

Electrostatique

Distribution Continue de charges

- Linéique $Q = \int \lambda dl$

- Surfacique $Q = \iint \sigma dS$

- Volumique $Q = \iiint \rho dV$

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Loi de Coulomb

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Champ électrostatique

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q} \quad (1)$$

Pour un plan infini chargé

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (2)$$

Champ créée par une distribution continue

(1) distribution Volumique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$$

distribution Surfacique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

distribution linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Le flux élémentaire

- Surface non fermée

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S d\Phi_{\vec{E}/dS} = \iint_S \vec{E} d\vec{S}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Ω : L'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de O

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{r}}{r^2}$$

- Surface fermée

•) charge Q extérieur de S

$$\Phi_{\vec{E}/S} = 0$$

•) charge Q intérieur de S

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Théorème de Gauss

Le flux d'un champ à travers une surface fermée est égal à la somme des charge intérieure sur ϵ_0

$$\Phi_{E/s} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Expression locale du théorème de Gauss

théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \Phi_{E/s} &= \iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\iiint_V \rho(M) \cdot dV}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

théorème de Green

$$\iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E}(M) \cdot dV$$

On en déduit

$$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Equation de Poisson

$$\text{Si } \rho = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E}(M) = 0$$

Equation de Laplace

$$\text{alors } \Phi_{E/s} = 0$$

Symétrie du champ électrostatique

- Plan de symétrie
- Plan d'antisymétrie

Règle de Symétrie

Symétrie axiale

Invariance par rotation sur OZ :

effet indépendant de θ

Symétrie cylindrique

Invariance par translation sur OZ et par rotation sur OZ :

effet indépendant de θ et z

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho)$$

Symétrie sphérique

Invariance par toute rotation autour de O :

effet indépendant de θ et φ

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$$

→ Pour appliquer le théorème de Gauss on suit les étapes suivante

1 - Symétrie

2 - Invariance savoir de quoi $\vec{E}$ ne dépend pas

3 - Surface de Gauss

4 - Étudier les cas après le calcul de flux le champ

$$\vec{E} = E_x(x,y,z)\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi$$

champ radial $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

$$\left. \begin{aligned} dV &= \pi^2 \sin \theta \, d\pi \, d\theta \, d\varphi \\ dS &= \pi^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ d\vec{S} &= dS \, \vec{e}_r \end{aligned} \right\} \text{sphère}$$

$$\left. \begin{aligned} dV &= \pi \, d\pi \, d\theta \, d\varphi \\ dS_L &= \pi \, d\theta \, d\varphi \\ dS_b &= \pi \, d\pi \, d\theta \end{aligned} \right\} \text{cylindre}$$

$$d\vec{S}_L = dS_L \, \vec{e}_r$$

$$d\vec{S}_b = dS_b (\pm \vec{e}_z)$$

Potentiel électrostatique

Travail

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{P}$$

$$W_{AB} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{P} = q \int_A^B dC$$

$$dC = -dV(M)$$

$$\text{avec } V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0 \quad (1)$$

Relation entre $\vec{E}$ et V

$$\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M) \quad (2)$$

$$\text{On a : } \text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Donc } \Delta V(M) = \frac{-\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Equation de Poisson

$$\text{Si } \rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V = \text{cte}$$

(3) Pour un champ radial

$$E(r) = - \frac{dV(r)}{dr}$$

$$V(r) = - \int E(r) \, dr \quad (4)$$

Potentiel créé par une distribution

Continue

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) \, dV}{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Potentiel} \\ \text{Continue} \end{array} \right.$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P) \, dS}{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en tout} \\ \text{point} \end{array} \right.$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(P) \, dP}{r} \rightarrow \text{non défini pour } r=0$$

Energie potentiel

$$E_e(M) = q V(M)$$

$$E_e(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$E_e(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$$

$$E_e = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint \rho \cdot V \, dV$$

$$E_e = \frac{1}{2} \iint \sigma \cdot V \, dS$$

$$E_e = \frac{1}{2} \int \lambda \cdot V \, dP$$

$$\text{Sphère : } S = 4\pi R^2 ; V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{cylindre : } S = 2\pi R h + 2\pi R$$

$$V = \pi R^2 h$$

Conducteurs en équilibre

Un Conducteur est en équilibre lorsque les charges libres qu'il contient sont toutes au repos.

