

Électrostatique:

Champ électrostatique:

Loi de Coulomb: $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

ϵ_0 : permittivité de vide

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_1 \vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)^3} = q_2 \times \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)^2} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right)$$

$$= q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) \text{ où } \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \text{champ électrostatique créé par } q_1 \text{ au point } \vec{r}_2$$

$\downarrow$
 $V \cdot m^{-1} (E = \frac{U}{d})$

Champ électrostatique créé par une distribution discontinue de charge ponctuelle:

$$|\vec{E}(\vec{M})| = \sum_{i=1}^N E_i(\vec{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{|\vec{r}_i - \vec{M}|}{(|\vec{r}_i - \vec{M}|)^3}$$

Th. de superposition:

Les champs électrostatiques (et les potentiels électrostatiques) de plusieurs charges s'ajoutent en un point M.

Champs électrostatique créé par une distribution continue de charge

Distribution volumique

$$dq = \rho d\tau$$

$$\vec{E}(\vec{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{volume}} \rho d\tau \frac{\vec{r}_M - \vec{r}}{|\vec{r}_M - \vec{r}|^3}$$

Distribution surfacique

$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{E}(\vec{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma dS \frac{\vec{r}_M - \vec{r}}{|\vec{r}_M - \vec{r}|^3}$$

Distribution linéique

$$dq = \lambda d\ell$$

$$\vec{E}(\vec{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda d\ell \frac{\vec{r}_M - \vec{r}}{|\vec{r}_M - \vec{r}|^3}$$

Re: Si la distribution volumique de charges est uniforme alors la charge est uniformément répartie dans le volume. $\rho(r) = \rho \forall P$

Invariances et symétries:

Invariance:

Par rotation: le champ créé ne dépendra pas de l'angle servant à mesurer cette rotation (donc)

Par translation: le champ créé ne dépendra pas de la variable associée à cet axe.

Symétries et antisymétries:

Plan de symétrie (TS): tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan. Tout point P de cette distribution, son symétrique P' porte la même charge.

Plan d'antisymétrie (Tas): tout point de ce plan $\vec{E}$ est perpendiculaire à ce point. P et P' charge opposée.

Symétrie cylindrique: si l'on a invariance par rotation et translation 2
Symétrie sphérique: si l'on a invariance par rotation &
distribution unidimensionnelle, en coordonnées cartésiennes invariance par translation 2D

Potentiel électrostatique

Circulation de $\vec{E}$: $dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{m} = \vec{E}(M) \cdot d\vec{P}$

$$C_{\vec{E}/AB} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$$

Remarque: $\oint_{M \in (C)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = 0$

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

$$\begin{aligned} dC &= \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) (dr \vec{e}_r + \dots) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\ &= -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cte} \right) \end{aligned}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} + \text{cte}$$

Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{PM_i} \right) + \text{cte}$$

Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

Distribution volumique	Distribution surfacique	Distribution linéique
$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) d^3r}{PM} + \text{cte}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P) dS}{PM} + \text{cte}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(P) dP}{PM} + \text{cte}$

Relation entre $\vec{E}(M)$ et $V(M)$

Relation locale:

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(M)$$

Démonstration:

(1) $dV = -dC$
 $= -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$

(2) $dV = \vec{\text{grad}} V(M) \cdot d\vec{OM} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right) (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z)$

$$\vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix} = dV$$

Relation intégrale:

$$\int_A^B dV = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = V_A - V_B$$

Lignes de champ électrostatique,

Def: des courbes, en tout point, sont tangentes à $\vec{E}$ et orientées dans le ^{même} sens que $\vec{E}$

Equation des lignes de champ,

$$(\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}) \text{ car ils sont colinéaires}$$

En coord cartésiennes,

$$d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

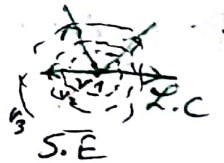
$$\text{Donc } \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coord cylind $\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$

En coord sphér $\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$

Surfaces Equipotentielle

Def: c'est l'ensemble des points M de l'espace où $V(M) = \text{cte}$.



Propriétés de L.C et de S.E,

- Les L.C sont perpendiculaires aux S.E



Démonstration

$$\forall M \in SE \quad V(M) = \text{cte} \Rightarrow dV = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad } V \cdot d\vec{OM} = 0$$

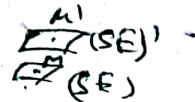
$$-\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = 0$$

$$(\vec{E}(M) \perp \vec{OM})$$

- Les L.C (et donc $\vec{E}(M)$) sont dirigées vers les potentiels décroissants.

