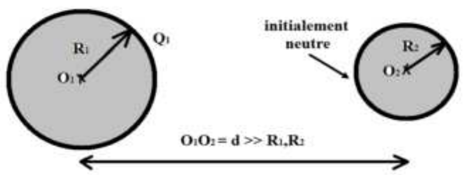
Correction de la série n°4

Exercice 3 : Coefficients d'influence de deux conducteurs sphériques

3-1)

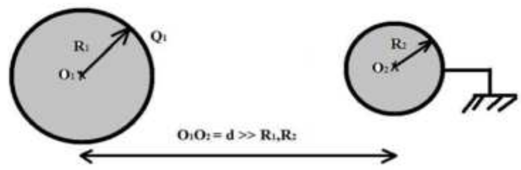
Le potentiel crée par 1 charge Q_1 à une distance d de la charge est :

$$V_2 = V(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \quad avec\ V(\infty) = 0$$



3-2) *S₂ reliée au sol*

a) Q_2 et $V_1(S_1)$



$$V_2 = V(Q_1) + V(Q_2)$$

$$V_2 = 0 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Q_2 = -Q_1 \frac{R_2}{d}}$$

$$\boldsymbol{V_1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{d^2}\right\} = \boldsymbol{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\left\{1 - \frac{R_1 R_2}{d^2}\right\}}$$

b) C_{11} et C_{12}

$$Q_1 = C_{11}V_1 + \underbrace{C_{12}V_2}_{=0\ (V_2=0)} \Rightarrow \boldsymbol{C_{11} = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_1 R_2}{d^2}}}$$

$$Q_2 = -Q_1\frac{R_2}{d} = C_{12}V_1 + \underbrace{C_{22}V_2}_{=0} \Rightarrow \boldsymbol{C_{12} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1\left(\frac{R_2}{d}\right)}{1 - \frac{R_1 R_2}{d^2}}}$$

$$C_{12} = -\frac{R_2}{d}C_{11} < 0$$

c) *Capacités et coefficient d'Influence de deux sphères identiques* $R_1 = R_2 = R \Rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{1 - \frac{R^2}{d^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 d^2 R}{d^2 - R^2} = C_{22}} \\ \boldsymbol{C_{12} = C_{21} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 d R^2}{d^2 - R^2} = -\frac{R}{d}C_{11}} \end{cases}$$

Remarque : Pour une sphère conductrice de rayon R seule (S_1) ; le potentiel V en un point M se trouvant a une distance r ≥ R est donné par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

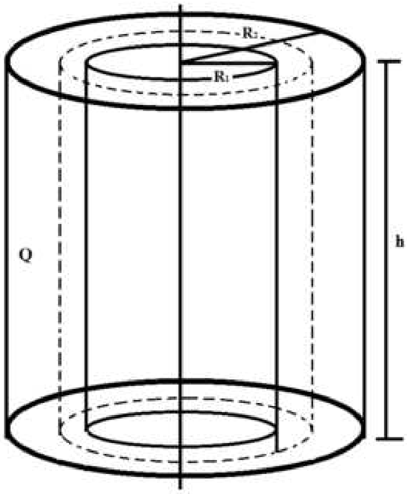
Le potentiel V de ce conducteur est donc lié à sa charge par :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C_0 = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

En présence de S_2

$$C_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{1 - \frac{R^2}{d^2}} = \frac{C_0}{1 - \frac{R^2}{d^2}} \approx C_0\left(1 + \frac{R^2}{d^2}\right) \ pour\ d \gg R; \text{on a utilisé} \quad \{(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon\}$$

Exercice 4 : Capacité d'un condensateur cylindrique



a) Théorème de Gauss :

$$\Phi_{E/\mathrm{SG}} = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

S_G = 1 cylindre (OM = r, h)

$\mathbf{R_1 < OM = r < R_2}$;

$$E(r) \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr}\vec{u}_r$$

b)

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0h}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} Log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{Log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

c) Pour $R_2 - R_1 = e << R_1, R_2$ $\quad R_1 \approx R_2 = R$

$$R_2 = R_1 - e \;\rightarrow\; Log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = Log\left(1 + \frac{e}{R}\right) \cong \frac{e}{R} \;\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 Rh}{e} \equiv \varepsilon_0 \frac{S}{e} \;(avec\;\; S = 2\pi Rh)$$

Energie : $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 h} Log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$