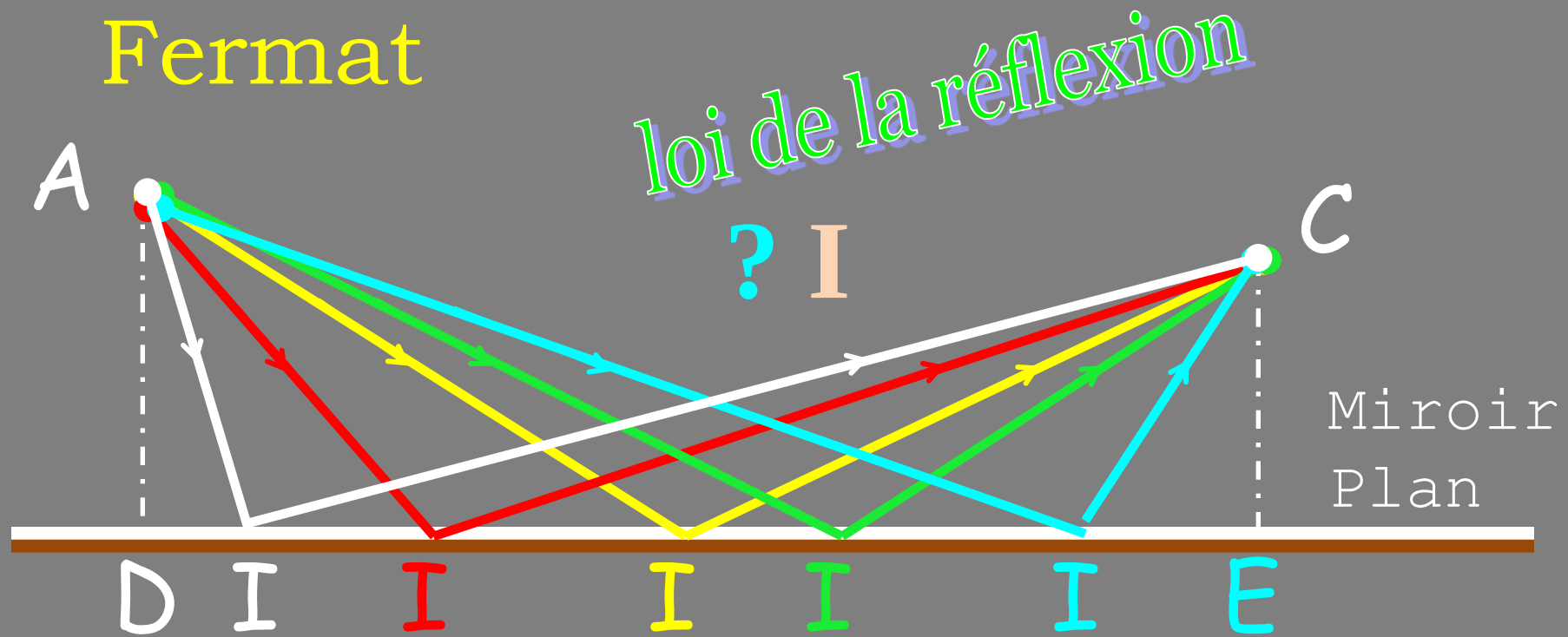
$$(AB) = \int_A^B n \cdot dl = - \int_B^A n \cdot dl = -(BA)$$

Si (AB) est stationnaire, alors (BA) l'est aussi



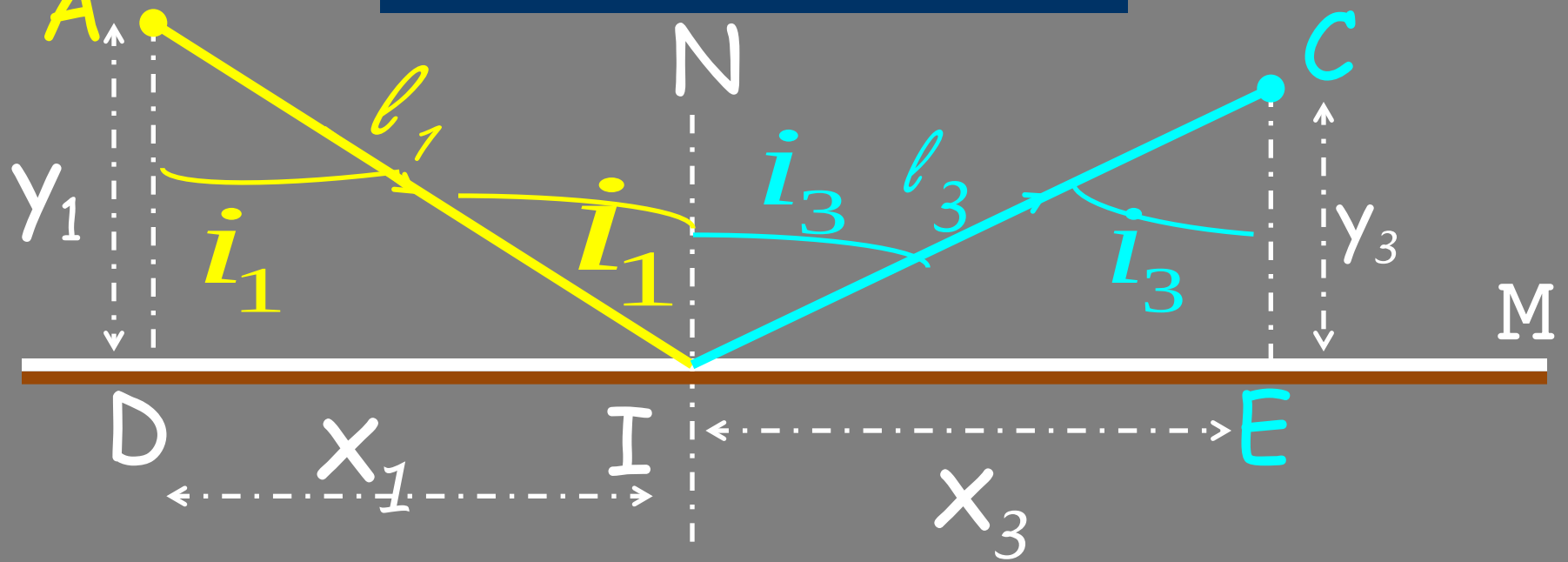
Le trajet de la lumière est alors indépendant de son sens de propagation

Fermat



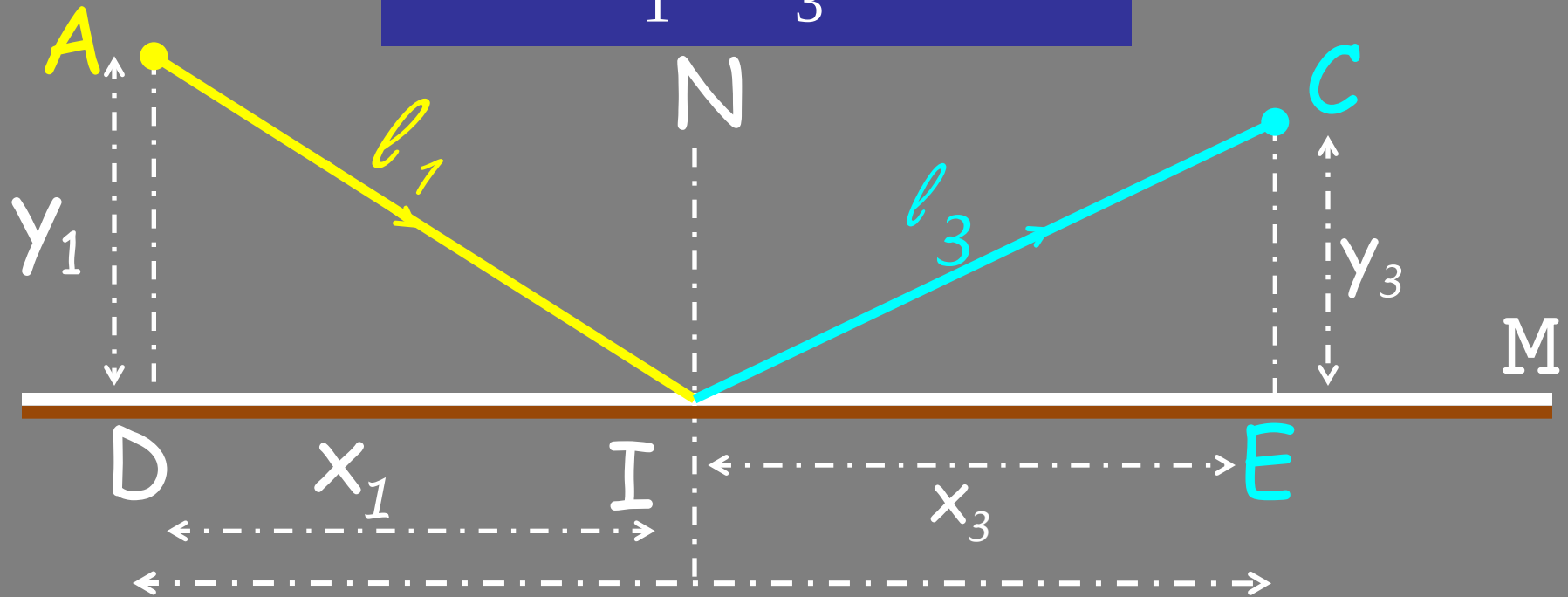
Les deux points A et C sont fixes dans le milieu homogène d'indice de réfraction n . Donc on a **DE = constante**. Je dois chercher le bon **point I** où le **rayon lumineux subira la réflexion** pour changer de direction et se diriger vers le point C