Soient $M \in (SE)$: $V(M)$

$$M' \in (SE)' : V(M') = V(M) + dV$$



$$dV = \text{grad } V(M) \cdot \vec{MM}'$$

$$= -\vec{E}(M) \cdot \vec{MM}'$$

$$= -E(M) \cdot MM' \cdot \cos 0^\circ$$

donc $dV < 0$: $\vec{E}(M)$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

Théorème de Gauss

on définit le vecteur élémentaire de surface $d\vec{S}$ par :

$$d\vec{S} = dS \vec{n}_{ext}$$

$\vec{n}_{ext}$: vecteur unitaire normale à dS en M et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

Flux Énoncé de Th.

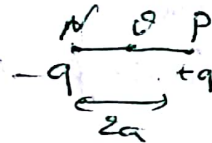
Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée (S) (appelée surface de Gauss) est égale à la charge électrique située à l'intérieur de S divisé par ϵ_0 .

$$\Phi_{\vec{E}(S) \text{ fermée}} = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieur de } (S)}}{\epsilon_0}$$

Dipôle électrostatique

Définition : C'est un dipôle ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ dont on étudie les effets ($\vec{E}(M)$ et $V(M)$) à grande distance par rapport à la distance qui les séparent.

$$\vec{p} = q \vec{NP}$$



Exemple



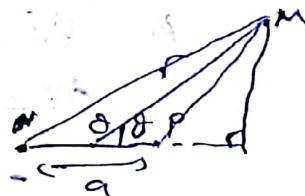
$$\begin{aligned} \vec{E}_{H_2O} &= \vec{E}_{O-H} + \vec{E}_{H-2O} \\ &= 2 \vec{E}_{O-H} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2Se \rho_{O-H} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Potentiel créé par un dipôle électrostatique

$$V(M) = V_{-q}(M) + V_{+q}(M) \quad (\text{Pr. de superposition})$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$



$$PM = \sqrt{(\sin \theta r)^2 + \left(\cos \theta r + \frac{a}{2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2ra \cos \theta + \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{Donc } V(M) = \frac{2q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Champs électrostatique créé par un dipôle électrostatique

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M)) \quad \text{invariante par rotation autour de } \varphi$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$)

Expression intrinsèque de $\vec{E}(M)$.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} - r^2 \vec{p})$$

Lignes de champ et surfaces équipotentielles.

Lignes de champ

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{\frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

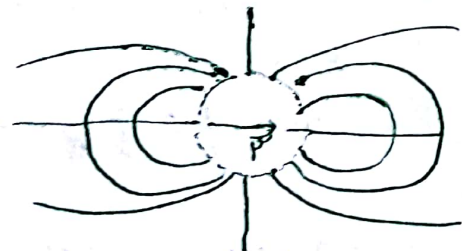
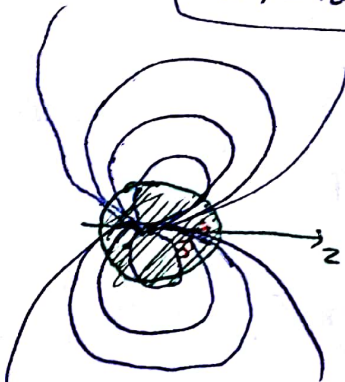
$$r(\theta) = r_0 \sin^2(\theta)$$

$$\forall M \in (SE) \quad V(M) = \cos \theta = V_0$$

$$\frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} = V_0$$

$$(r^2 = k \cos \theta \text{ ou } r = k' \sqrt{|\cos \theta|})$$

$$k = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 V_0}$$

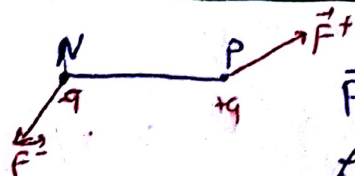


pour que V_0 soit positif

$$(\cos \theta > 0) \text{ car } r > 0 \text{ d'où } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

Zone, où les expressions de $V(M)$ et $\vec{E}(M)$ ne sont pas valables ($r=0$)

Action d'un champ électrostatique extérieure uniforme sur un dipôle

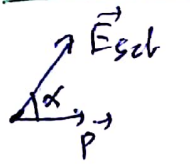


$$\vec{F}^+ + \vec{F}^- = q\vec{E}_{\text{ext}}(P) - q\vec{E}_{\text{ext}}(M) = q\vec{E}_{\text{ext}} - q\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Le dipôle est soumis à l'action d'un couple de forces de moment $\vec{p} \wedge \vec{E}$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{M}_0(\vec{F}^+) + \vec{M}_0(\vec{F}^-) \\ &= \vec{OP} \wedge (q \vec{E}_{ext}) + \vec{ON} \wedge (-q \vec{E}_{ext}) \\ &= q \vec{NP} \wedge \vec{E}_{ext} \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext} \quad \text{D'où } \boxed{\vec{r} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}}\end{aligned}$$

Positions d'équilibre.

