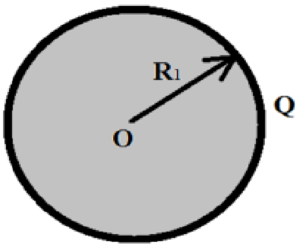
Correction de la série n°4

Exercice 1 : Pouvoir des pointes



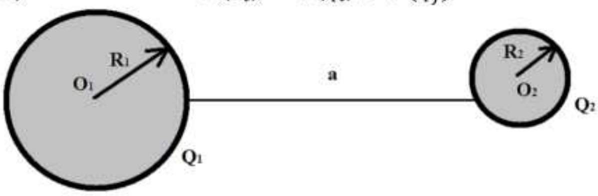
1°) $Q = \sigma S = \sigma 4\pi R_1^2 \Rightarrow \sigma = \dfrac{Q}{4\pi R_1^2}$

On rappelle que : le potentiel d'une boule chargé :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1}$$

La capacité: $C = \dfrac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

2) $V(S_i) = V(q_i) + V(q_j)$



a= O_1O_2

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 & (1) \\ V_1 = V_2 & (2) \end{cases}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$a \gg R_1, R_2 \Rightarrow \frac{1}{a} \ll \frac{1}{R_1} \;\; et \;\; \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$Q = Q_1\left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right) = Q_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = Q_2\left(\frac{Q_2}{Q_1} + 1\right) = Q_2\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)$$

On rappelle pour une sphère : $Q = \sigma 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = Q\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \sigma_1 4\pi R_1^2 \\ Q_2 = Q\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = \sigma_2 4\pi R_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{Q}{4\pi R_1(R_1 + R_2)} \\ \sigma_2 = \dfrac{Q}{4\pi R_2(R_1 + R_2)} \end{cases}$$

$$De\ même: \begin{cases} E_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cong \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \\ E_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} + \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cong \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{Q_1}{R_1^2}\right) \Big/ \left(\frac{Q_2}{R_2^2}\right) = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}}}$$

Remarque : On pouvait retrouver ce résultat à partir de : $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{n}$

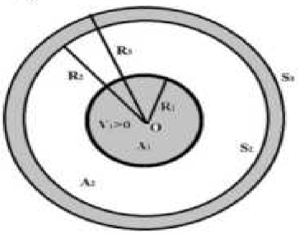
Le champ augmente au voisinage de la sphère de petit rayon, c'est le pouvoir de pointe [la densité de charge varie en sens inverse du rayon de courbure ρ de la surface du conducteur. Si le conducteur présente une pointe, le rayon de courbure ρ est faible au niveau de cette pointe, donc la densité σ est élevée. Le champ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ sera très intense et provoquera, au voisinage de la pointe, ionisation de l'aire qui déchargera la pointe, donc impossible de conservé la charge d'un conducteur muni d'une pointe.

A.N : R_1 = 9 cm ; Q = 10^{-8} C

$\sigma_1 = 8{,}85\ 10^{-12}$ C/cm^2 ; $\sigma_2 = 79{,}62\ 10^{-12}$ C/cm^2 $\quad \boldsymbol{\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1}{9}}$

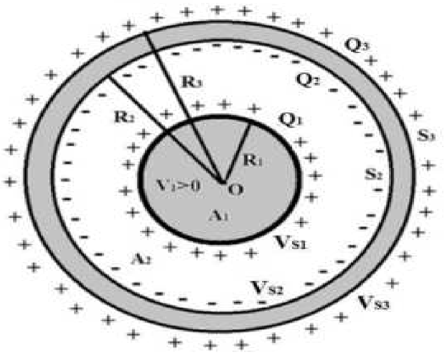
Exercice 2 : Influence électrostatique

1-a)



$A_1 \rightarrow V_1$
A_2 creuse initialement neutre.
$S_1 \rightarrow Q_1$

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \Rightarrow Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1$$



Répartition des charges

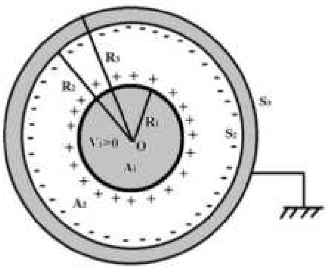
S_2 influence totale $\rightarrow Q_2 = -Q_1$
S_3 conservation de la charge $A_2 \rightarrow Q_3$
$Q_2+Q_3 = 0 \Rightarrow Q_2 = -Q_3 \Rightarrow -Q_1 = -Q_3 \Rightarrow$
$Q_1 = Q_3$

