SMIA- S2 / Printemps-Eté 2021
TD N°1 : CORRIGE-Suite-

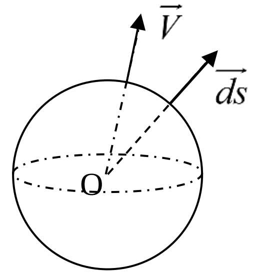
Exercice 3.

1) En coord. Cartésiennes $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

➔ $div\left(\vec{V}\right) = \dfrac{\partial(x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(z)}{\partial z} = 3$

2) En coordonnées sphériques $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{e}_r$

- Flux de $\vec{V}$ à travers la surface de la sphère de centre O et de rayon R :
  $\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{ds}$, $\vec{ds} = ds\,\vec{e}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$,



Sur la surface de la sphère : $\vec{V} = R\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \iint_S R\vec{e}_r \cdot ds\,\vec{e}_r = R^3 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^3$$

- Divergence de $\vec{V}$ en coordonnées sphériques : $div\,\vec{V} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) = 3$

<u>Th. de Green-Ostrogradsky :</u> (V) : Volume délimité par une surface (S) fermée quelconque.
et $\vec{V}$: Champ de vecteurs défini $\forall$ M$\in$ (V) on a: $\Phi_{sphère} = \iint_S \vec{V}.\vec{ds} = \iiint_V div\vec{V} \cdot d\tau$,

à l'intérieur de la sphère : $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

or $div\,\vec{V} = 3 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{sphère} = \iiint_{sphère} 3 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 4\pi R^3$

Le Théorème de <u>Green-Ostrogradsky</u> est bien vérifié.

3) En coord. cylindriques $[base\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\right)]$: $\vec{V} = \vec{V}_\rho + \vec{V}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

Flux de $\vec{V}$ à travers la surface du cylindre :

$$\Phi_{Scyl} = \int d\Phi_{Scyl} = \iint_{Scyl} \vec{V}.\vec{ds} \quad ; \quad S_{cyl} = S_{b1} + S_{b2} + S_L$$

➢ <u>Calcul de</u> $\Phi_{S_{b1}}$: $d\Phi_{Sb_1} = \vec{V} \cdot \vec{ds_1} = (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) \cdot (-ds_1 \vec{k}) = -z \cdot ds_1$

$\Rightarrow \quad \Phi_{S_{b1}} = \iint_{S_{B1}} (-z ds_1) = 0$ car sur S_1 *on a* $z = 0$

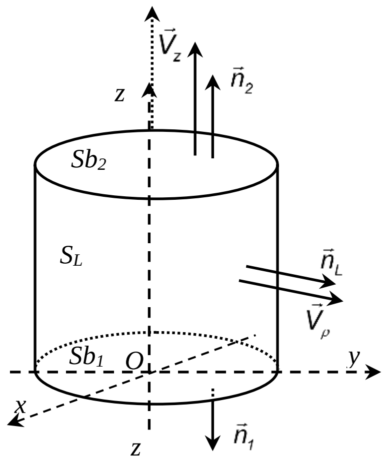
➢ <u>Calcul de</u> $\Phi_{S_{b2}}$ $d\Phi_{Sb_2} = \vec{V} \cdot \vec{ds_2} = (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) \cdot ds_2\,\vec{k} = z \cdot ds_2 = h \cdot ds_2$

$\Rightarrow \quad \Phi_{S_2} = h \iint_{S_{B2}} ds_2 = h \iint_{S_{b2}} \rho d\rho d\varphi = \pi R^2 h$

➢ <u>Calcul de</u> Φ_{S_L} :

$d\Phi_{S_L} = \vec{V} \cdot \vec{ds_L} = (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}).\vec{ds_L} = R\vec{e}_\rho \cdot ds_L \vec{e}_\rho = R \cdot ds_L = R \cdot (R d\theta dz)$

$\Rightarrow \quad \Phi_{S_L} = \iint_{S_L} R^2 d\varphi\, dz = 2\pi R^2 h$



Finalement, le flux total de $\vec{V}$ à travers la surface du cylindre sera:
$\Phi_{cyl} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_L} = \underline{3\pi \boldsymbol{R^2 h}}$