Propriétés :

1. $\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = \vec{0}$
2. $\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow V = \text{cte}$
3. la charge d'un conducteur en équilibre ne peut être que surfacique

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ avec } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \rho = 0$$

champ au voisinage d'un Conducteur

calcul de flux :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \\ &= \iint \vec{E} d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} d\vec{S}_2 + \iint \vec{E} d\vec{S}_3 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{m} \quad \begin{array}{l} \text{théorème} \\ \text{de Coulomb} \end{array}$$

Pression électrostatique

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Capacité d'un Conducteur

en équilibre

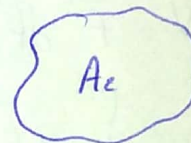
$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{Q}{V} \\ (F) \quad (C) \quad (V) \end{array} \right\} \text{ tous positifs}$$

Energie d'un sys de Conducteurs en $\Rightarrow$

$$E_e = \frac{1}{2} \sum Q_i V_i$$

Etat d'équilibre d'un système de Conducteur

$$\begin{cases} Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$



C_{11} : Capacité du Conducteur A_1 en présence de A_2

C_{22} : " " " A_2 " " de A_1

C_{12} : Coefficient d'influence de A_2 sur A_1

C_{21} : " " de A_1 sur A_2

$Q_{11} = C_{11} V_1 =$ charge propre de A_1

$Q_{12} = C_{12} V_2 =$ charge qui apparaît sur A_1 influencé par A_2

C_{12} de signe opposé à V_2

C_{12} et C_{21} sont tous < 0

en Général

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$$

Condensateurs.

Capacité du Condensateur

$$Q = C (V_h - V_e)$$

Condensateur plan

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{m} \\ V_h - V_e &= \frac{\sigma \cdot e}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{m} \\ V_h - V_e &= \frac{\sigma \cdot e}{\epsilon_0} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} Q &= \sigma \cdot S \\ C &= \frac{\epsilon_0 S}{e} \end{aligned}$$

Condensateur sphérique

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}$$

$$V_h - V_e = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_h}^{R_e} \frac{dr}{r^2}$$

$$C = \frac{Q_1}{V_h - V_e} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_h R_e}{R_e - R_h} \right)$$

Groupeement de Condensateurs

Parallèle : $C = \sum_{i=1}^n C_i$

Série : $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

Energie d'un Condensateur

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

L'énergie électrique est stockée dans les régions où le champ n'est pas nul.

⑧ - Dans un Condensateur, elle est stockée entre les armatures

Force agissant sur les armatures d'un Condensateur

$$|\vec{F}| = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Electrocinétique

1^{er} loi d'Ohm

$$V = RI$$

L'association des résistances

en série $R = R_1 + R_2 + R_3$

en parallèle

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Dipôles :

Dipôle passif Récepteur

Dipôle actif Générateur

Energie :

$$E_e(A) - E_e(B) = q(V_A - V_B)$$

Puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B) i_{AB}$$

$P > 0 \Rightarrow$ Récepteur

$P < 0 \Rightarrow$ Générateur

loi de Joule

$$P = R(i_{AB})^2$$

Rendement énergétique du récepteur

$$(V_A - V_B)I = e'I + r'I^2$$

↑
puissance
fournie

↑
puissance
utilisée

↑
puissance
perdue

⑥

$$\eta = \frac{e'I}{(V_A - V_B)I} = 1 - \frac{r'I}{(V_A - V_B)} < 1$$

loi d'Ohm Généralisé

résistance $V_A - V_B = RI$

Générateur $V_A - V_B = \pi I - e$

Récepteur $V_A - V_B = e' + r'I$

loi de Pouillet

$$\sum e = I \sum R$$

Réseau linéaire Ensemble de
dipôles

Nœud ; Branche ; Maille

lois de Kirchhoff

lois des Nœuds

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}$$

n (nœud) $\Rightarrow (n-1)$ équation

lois des Mailles

$$\sum e = \sum R i_k$$

sens i_k arbitraire

$b - (n-1)$ équation pour n
maille

$$[A][i] = [e]$$

$$i_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = \det[A]$$

$\Delta_k = \det[A]$ (colonne k remplacée
par $[e]$)