$$DE = x_1 + x_3 = Cste$$



$$\sin(i_1) = \frac{x_1}{\ell_1} \quad \text{et} \quad \sin(i_3) = \frac{x_3}{\ell_3}$$

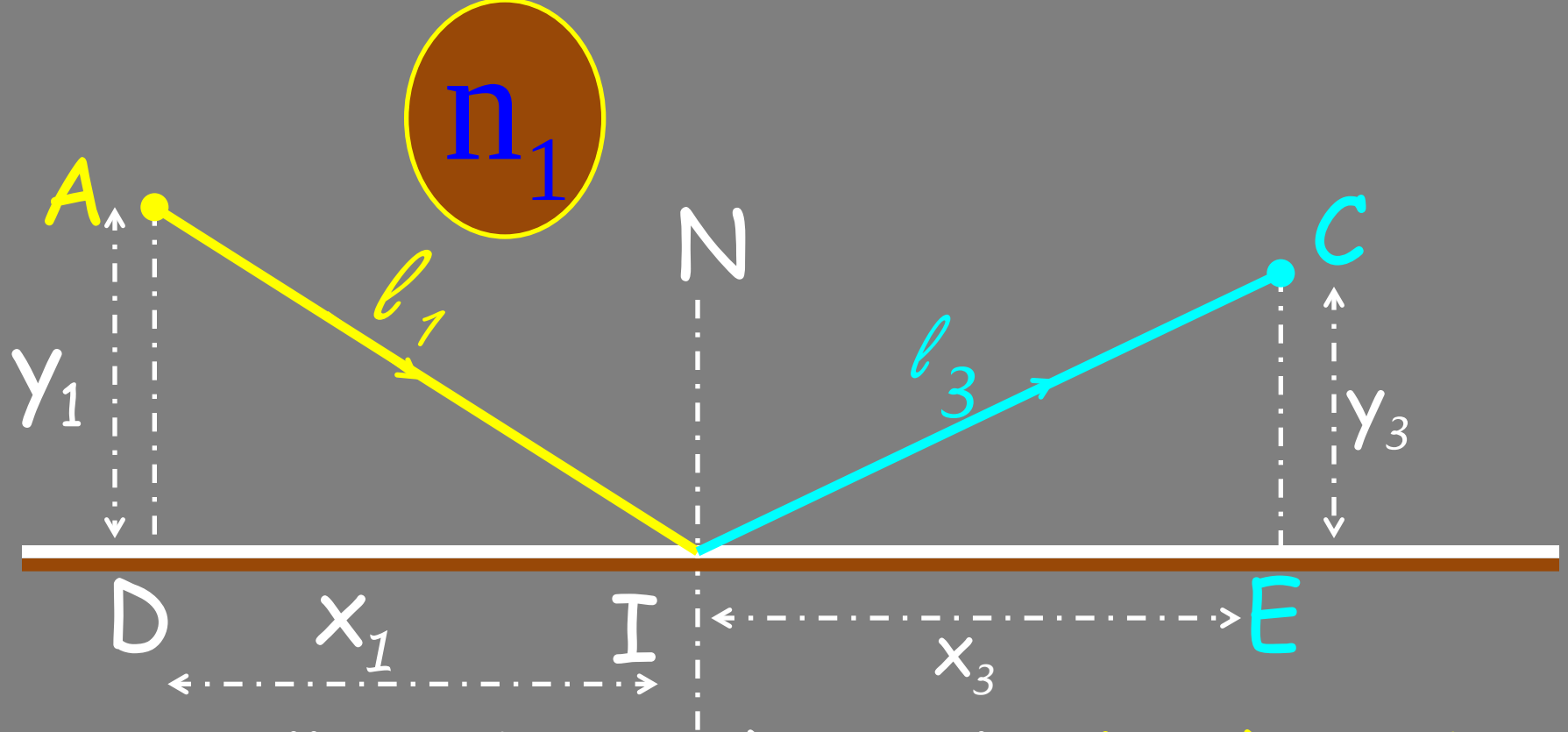
$$DE = x_1 + x_3 = \text{Cste}$$



$$d(DE) = dx_1 + dx_3 = d(\text{Cste}) = 0$$

A et **C** sont fixes, et le point **I** varie sur la surface du miroir plan **M**. La lumière va de **A** à **C**.

donc $dx_1 = -dx_3$

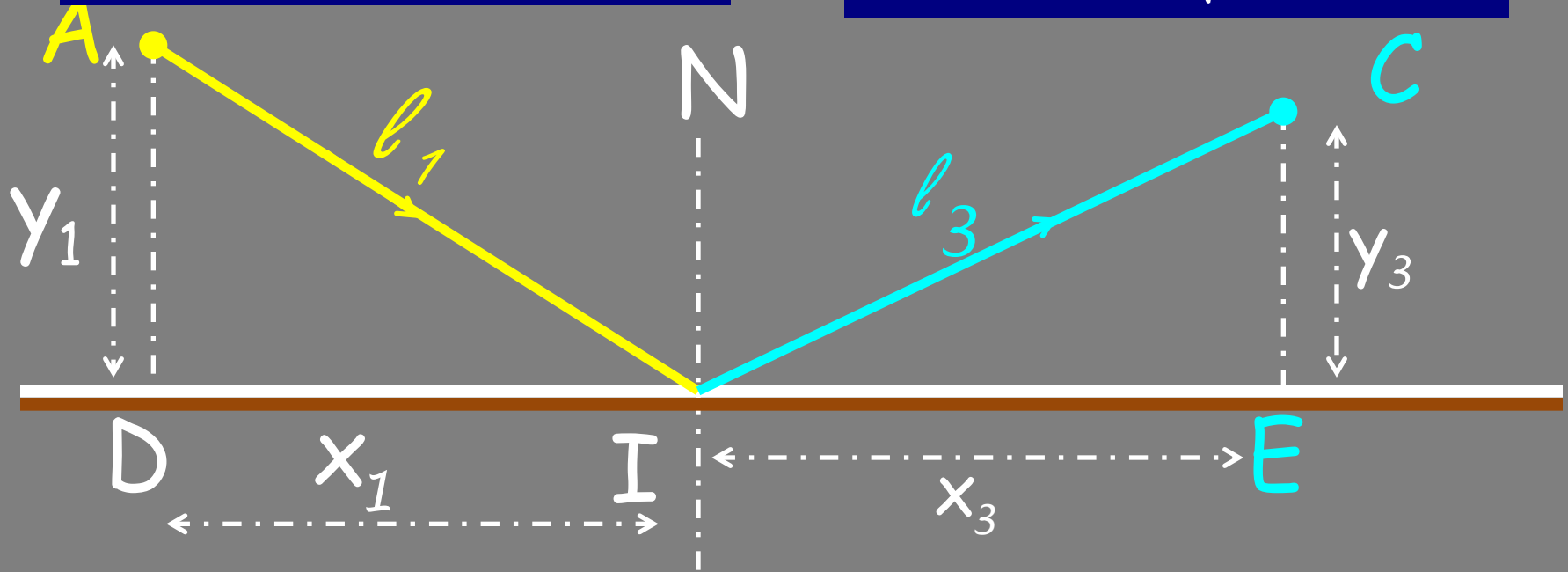


Pour aller de A à C , la lumière doit emprunter le chemin stationnaire (Principe de Fermat) Donc on a :

$$L_{AC} = n_1 \cdot AI + n_1 \cdot IC = n_1 \cdot l_1 + n_1 \cdot l_3$$

$$\ell_1 = AI = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\ell_3 = IC = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$$



Pour aller de **A** à **C**, la lumière doit emprunter le chemin stationnaire.