1-b) En choisissant $V(\infty) = 0$ et par continuité du potentiel en S_2 et S_1

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \quad et\ V_1 = V_{S1} + V_{S2} + V_{S3} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

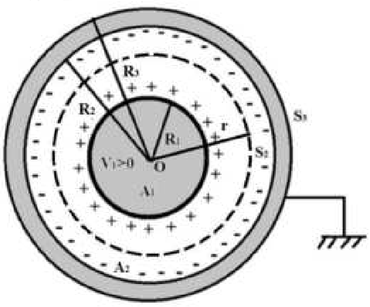
2-a) ***On relie A_2 au sol*** : $V_2 = 0$



Sur $S_3 \rightarrow Q_3 = 0$ les charges extérieures s'écoulent vers le sol.

Sur $S_2 \rightarrow Q_2 = -Q_1$

2-b) $R_1 \leq r \leq R_2$



$$\Phi_{E/SG} = \iint_{SG} \vec{E}\,d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow dV = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$V(M) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C^{te}$$

$$V_2(R_2) = 0 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + C^{te} \Rightarrow C^{te} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

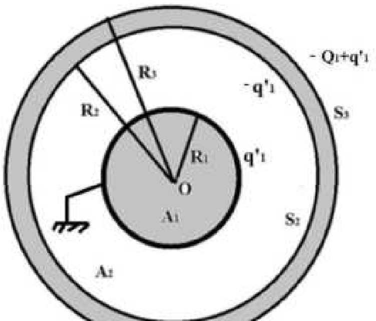
$$\Rightarrow V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V(R_1) = V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

1-3) ***<u>0n isole A_2 et on relie A_1 au sol</u>***

a)

- A_2 isolée → la charge totale ($-Q_1$) se répartit sur sa surface extérieur S_3
- A_1 au sol → $V_1 = 0$; les charges sur S_1 s'écoulent vers le sol et les charges sur sont toujours négatives (-q')



Influence total ⇒ q'_1 sur S_1, $-q'_1$ sur S_2

$+q'_1$ se superpose à $-Q_1$ sur S_3 ⇒ on aura la charge :

$$-Q_1 + q'_1$$

$$\textbf{b) } \mathbf{r \geq R_3} \;\Rightarrow\; V(M) = \frac{-Q_1 + q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad avec\ V(\infty) = 0$$

$$\boldsymbol{R_1} \;\leq\; \boldsymbol{r} \;\leq\; \boldsymbol{R_2} \Rightarrow V(M)\,\frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

$$\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{R_1} \Rightarrow\; V(r) = V(R_1) = 0 = V(M)) = \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C \;\Rightarrow C = -\frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V(M) = \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$Continuité\ pour : V(R_2) = V(R_3) \Rightarrow \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{-Q_1 + q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\Rightarrow \frac{q'_1}{R_2} - \frac{q'_1}{R_1} = \frac{-Q_1 + q'_1}{R_3} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_3} = q'_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = q'_1\,\frac{R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

$$\Rightarrow Q_1 = q'_1\,\frac{R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2} \Rightarrow q'_1 = Q_1\,\frac{R_1R_2}{R_3(R_2 - R_1) + R_1R_2} > 0$$

$$-Q_1 + q'_1 = Q_1\,\frac{R_3(R_1 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1) + R_1R_2} < 0$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{(R_1 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1) + R_1R_2} < 0$$

$$V_2 = V(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\cdot\frac{(R_1 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1) + R_1R_2}$$

Remarque : dans le cas où la charge sur S_3 est $(Q_1 + q'_1)$

$$V(r) = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{(R_1 - R_2)}{R_3(R_2 - R_1) + R_1R_2} > 0$$

1-4)

$$V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

$$Pour\ R_2 - R_1 \;=\; e \;<<\; R_1\ et\ R_2 \;\equiv\; R \Rightarrow \boldsymbol{C = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R^2}{e} = \varepsilon_0\,\frac{S}{e}} \qquad S = 4\pi R^2$$