Correction TD2 (exercices 2, 3 et 4)

Exercice 2.

1) Symétries :

- Le plan contenant l'axe Oz et passant par M (plan $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$) est un plan de symétrie.
- Le plan contenant passant par M et perpendiculaire à l'axe Oz (plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$) est également un plan de symétrie.

$\Rightarrow \vec{E}(M) \in$ à l'intersection de ces deux plans $\Rightarrow \vec{E}(M) = E\,\vec{e}_\rho$

Invariance par rotation autour de $Oz \Rightarrow \vec{E}(M)$ ne dépend pas de φ.

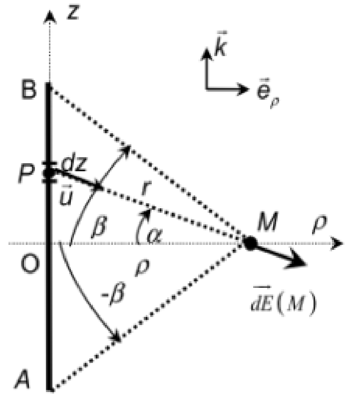
z = 0 (la projection de M sur Oz) $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(\rho)\vec{e}_\rho$

2) Calcul du champ : On pose $OM = \rho$

Un élément de charge $dq = \lambda dz$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}(M)$:

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2} \quad \text{avec } \vec{u} = \cos\alpha\ \vec{e}_\rho - \sin\alpha\ \vec{k}$$

Puisque $\vec{E}(M)$ est dirigé suivant $\vec{e}_\rho$, la composante suivant $\vec{k}$ est nulle.



$$\vec{E}(M) = \int_{AB} \overrightarrow{dE}(M) = \int_{AB} \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho)$$

$$z = \rho tg\alpha \ \Rightarrow\ dz = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2\alpha} \quad et \quad r = \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

On exprime z et r en fonction de a et on intègre $/\alpha$: $-\beta \le \alpha \le \beta$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{-\beta}^{\beta}\cos\alpha\, d\alpha\ \vec{e}_\rho$$

Donc $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}(\sin\beta)\vec{e}_\rho = \dfrac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}}\vec{e}_\rho$

3) Cas du fil infini : $\beta \to \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\ \vec{e}_\rho$

Exercice 3.

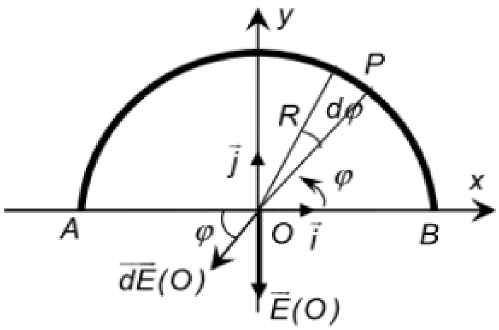
1) Symétrie : les plans *(xOy)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie
$\Rightarrow$ *Oy* est axe de symétrie de la distribution de charges;
donc $\vec{E}(O)$ est porté par Oy $\rightarrow \vec{E}(O) = E(O)\,\vec{j}$.

2) Calcul du module E(O) **:**
En coord. polaires un élément de longueur $dl = Rd\varphi$ de charge élémentaire $dq = \lambda dl$
centré en P, crée en O un champ élémentaire : $\overrightarrow{dE}(O) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dl}{\|\overrightarrow{PO}\|^3}\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dl}{R^2}\vec{u}$

avec $\vec{u} = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}$,
Comme $\vec{E}(O)$ est porté par Oy on peut écrire :
Projection sur Oy : $\overrightarrow{dE}_y(O) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dl}{R^2}(-\sin\varphi)\vec{j}$

$\vec{E}(O) = \int_{AB}\overrightarrow{dE}_y(O) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}(-\sin\varphi)d\varphi\,\vec{j}$

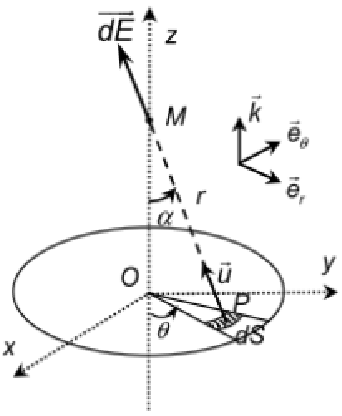
D'où $\vec{E}(O) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$



Exercice 4

1) Symétries:

Symétrie axiale : Oz axe de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z(M)\vec{k}$
Invariance par rotation autour de Oz
$\Rightarrow$ E(M) ne dépend que de z d'où $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$
Le plan du disque est plan de symétrie : $E_z(-z) = -E_z(z)$



2) Calcul du champ:

On pose: $OM = z$; $OP = \rho$; $PM = r$; $dS = \rho d\rho d\theta$
Un élément de charge $dq = \sigma ds$ centré en P crée en M un
champ élémentaire: $\overrightarrow{dE}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma\, dS}{r^2}\vec{u} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma\,\rho d\rho d\theta}{r^2}\vec{u}$

Seule la composante suivant $\vec{k}$ intervient dans le champ total $\vec{E}(M)$.

Projection / Oz : $d\vec{E}_z = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma ds}{r^2}\cdot\cos\theta\cdot\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \iint_{disque} d\vec{E}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{disque}\frac{\rho d\rho d\theta}{r^2}\cos\alpha\cdot\vec{k}$$

avec $0 \le \rho \le R$ et $0 \le \theta \le 2\pi$; Variable d'intégration : ρ,

Exprimons $\cos\alpha$ et r en fonction de ρ : $\cos\alpha = \dfrac{z}{r} = \dfrac{z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$ et $r^2 = z^2 + \rho^2$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\vec{k} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

Posons $u = z^2 + \rho^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2\rho d\rho$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{2u^{3/2}} \cdot \vec{k} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{u^{1/2}}\right]_{z^2}^{z^2+R^2} \cdot \vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right] \cdot \vec{k}$$

Finalement : $$\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right] \cdot \vec{k} & \text{pour} \quad z > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1 - \dfrac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right] \cdot \vec{k} & \text{pour} \quad z < 0 \end{cases}$$