Donc on a : $L_{AC} = n_1 \cdot AI + n_1 \cdot IC$

$$L_{AC} = n_1 \cdot \ell_1 + n_1 \cdot \ell_3 = n_1 \cdot \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \right)$$

On cherche la **trajectoire du rayon lumineux** issu de A, et après **réflexion en I**, passe par C. A et C sont situés dans le même milieu homogène, d'où le **chemin optique** à une constante près $L = n(AI + IC)$

$$\left. \begin{array}{l} DI = x_1 \\ AD = y_1 \end{array} \right\} AI = \ell_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow d\ell_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} DE = x_3 \\ EC = y_3 \end{array} \right\} IC = \ell_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \Rightarrow d\ell_3 = \frac{x_3 dx_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{DI} = x_1 \\ \text{AD} = y_1 \end{array} \right\} \text{AI} = \ell_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow d\ell_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{DE} = x_3 \\ \text{EC} = y_3 \end{array} \right\} \text{IC} = \ell_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \Rightarrow d\ell_3 = \frac{x_3 dx_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}$$

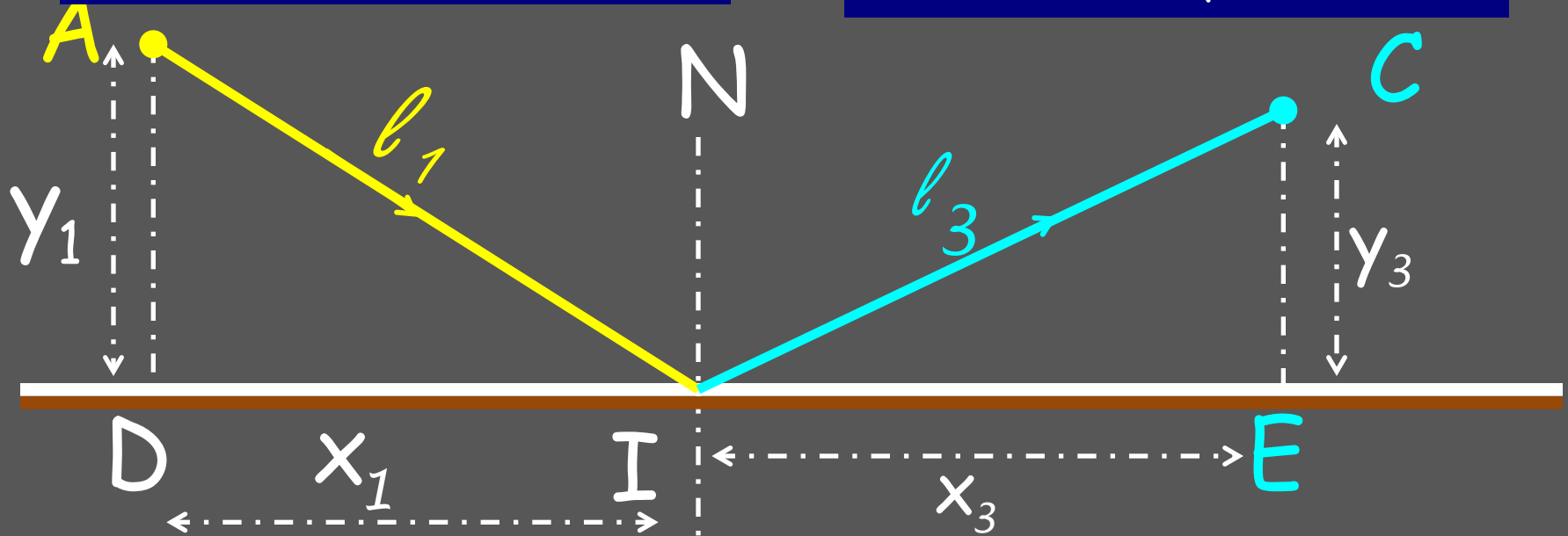
$$x_1 + x_3 = \text{Cte} \Rightarrow dx_1 + dx_3 = 0$$

Soit

$$dx_1 = -dx_3$$

$$\ell_1 = AI = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\ell_3 = IC = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$$



Pour aller de A à C, la lumière doit emprunter le chemin stationnaire

Donc on a : $L_{AC} = n_1 \cdot AI + n_1 \cdot IC$ $d(L_{AC}) = 0$

$$dL_{AC} = 0 = n_1(d\ell_1 + d\ell_3) = n_1 \left(\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_3 dx_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} \right)$$

$$dL_{AC} = 0 = n_1(d\ell_1 + d\ell_3) = n_1 \left(\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_3 dx_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} \right)$$

Avec

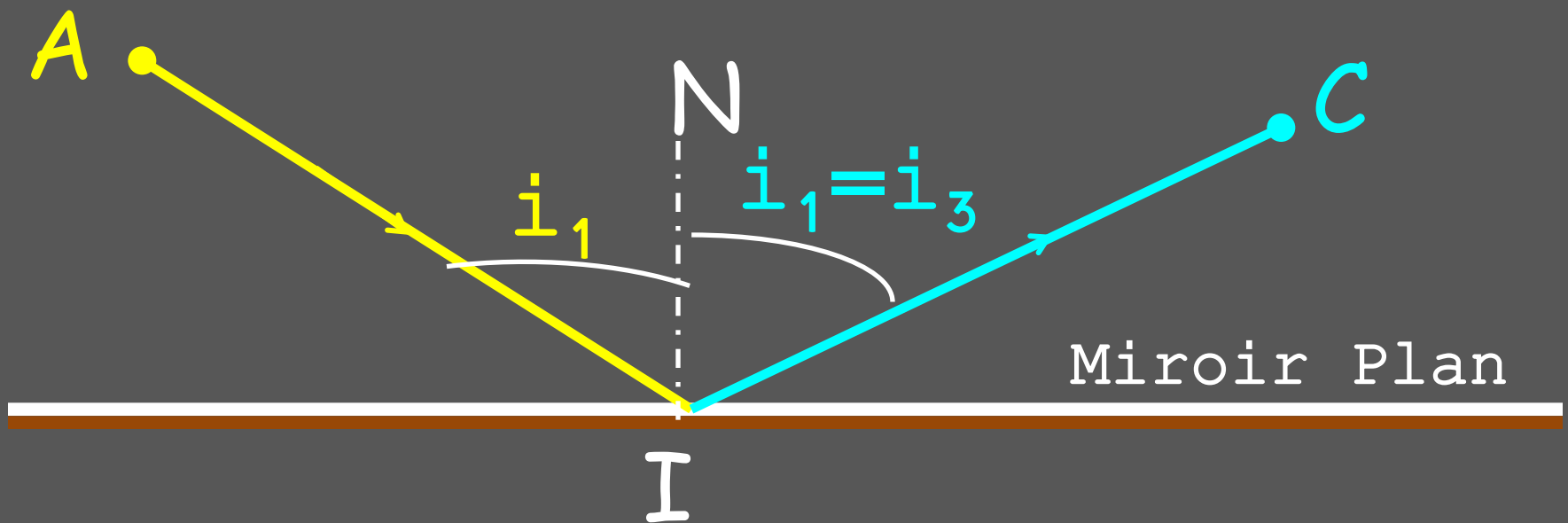
$$dx_1 = -dx_3$$

$$n_1 \left(\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{x_3 dx_1}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} \right) = 0$$