 $\boxed{r = p E_{ext} \sin \alpha}$ à l'équilibre $r(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$

Stabilité $d r(\alpha) = p E_{ext} \cos \alpha d\alpha$

$$\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} = p E_{ext} \cos \alpha$$

$$\left(\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha_1} = p E_{ext} > 0 \rightarrow \text{Equilibre stable} \quad \left| \quad \left(\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha_2} = p E_{ext} < 0 \rightarrow \text{Equilibre instable} \right.$$

Energie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur.

D'une charge ponctuelle

$$\text{on a } \vec{F} = q \vec{E}(M) = q (-\text{grad } V(M)) = -\text{grad } (q V(M))$$

$$\text{ou } \vec{F} = -\text{grad } (E_p(M))$$

$$\text{D'où } \boxed{E_p(M) = q V(M)}$$

D'un dipôle.

$$\begin{aligned}E_p &= q V(P) - q V(N) = q \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{on} = q \int_N^P \text{grad } V(M) \cdot d\vec{on} = q \int_N^P \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{on} \\ &= -q \vec{E}_{ext} \cdot \int_N^P d\vec{on} = -q \vec{E}_{ext} \cdot (\vec{OP} - \vec{ON}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}}$$

Position d'équilibre.

$$E_p = -p E_{ext} \cos \alpha \quad \left| \quad \left(\frac{dE_p}{d\alpha} \right)_{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \text{ ou } \alpha_2 = \pi \right.$$

Stabilité.

$$\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = p E_{ext} \cos \alpha \quad \left| \quad \text{pour } \alpha_1 \text{ stable} \quad / \quad \text{pour } \alpha_2 \text{ instable} \right.$$

D'un système discret de charges ponctuelles.

Cas de 2 charges ponctuelles :

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$E_p = \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r} \right) + \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} \right) = \frac{1}{2} (q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2))$$

$$= \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1) \rightarrow \text{potentiel créé par } q_1 \text{ en } M_2 \quad \left| \quad \boxed{E_p = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)} \right.$$

Case N charges ponctuelles,

$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$ Le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît pour ne pas compter deux fois la même contribution.

Energie potentielle électrostatique d'une distribution continue de charges

Distri volumique

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \iiint \rho(\mathbf{M}) \cdot V(\mathbf{M}) \\ &= \frac{1}{2} \iiint \rho(\mathbf{M}) \cdot V(\mathbf{M}) d\tau \end{aligned}$$

Distri surfacique

$$E_p = \frac{1}{2} \iint \sigma(\mathbf{M}) \cdot V(\mathbf{M}) \cdot dS$$

Distri linéique

$$E_p = \frac{1}{2} \int \lambda(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) d\ell$$

- si la distribution $\mathcal{D}$ admet un plan de symétrie, le champ $\vec{B}$ est en tout point de ce plan orthogonal à ce plan ;
- si la distribution $\mathcal{D}$ admet un plan d'antisymétrie, le champ $\vec{B}$ est en tout point de ce plan colinéaire à ce plan.

1. Le champ magnétostatique

Existence du champ magnétostatique

Les observations ont conduit à introduire le champ magnétostatique, engendré par des courants et vérifiant certaines propriétés décrites plus bas. Ce champ est, comme le champ électrostatique, un champ vectoriel ; il est noté $\vec{B}$.

Loi de Biot et Savart

Cette loi donne le champ magnétostatique à partir de la distribution de courants dans l'espace.

Dans le cas d'une distribution continue de courants, donnée par le champ $\vec{j}(\vec{r})$, la loi de Biot et Savart donne :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{\vec{j} dV \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI est la perméabilité du vide.

Cette expression est applicable aux distributions surfaciques et linéiques de courants (champ créé par une spire parcourue par un courant par exemple).

2. Propriétés du champ magnétostatique

Invariance du champ magnétostatique

Comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique possède toutes les propriétés d'invariance de la distribution de courants qui l'engendre.

Propriétés de symétrie

On considère une distribution de courants $\mathcal{D}$ engendrant un champ magnétostatique $\vec{B}$. La loi de Biot et Savart permet de montrer les propriétés suivantes (comme pour le champ électrique) :

Théorème d'Ampère

On considère un contour fermé et orienté C . D'après le théorème d'Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où $I_{\text{enlacé}}$ est l'intensité du courant traversant une surface reposant sur le contour C et orientée d'après l'orientation de C avec la règle du « tire-bouchon ».

Contrairement au champ électrostatique, le champ magnétostatique n'est pas à circulation conservative : il n'existe donc pas de potentiel scalaire pour le champ magnétostatique.

Flux du champ magnétostatique

Pour une surface fermée et orientée S , on a :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif.