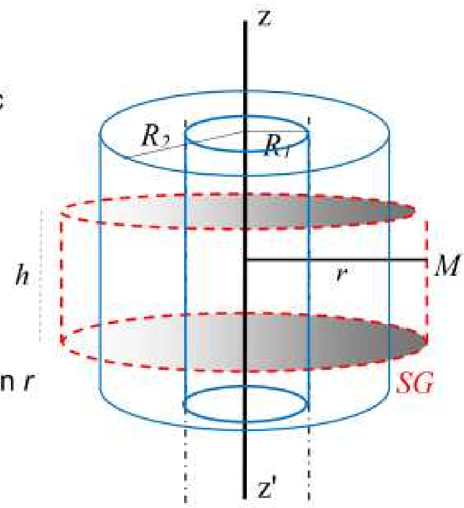
Exercice 2



1) Symétries et invariances :

Les plans ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$) et ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$) sont des plans de symétrie, donc

Le champ appartient l'axe $\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{E}(M) = E(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\rho$

Invariance par translation et par rotation / zz'

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(\rho)\,\vec{e}_\rho$; on pose $\rho = r$

2) Calcul de $\vec{E}(M)$:

La surface de Gauss choisie est un cylindre d'axe z'z, de rayon *r* (*r=HM*) et de hauteur *h* fermé par 2 sections droites (S_1 et S_2).

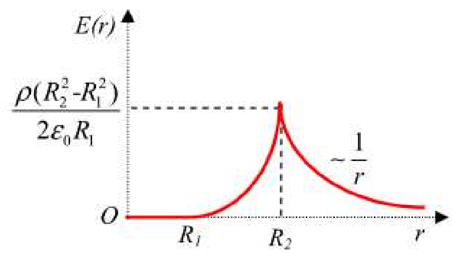
Th. de Gauss : $\Phi_{(\vec{E}/S_G)} = \oiint_{S_{cyl}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Sur les bases $\vec{E} \perp \vec{dS}$ et sur la surface latérale $\vec{E}\,/\,/\vec{dS}$.

$$\Phi_{(\vec{E}/S_{cyl})} = \underbrace{\iint_{base1} \vec{E}\cdot\vec{ds}}_{=0} + \underbrace{\iint_{base2} \vec{E}\cdot\vec{ds}}_{=0} + \iint_{Slat} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \iint_{Slat} \vec{E}\cdot\vec{ds} = E(r)\iint_{Slat} ds = E(r)\cdot 2\pi rh \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$

On distingue 3 cas:

- $r < R_1$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(r) = 0$
- $R_1 \le r < R_2$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \rho\pi(r^2 - R_1^2)\text{h} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \dfrac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho$
- $r > R_2$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)\text{h} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \dfrac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho$



3) pour que le cylindre creux devienne un fil il faut que :

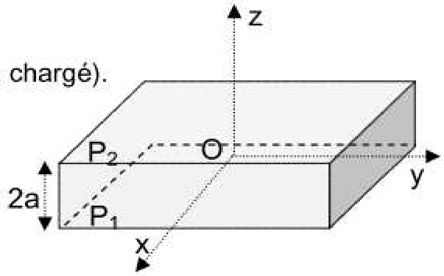
$R_1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho$

Et en tendant R_2 vers 0, le fil doit garder la même charge Q du cylindre

$Q = \rho\pi R_2^2\text{h} = \lambda\text{h} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho$

Exercice 3

Distribution volumiques contenue entre deux plans infinis



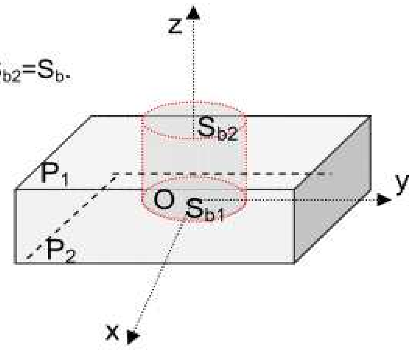
1) Symétries et invariances : $\vec{E}(x,y,z)=E_z(z)\vec{k}$ (voir **A)** plan chargé).

Le plan (xOy) est plan de symétrie $\longrightarrow$ $\vec{E}(-z)=-\vec{E}(z)$

Distribution volumique $\Rightarrow E(z=0)=0$

Il suffit d'étudier $E(z)$ pour z >0 (ou z<0).

2) Pour **z > 0** : Th. de Gauss : $\Phi_{(\vec{E}/SG)}=\oiint_{SG}\vec{E}.\vec{ds}=\dfrac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$



Surf. de Gauss : Cylindre d'axe Oz , de hauteur z et de base $S_{b1}=S_{b2}=S_b$.

$$\Phi=\iint_{S_{lat}}\vec{E}\cdot\vec{ds}+\iint_{Sb1}\vec{E}\cdot\vec{ds}+\iint_{Sb2}\vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Sur (S_{lat}) : $\vec{E}\perp\vec{ds}\implies\Phi_{(\vec{E}/S_{lat})}=0$
- Sur (S_{b1}) : $\vec{E}=\vec{0}\implies\iint_{Sb1}E_z(z)\,ds=0$

$$\Rightarrow\Phi_{(\vec{E}/SG)}=\iint_{Sb2}E_z(z)\,ds=E_z(z)S_{b2}=E_z(z)S_b=\frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

On distingue deux cas : <u>z > a</u> et <u>z < a</u>

$\underline{z\geq a}$: $\sum q_{\text{int}}=\rho_0\ S_b.\,a$

$\underline{z\leq a}$: $\sum q_{\text{int}}=\rho_0\ S_b.\,z\ \Rightarrow\vec{E}(\mathrm{M})=\dfrac{\rho_0\ z}{\varepsilon_0}\vec{k}$

3) Le potentiel *V(M)* : On a $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}\,V(M)$

$$E_z=-\frac{dV}{dz}\quad\Rightarrow\quad V(z)=-\int E_z(z)dz\quad\Rightarrow\begin{cases}\underline{z\geq a}\quad E(z)=\dfrac{\rho_0\ a}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow V(z)=-\dfrac{\rho_0\,a}{\varepsilon_0}z+C_1\\[2ex]\underline{z\leq a}\quad E(z)=\dfrac{\rho_0\ z}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow V(z)=-\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2+C_2\end{cases}$$

<u>Calcul de C_1 et C_2 :</u> On a : $V(0)=0\ \Rightarrow C_2=0$

par continuité de *V(M)* en z = a $\Rightarrow V(a)=-\dfrac{\rho_0\,a^2}{\varepsilon_0}+C_1=-\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}a^2\Rightarrow C_1=\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}a^2$

$$\begin{cases}\underline{z\geq a}\quad E(z)=\dfrac{\rho_0\,a}{\varepsilon_0}\ ;\ V(z)=-\dfrac{\rho_0\,a}{\varepsilon_0}z+\dfrac{\rho_0\,a^2}{2\varepsilon_0}\\[2ex]\underline{z\leq a}\quad E(z)=\dfrac{\rho_0\,z}{\varepsilon_0}\ ;\ V(z)=-\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2\end{cases}$$