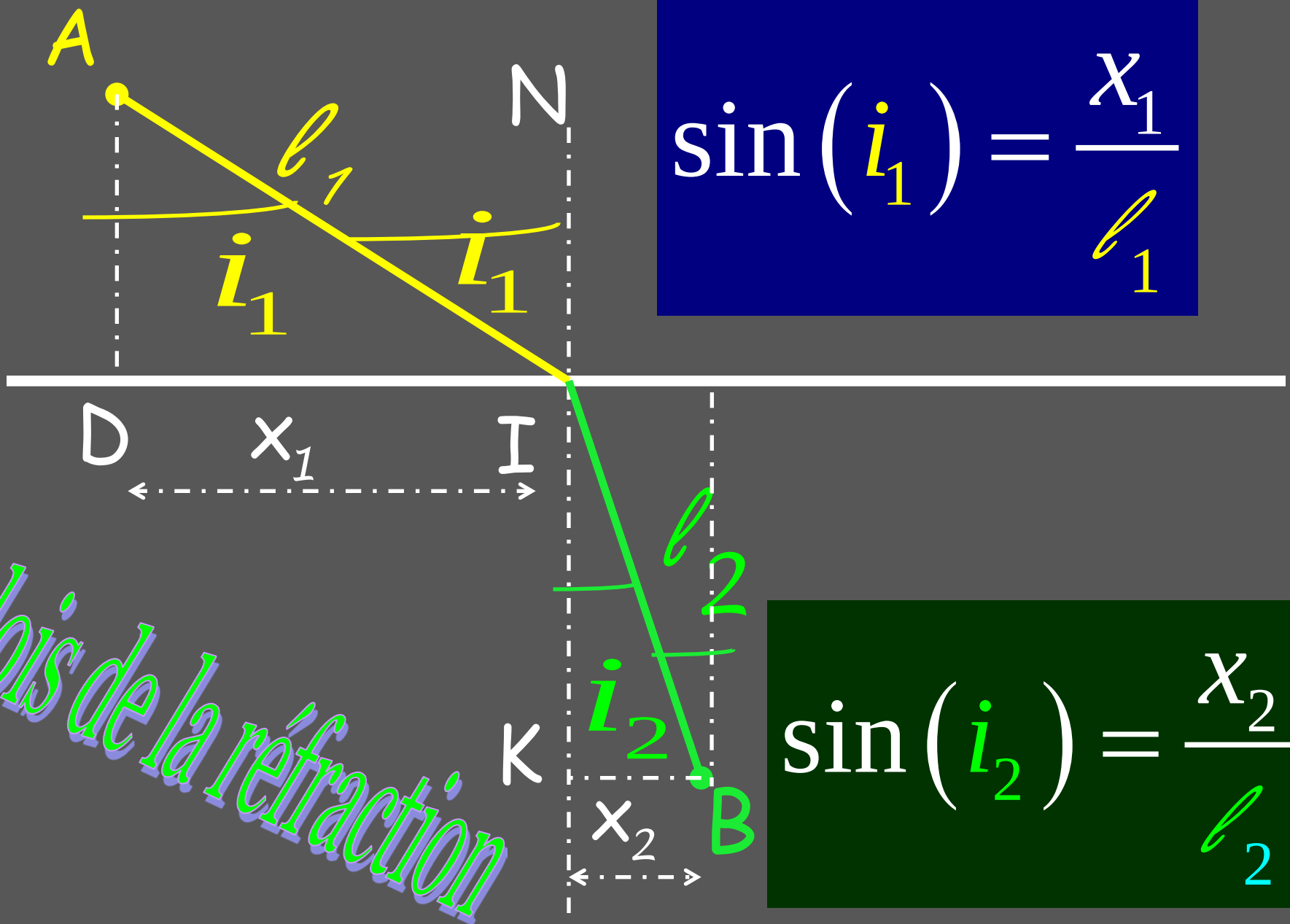
$$\sin(i_1) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}} \sin(i_3)$$

$$\sin(i_1) = \sin(i_3) \Leftrightarrow \boxed{i_1 = i_3}$$

Angles aigus



Lors d'une réflexion, l'angle se conserve.
C'est l'invariant pour la réflexion.

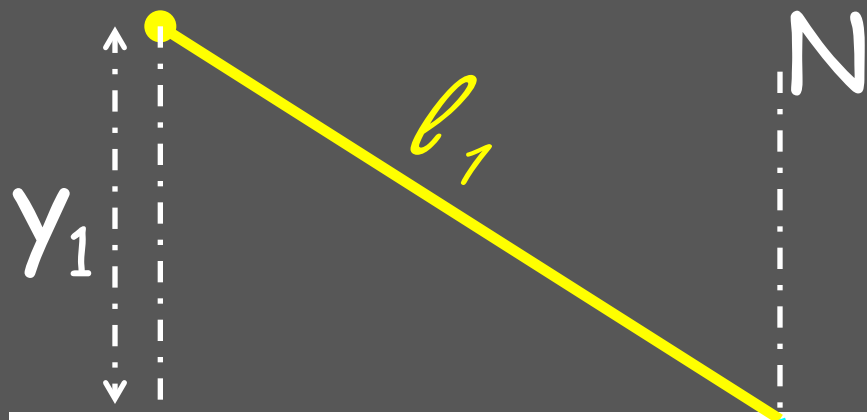


$$\sin(i_1) = \frac{x_1}{\ell_1}$$

$$\sin(i_2) = \frac{x_2}{\ell_2}$$

Lois de la réfraction

$$\ell_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

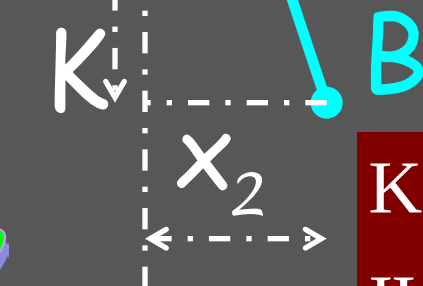


$$\left. \begin{array}{l} DI = x_1 \\ AD = y_1 \end{array} \right\} AI = \ell_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



$$\ell_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

lois de la réfraction



$$\left. \begin{array}{l} KB = x_2 \\ IK = y_2 \end{array} \right\} IB = \ell_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{DI} = x_1 \\ \text{AD} = y_1 \end{array} \right\} \text{AI} = \ell_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow d\ell_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{KB} = x_2 \\ \text{IK} = y_2 \end{array} \right\} \text{IB} = \ell_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow d\ell_2 = \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\text{A et B fixes} \Rightarrow dy_1 = dy_2 = 0 ;$$

$$x_1 + x_2 = \text{Cte} \Rightarrow dx_1 + dx_2 = 0 \quad \text{Soit} \quad \boxed{dx_1 = -dx_2}$$

Le temps de parcours et chemin optique sont

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\ell_1}{v_1} + \frac{\ell_2}{v_2} = \frac{1}{c} (n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2) = \frac{L}{c} \Rightarrow \boxed{dt = \frac{dL}{c}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{DI} = \mathbf{x}_1 \\ \text{AD} = \mathbf{y}_1 \end{array} \right\} \text{AI} = \ell_1 = \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2} \Rightarrow d\ell_1 = \frac{\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_1}{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{KB} = \mathbf{x}_2 \\ \text{IK} = \mathbf{y}_2 \end{array} \right\} \text{IB} = \ell_2 = \sqrt{\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{y}_2^2} \Rightarrow d\ell_2 = \frac{\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2}{\sqrt{\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{y}_2^2}}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\ell_1}{v_1} + \frac{\ell_2}{v_2} = \frac{1}{c} (n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2) = \frac{L_{AB}}{c} \Rightarrow \boxed{dt = \frac{dL_{AB}}{c}}$$

$$L_{AB} = n_1 \text{AI} + n_2 \text{IB} = n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 = n_1 \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2} + n_2 \sqrt{\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{y}_2^2}$$

$$dL_{AB} = n_1 \cdot d\ell_1 + n_2 \cdot d\ell_2 = n_1 \frac{\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_1}{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}} + n_2 \frac{\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2}{\sqrt{\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{y}_2^2}}$$

Appliquons le principe de Fermat ($dL_{AB} = 0$)
sachant que $dx_1 = -dx_2$:

$$n_1 \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - n_2 \frac{x_2 dx_1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = 0$$

$$\sin(i_2)$$

$$\sin(i_1)$$

$$n_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = n_2 \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

On retrouve la loi de Snell-Descartes pour la réfraction :

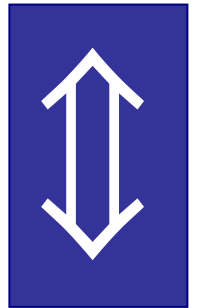
$$n_1 \cdot \sin(i_1) = n_2 \cdot \sin(i_2)$$

Nous venons donc de montrer que le **principe de Fermat** peut être pris comme point de départ de **l'optique géométrique**.

En **optique géométrique**

Le principe de Fermat

Lois de Snell-Descartes



Principe1: Dans un milieu *homogène*, *transparent* et *isotrope*, les rayons lumineux sont des lignes droites.

Principe2: Le principe du retour inverse de la lumière.



Principe3: A la surface de séparation de deux milieux, les rayons lumineux obéissent aux lois de Snell-Descartes.

✧ Les trois rayons incident, réfléchi et réfracté sont dans le même plan d'incidence.

