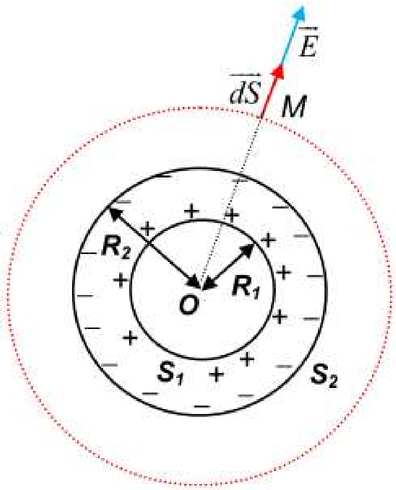
**Exercice 1**




**1)** $\sigma_1 = \dfrac{Q}{4\pi R_1^2}$ et $\sigma_2 = \dfrac{-Q}{4\pi R_2^2}$ ; $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2}$

**2)** Tous les plans passant par *OM* sont des plans de symétrie.
Donc le champ appartient à leur intersection.

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r,\varphi,\theta)\,\vec{e}_r$

Invariance du module du champ par rotation suivant $\varphi$ et suivant $\theta$. Donc le champ ne dépend que de *r* (*r=OM*).

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$

**3) Calcul de $\vec{E}(M)$**

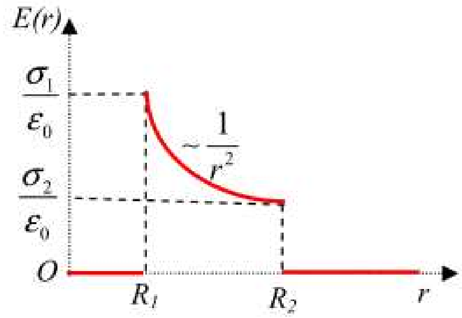
La surface de Gauss choisie est une sphère de centre *O* et de rayon *r* (*r=OM*)

Th. de Gauss : $\Phi_{(\vec{E}/S_G)} = \oiint_{S_{cyl}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

$$\Phi_{(\vec{E}/S_G)} = \oiint_{SG} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_{SG} E(r)\overrightarrow{e_r}\cdot dS\overrightarrow{e_r} = \oiint_{SG} E(r)\cdot dS = E(r)\oiint_{SG} dS = E(r)4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

On distingue 3 cas:

- $r < R_1$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \vec{0}$
- $R_1 < r < R_2$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = +Q \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
- $r > R_2$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = Q - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E(r)} = \vec{0}$




**4)** Le champ est discontinu en $R_1$ et $R_2$ c.à.d. à la traversée des couches chargées en surfaces.

$$\Delta E_1 = E(R_1^+) - E(R_1^-) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta E_2 = E(R_2^+) - E(R_2^-) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

### 5) Calcul du potentiel

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Puisque $E$ ne dépend que de $r$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{E(r)} = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e_r} \Rightarrow V = -\int E(r)dr$

On distingue 3 cas:

- $r < R_1$ ; $E(r) = 0$ $\Rightarrow$ $V(r) = cte = C_1$
- $R_1 \leq r < R_2$ ; $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\Rightarrow$ $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$
- $r > R_2$ ; $\Rightarrow$ $E(r) = 0$ $\Rightarrow$ $V(r) = C_3$

Détermination des constantes :

- Il n'y a pas de charge à l'infini donc le potentiel à l'infini est nul, donc $C_3 = 0$ .
- Continuité du potentiel en $R_2$ :

  $V(R_2^+) = V(R_2^-)$ $\Rightarrow$ $0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C_2$ $\Rightarrow$ $C_2 = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$
- Continuité du potentiel en $R_1$ :

  $V(R_1^-) = V(R_1^+)$ $\Rightarrow$ $C_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

Donc :

- $r < R_1$ ; $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2})$
- $R_1 \leq r < R_2$ ; $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2})$
- $r > R_2$ ; $V(r) = 0$