2) Divergence de $\vec{V}$: $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

- En coordonnées cylindriques : $div\,\vec{V} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2) + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$

<u>Th. de Green-Ostrogradsky :</u> $\Phi_{cyl} = \iint_{Scyl} \vec{V}.\vec{ds} = \iiint_{Vcyl} div\vec{V} \cdot d\tau$

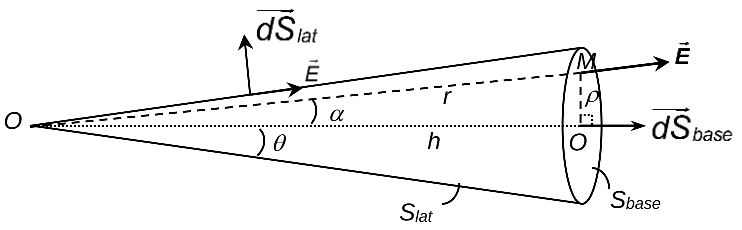
D'après la question 1) $\Phi_{Scyl} = \iint_{Scyl} \vec{V}.\vec{ds} = 3\pi R^2 h$ on a : $d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$

$$\Rightarrow \iiint_{Vcyl} div\vec{V} \cdot d\tau = \iiint_{cyl} 3 \cdot d\tau = 3\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \underline{3\pi R^2 h} = \Phi_{cyl}$$

Le Théorème de Green-Ostrogradsky est vérifié dans ce cas.

Exercice 4 :

1) Flux de $\vec{E}/cône$: $\Phi(\vec{E}/cône) = \iiint_{cône} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$

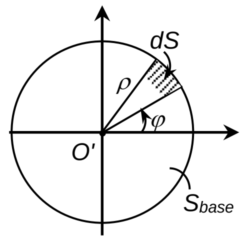


$\vec{E} = \dfrac{\vec{r}}{r^3} = \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$, *champ radial*

$$\Phi = \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{lat} + \iint_{S_{base}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{base}$$

$$= \iint_{S_{base}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{base} = \iint_{S_{base}} \frac{dS \cos\alpha}{r^2} \;,\quad \alpha = (\vec{e}_r, \overrightarrow{ds}_{base})$$

En coordonnées polaires : $dS = \rho d\rho \cdot d\varphi$ avec $0 \le \varphi \le 2\pi$ $\Longrightarrow$ $\Phi = \iint_{S_{base}} \dfrac{\rho d\rho d\varphi \cos\alpha}{r^2}$



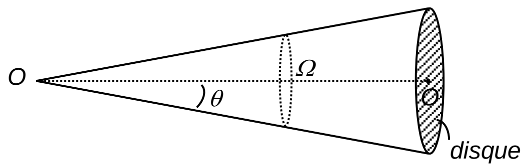
$\rightarrow$ Exprimons ρ et r en fonction de α: : $\rho = htg\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\rho = \dfrac{hd\alpha}{\cos^2\alpha}$

$h = r\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{r} = \dfrac{\cos\alpha}{h}$

D'où : $\Phi = \iint_{S_{base}} h^2 tg\alpha \dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \cos\alpha \dfrac{\cos^2\alpha}{h^2} d\varphi = \int_0^\theta \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \;= 2\pi\left(1 - \cos\theta\right)$

2) Angle solide sous lequel "on voit" un disque à partir d'un point *O* de son axe.

$\mathrm{d}\Omega = \dfrac{dS\cos\alpha}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \iint_{disque} \dfrac{dS\cos\alpha}{r^2}$



Même expression que Φ calculé en **1)** (S_{base} = S_{disque}) :

D'où $\quad \Omega = 2\pi\left(1 - \cos\theta\right) = \Phi$

3) ➔ Angle solide demi-espace (≡ plan): $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{plan} = 2\pi$ stéradian

➔ Angle solide espace entier $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \Omega_{espace} = 4\pi$ stéradian

* * * * *