✧ **Réflexion** : le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale IN

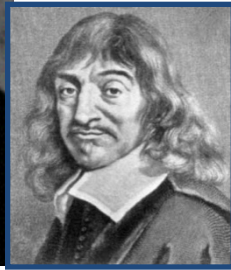
angle d'incidence i_1 = angle de réflexion r

✧ **Réfraction** : le rayon réfracté fait un angle de réfraction i_2 avec la normale tel que :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$



René Descartes
1596-1650



Willebrord
Snell 1580-1626

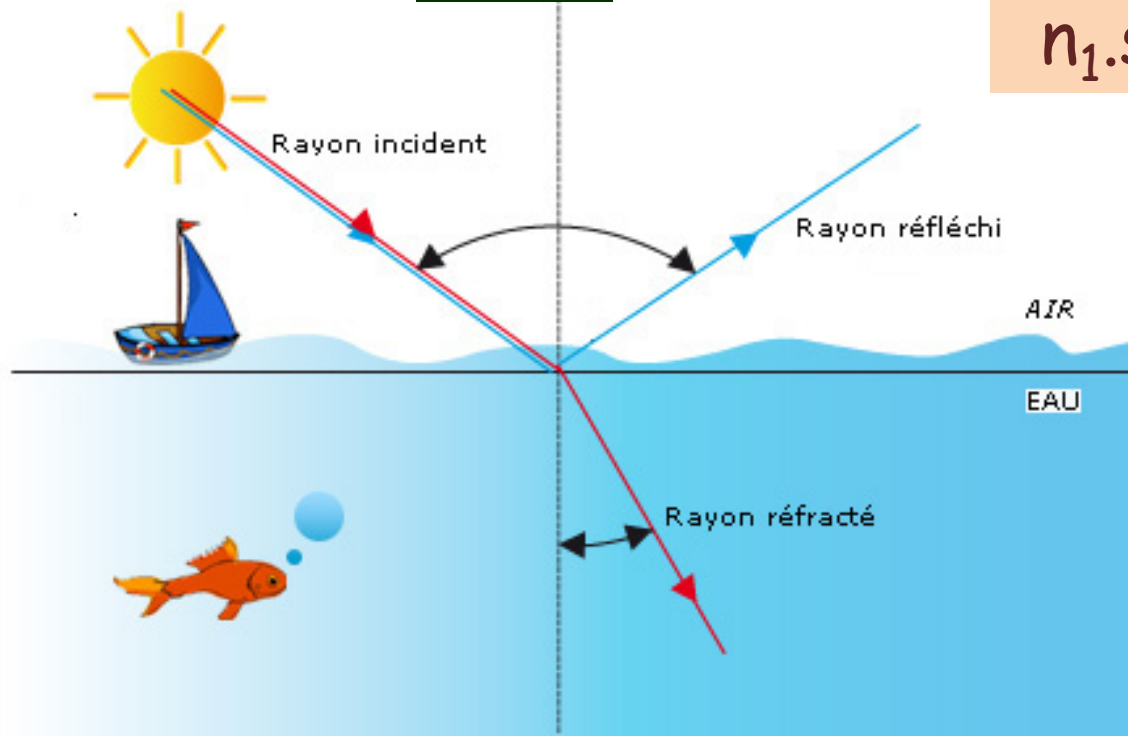


En 1637, le physicien **Français René Descartes** a publié un ouvrage sur la dioptrique où il donne une interprétation plus ou moins **corpusculaire** des **lois de la réfraction** découvertes quelques années auparavant par le physicien **Hollandais Willebrord Snell**.

Les lois de Snell-Descartes fixent la direction des faisceaux **réfléchi** et **réfracté** en fonction de celle du faisceau incident.

Réflexion

$$i = r$$



Réfraction

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$

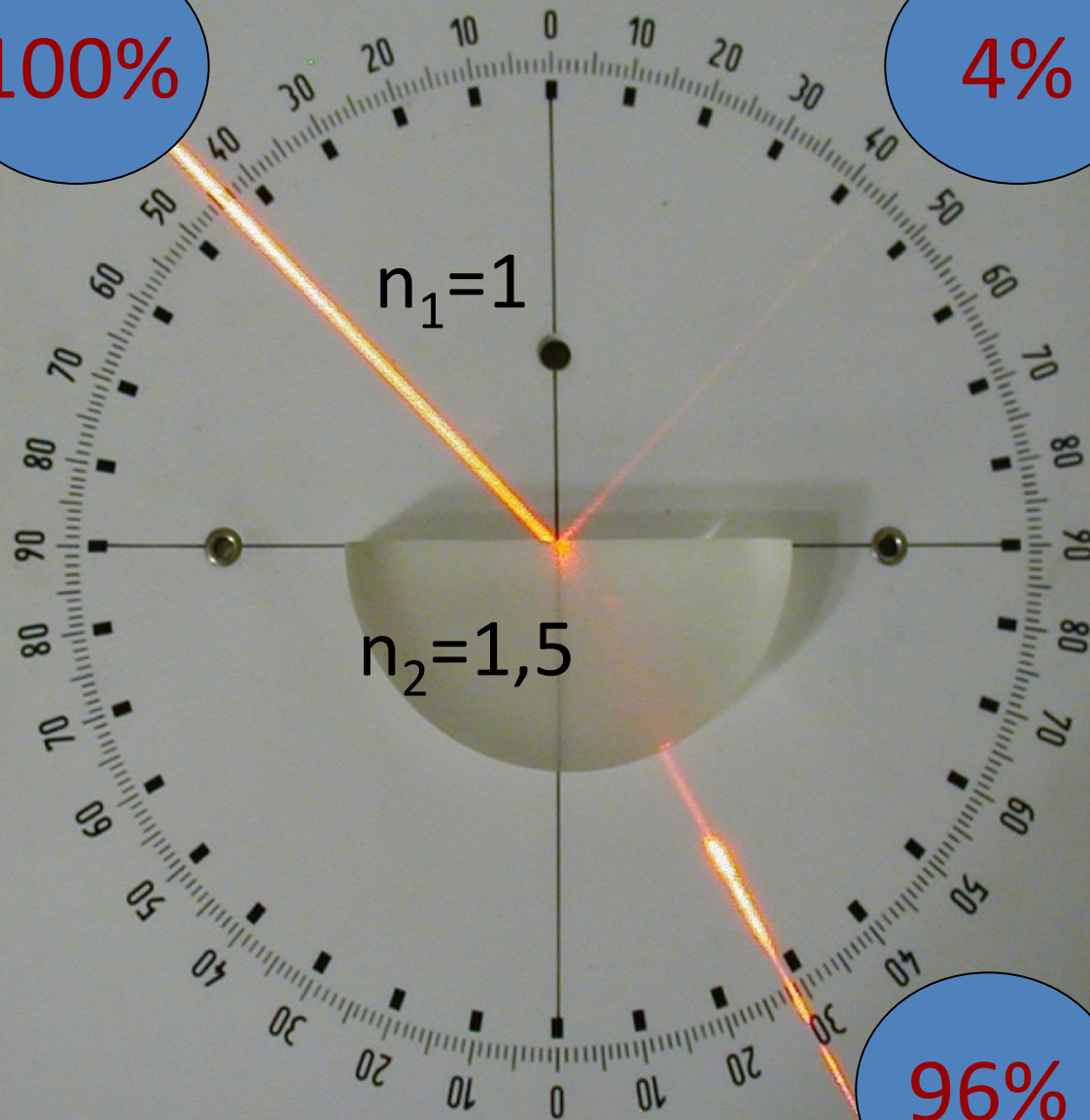
100%

4%

$n_1=1$

$n_2=1,5$

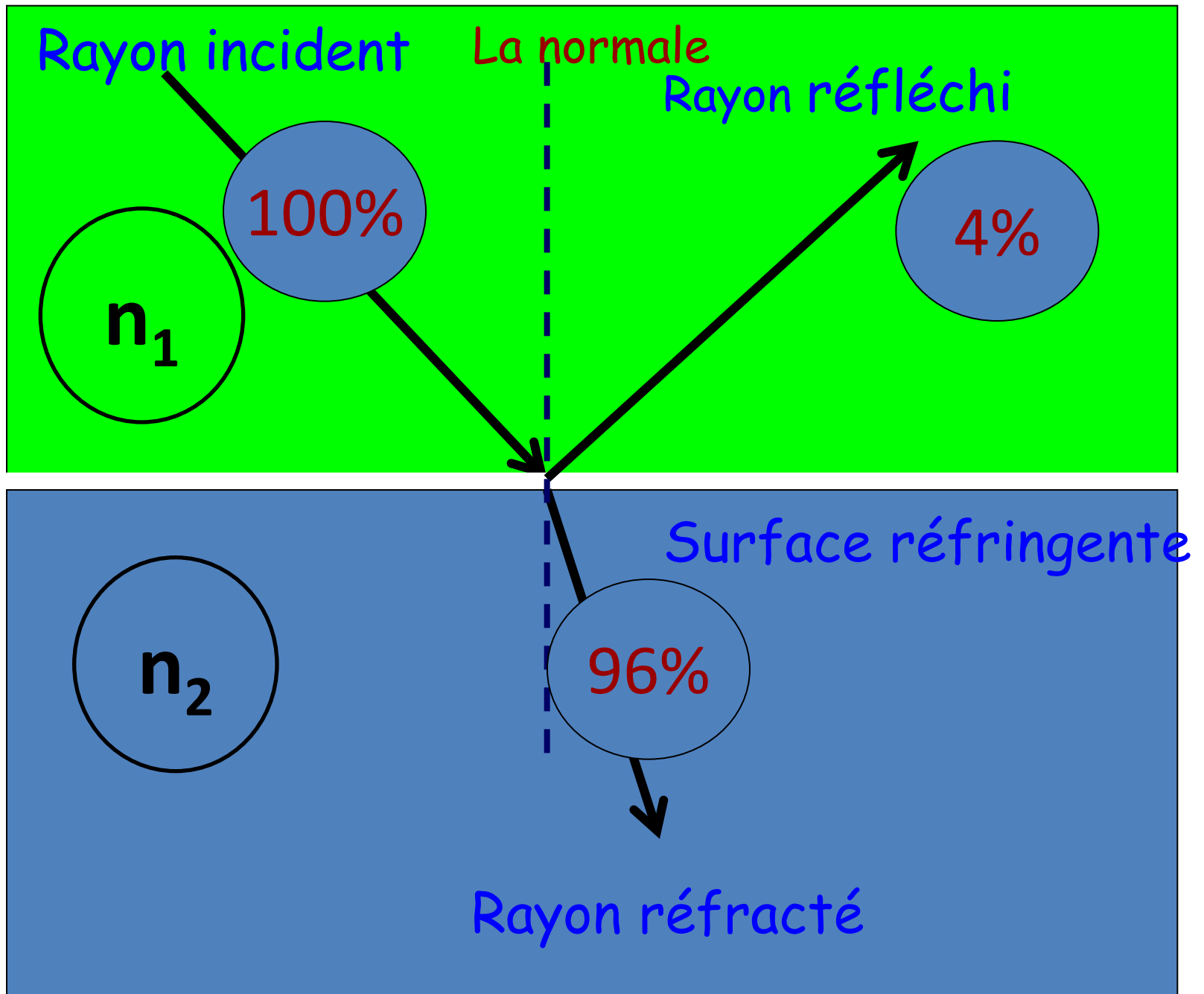
96%



Les lois de Snell-Descartes ne permettent pas de préciser la **quantité de lumière réfléchie** par rapport à celle **transmise**, à la surface réfringente, séparant deux milieux homogènes et transparents d'indices absolus différents n_1 et n_2 .

On définit les **coefficients de réflexion** et **de transmission** :

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad R + T = 1$$



La normale

Angle
d'incidence

Angle de
réflexion

n_1

i_1

r

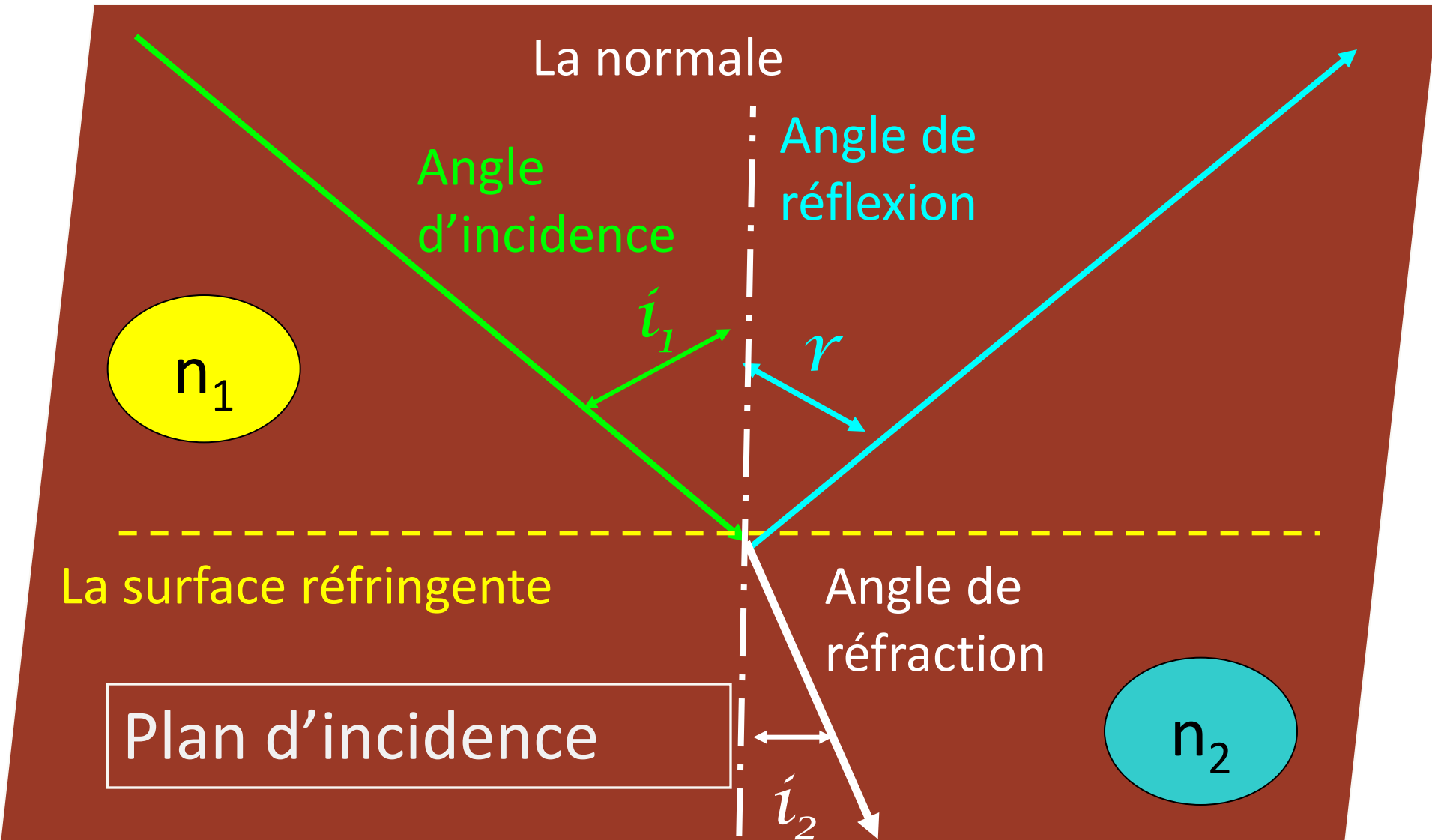
La surface réfringente

Angle de
réfraction

Plan d'incidence

n_2

i_2



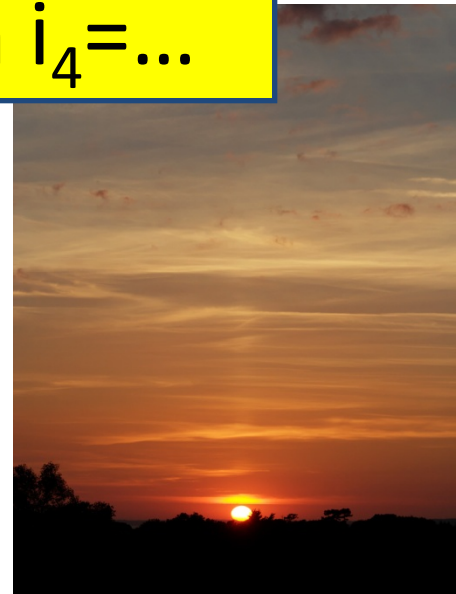
En appliquant le principe de la propagation rectiligne de la lumière, l'optique géométrique se propose d'étudier comment les rayons lumineux, partant des objets, cheminent en subissant des réflexions et des réfractions à travers divers milieux transparents appelés systèmes optiques, et concourent à la formation des images.

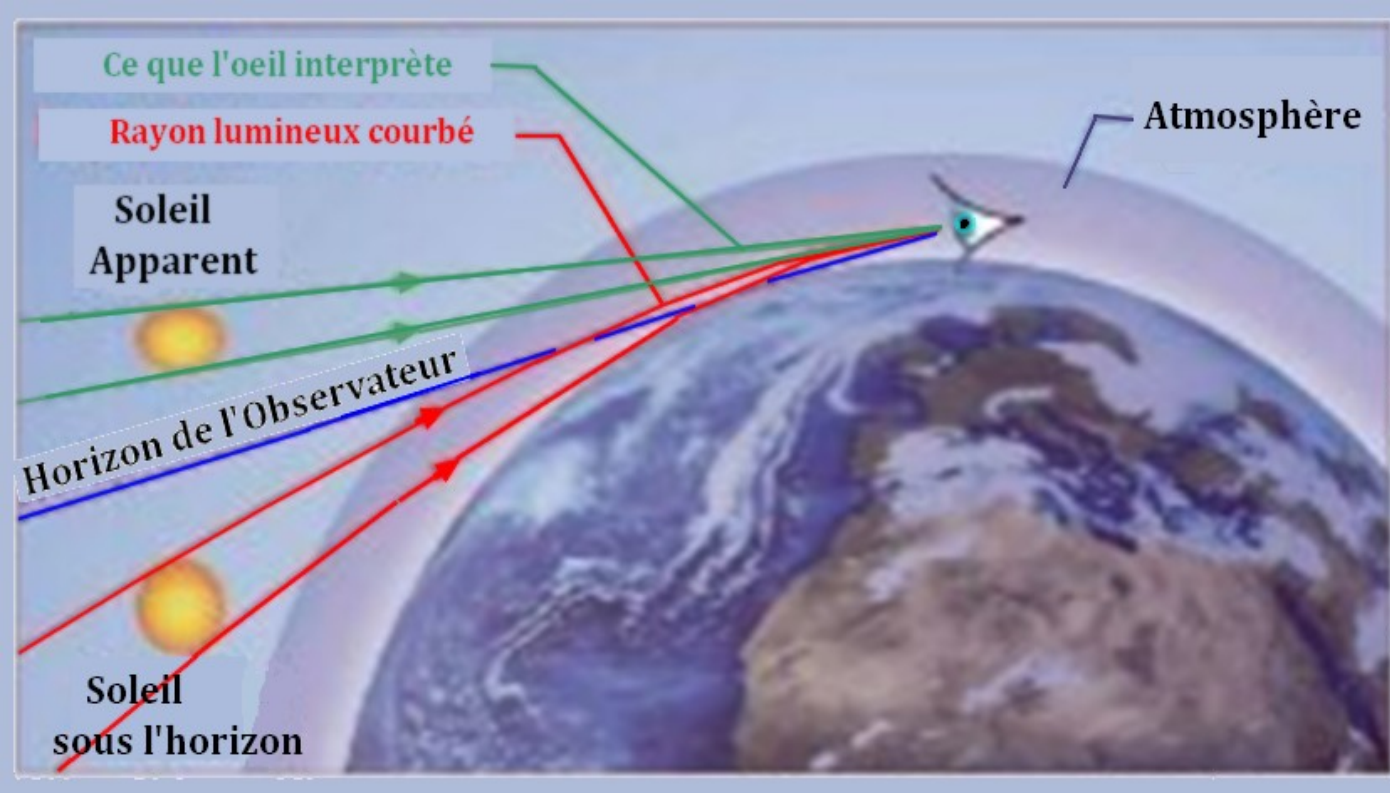
La marche d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène :

$$n_3 > n_2 > n_1$$

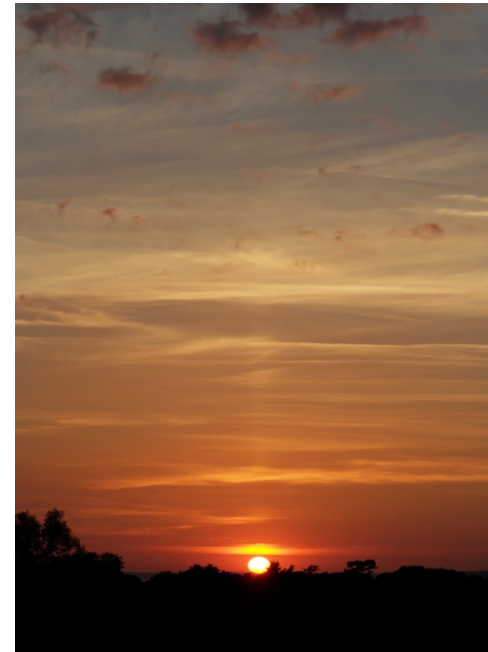
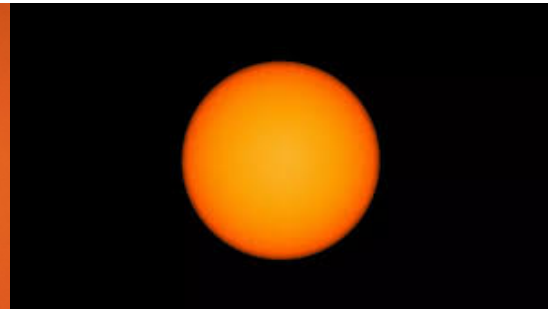
Superposition de milieux homogènes différents.

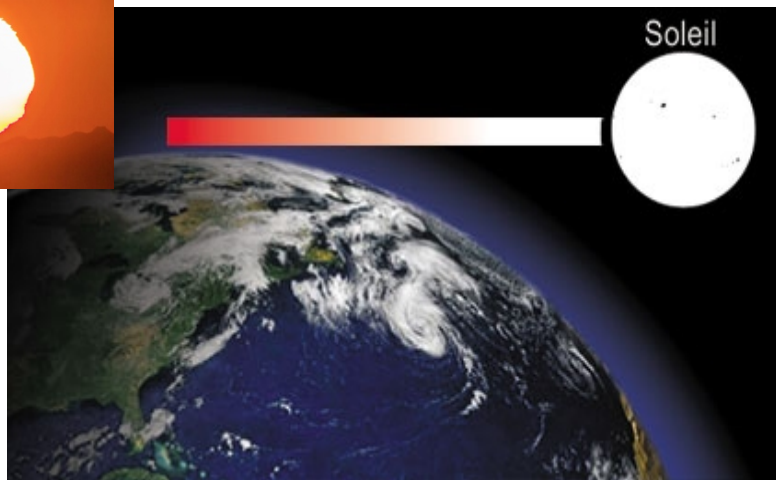
$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2 = n_3 \cdot \sin i_3 = n_4 \cdot \sin i_4 = \dots$$



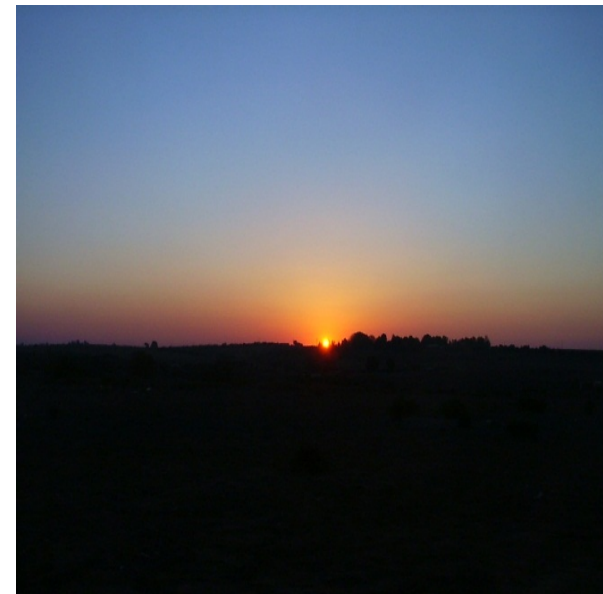


L'effet de la réfraction de la lumière



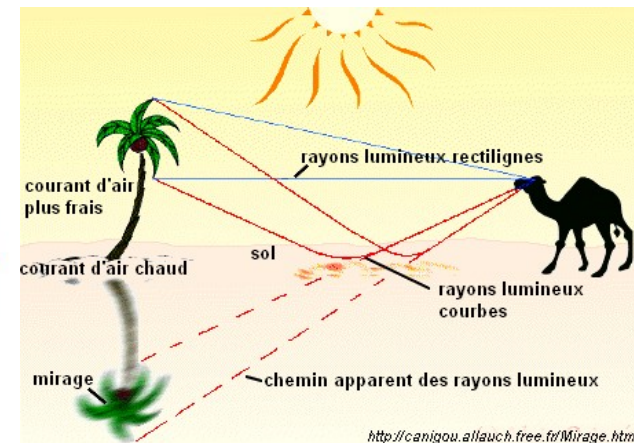
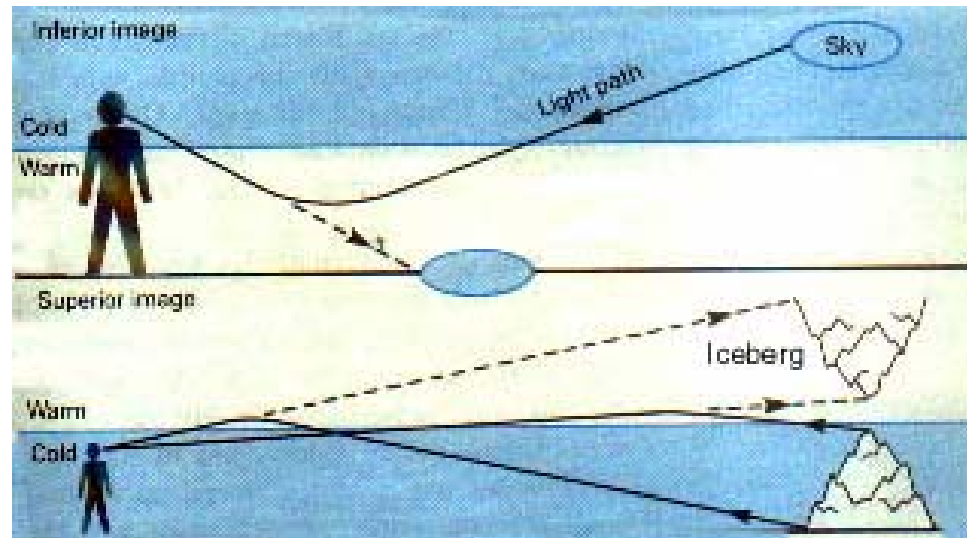
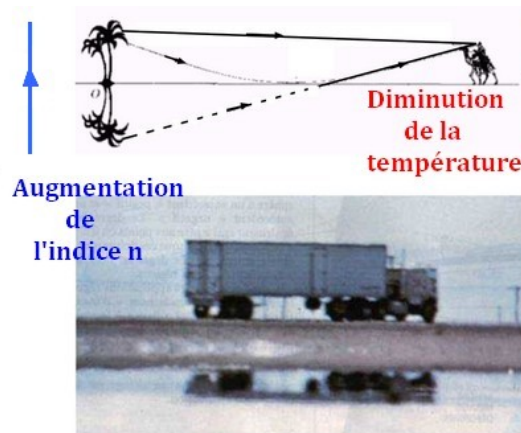
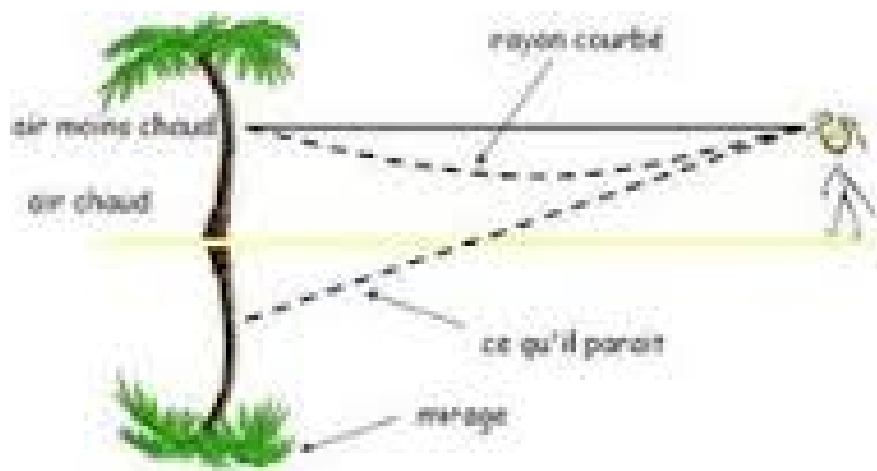


La **déformation du disque du Soleil** est causée essentiellement par la **réfraction de la lumière** issu du Soleil en **traversant des couches atmosphériques**, à l'horizon, dont l'indice de **réfraction** varie très vite.



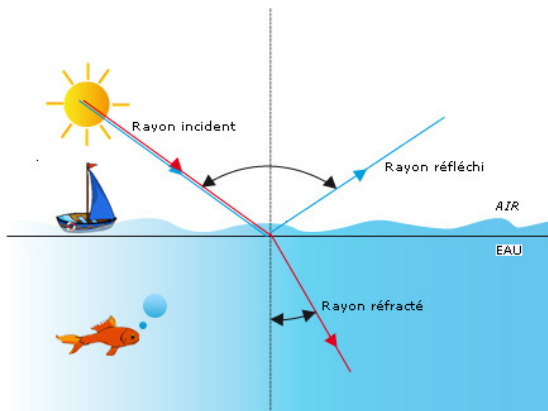
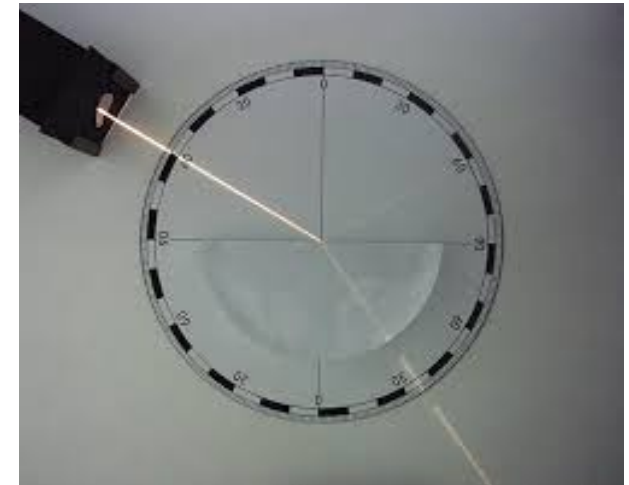
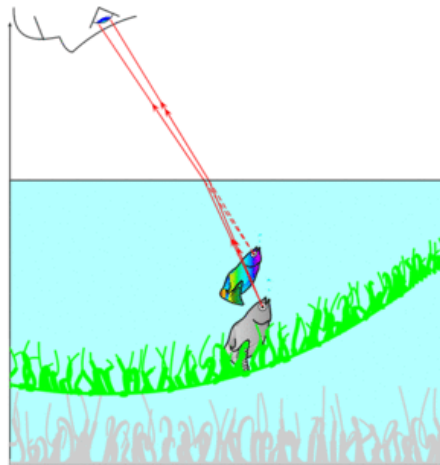
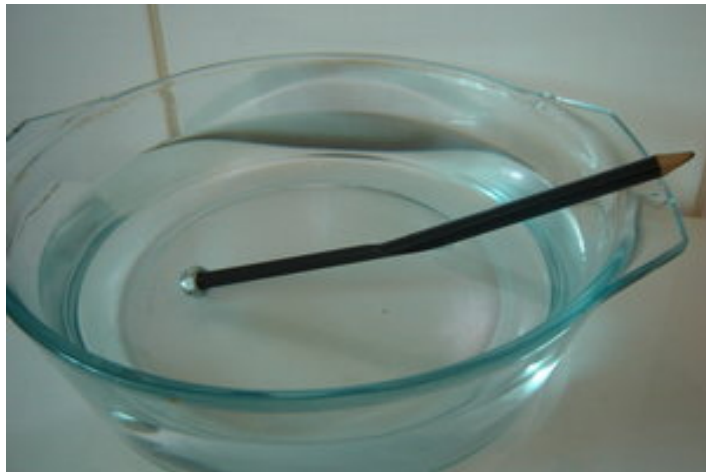
Au couché du Soleil, l'horizon est **rouge** à cause de la **réfraction de la lumière** blanche du jour.

Mirages



<http://canigou.allauch.free.fr/Mirage.htm>

Fin...



Devrait-il viser:
a) pour la location apparente du poisson?
b) en haut de la location apparente du poisson?
c) en bas de la location apparente du poisson?

